

Д. Н. Боровский, магистрант; П. Е. Вайтехович, доцент; Д. В. Семененко, ассистент

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕЛЮЩИХ ТЕЛ НА РОТОРЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ МЕЛЬНИЦЫ

In article reception problems of disperse powders, in particular nanomaterials are considered. The most perspective methods and the equipment for their reception are revealed. The basic designs of vertical centrifugal mills and influences occurring in them on a processed material are described. The design procedure of movement of grinding bodies on a rotor for the further definition of its geometrical sizes is presented, basic of which diameter and rotor height is. According to the made model the trajectory of movement of a grinding body on the flat bottom is deduced, and also the height of its lifting depending on size of angular speed and the geometrical sizes of a rotor is defined.

Введение. В химической промышленности и производстве строительных материалов в некоторых технологических процессах от 50 до 70% энергозатрат приходится на помол различных компонентов. Широко распространенные на данный момент шаровые мельницы характеризуются высокой материало- и энергоемкостью, а получаемый в них конечный продукт имеет зерновой состав разной дисперсности, что отрицательно сказывается на качестве конечного продукта [1, 2]. В связи с тенденцией увеличения цены на энергоресурсы перспективным является направление снижения себестоимости продукта за счет уменьшения энергоемкости процесса измельчения. Этого можно добиться применением принципиально новых измельчителей, например центробежно-шаровых мельниц [2–4].

В последнее время одной из актуальных проблем является получение порошков с высокой степенью дисперсности, так называемых нанопорошков [5–7]. Такие порошки позволят создать новые композиционные материалы с уникальными характеристиками, которые будут применяться в различных отраслях науки. Но для производства этих порошков необходимо соответствующее оборудование, которое позволило бы измельчить материала до таких сверхмалых размеров (10^{-9} м).

Оборудование, существующее в настоящее время, не позволяет получать такие порошки. Поэтому его надо либо совершенствовать, либо разрабатывать новый тип машин. Изготовить материал таких размеров (10^{-9} м) можно либо комбинируя истирание с ударом и раздавливанием [8, 9], либо используя другие физические явления, например ультразвук, кавитацию [10] и др.

В настоящее время для производства нанопорошков нет оборудования, работающего в производственных масштабах. Делаются отдельные попытки получить порошок в лабораторных условиях, но максимальный размер частиц не выходит за рамки 5–10 нм [11].

Наиболее перспективными установками для получения нанопорошков могут являться планетарные, центробежно-шаровые, роторно-центробежные, бисерные и дисковые мельни-

цы [8, 11–13]. При этом надо учесть, что затраты на получение дисперсных порошков растут с увеличением дисперсности.

Вертикальные центробежные мельницы из перечисленных выше измельчителей более просты в конструктивном исполнении, работают по непрерывному циклу в отличие от планетарных мельниц.

В зависимости от конструктивных особенностей в вертикальных центробежных мельницах происходят различные виды воздействия на обрабатываемый материал. Одни из них полностью загружены мелющими шарами, и помол происходит за счет раздавливания под действием центробежных сил и трения между материалом и мелющими телами [14]. В других осуществляется многократная циркуляция материала внутри корпуса в результате установки внутреннего конуса, ребер и других элементов. Помимо трения в них присутствует также и ударное воздействие. Третьи [15] имеют подвижный ротор, в отдельные секции которого установлены цилиндрические или сферические мелющие тела. В таких мельницах измельчение происходит как посредством раздавливания, так и посредством истирания.

В последнее время на рынке начали появляться немецкие лабораторные установки центробежно-шарового типа, которые позволяют добиться высокого качества измельчения мягких, средних по твердости, твердых и хрупких материалов. Причем, несмотря на значительное количество предложенных конструкций, в теоретическом отношении эти мельницы все еще остаются плохо изученными. Отсутствие цельной математической модели движения материала и мелющих тел внутри мельницы не позволяет осуществлять разработку крупных промышленных установок.

Основная часть. Ротор центробежно-шаровой мельницы состоит из плоского днища, конуса и цилиндрической обечайки. В связи с этим необходимо проанализировать движение мелющего тела на отдельных участках: плоский диск, конус и цилиндр.

Движение мелющего сферического тела происходит по конической поверхности. Перемещения

тела по плоскому дну и вертикальной стенке являются частными случаями движения по конусу.

Расчет параметров мельницы базируется на основных положениях теоретической механики и высшей математики. Данная задача является трехмерной, и для решения обычно используют декартову систему координат [16], но, так как мельница имеет ось вращения, можно применить цилиндрическую систему координат. Причем названная система координат эффективней при математическом исследовании, а также при расчете геометрических размеров ротора мельницы, так как позволяет определить координаты тела r и φ , характеризующие текущий радиус и угол поворота ротора.

Задача решается на ЭВМ с применением математического пакета, например, Mathcad или Matlab. Причем система координат – подвижная и вращается с угловой скоростью, равной угловой скорости конуса, а движение мелющего тела рассматривается относительно вращающейся конической поверхности.

Уравнения относительного движения в проекциях на оси координат для произвольной точки согласно рис. 1 имеют вид

$$\begin{cases} m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_{\varphi a} + F_{\varphi e} + F_{\varphi k}, \\ m(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2) = F_{ra} + F_{re} + F_{rk}, \\ m\ddot{z} = F_{za}, \end{cases} \quad (1)$$

где m – масса мелющего тела, кг; $\vartheta_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$,

$$\vartheta_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}, \quad \vartheta_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$ – скорости и ускорения тела соответ-

ственно по осям r, φ, z ; F_a – активная сила (сила тяжести и трения), Н; F_e – переносная сила инерции, Н; F_k – кориолисова сила инерции, Н.

Проекции сил на оси:

$$\begin{aligned} F_r &= F_e - F_k \sin \gamma - F_{Tr}, \\ F_\varphi &= F_k \cos \gamma - F_{T\varphi}, \\ F_z &= -G - F_{Tz}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $F_{Tr}, F_{T\varphi}, F_{Tz}$ – сила трения соответственно по осям r, φ, z ; N ; G – сила тяжести, Н.

Переносная сила инерции в данном случае равна:

$$F_e = m\omega^2 r, \quad (3)$$

где ω – угловая скорость вращения мельницы, рад/с; r – текущий радиус тела, м.

Кориолисова сила инерции определяется следующим образом:

$$F_k = 2m\omega \sqrt{\vartheta_r^2 + \vartheta_\varphi^2}. \quad (4)$$

Сила трения, препятствующая движению, направлена в противоположную сторону от вектора полной относительной скорости $\bar{\vartheta}$. Согласно расчетной схеме, приведенной на рис. 1, проекции силы трения на оси координат в этом случае можно рассчитать по формулам:

$$\begin{aligned} F_{Tr} &= fN \sin \beta, \\ F_{T\varphi} &= fN \cos \alpha \cos \beta, \\ F_{Tz} &= fN \sin \alpha \cos \beta, \end{aligned} \quad (5)$$

где f – коэффициент трения мелющего тела; N – нормальная реакция, Н; α – угол наклона образующей конуса, град; β – угол между векторами $\bar{\vartheta}$ и $\bar{\vartheta}_{rz}$, град.

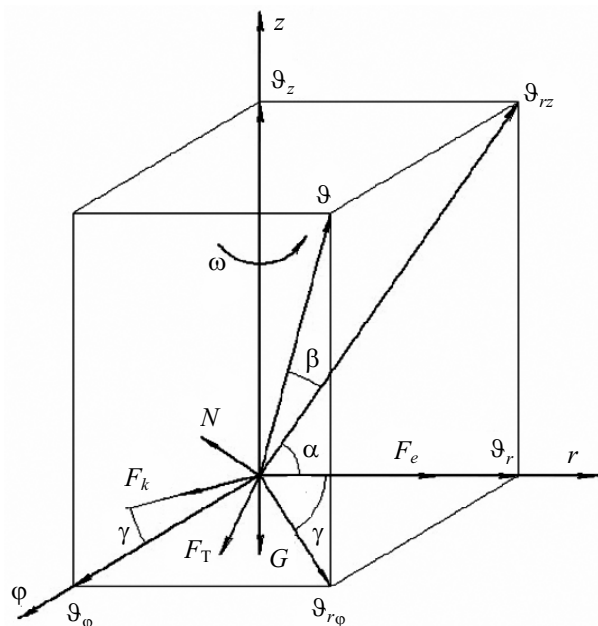


Рис. 1. Расчетная схема для движения мелющего тела по ротору

Поскольку реакция N направлена по общей нормали к поверхности и приложена в точке касания, то для нашего случая

$$N = N_{rz} = N_r \sin \alpha + N_z \cos \alpha. \quad (6)$$

Проекции нормальной реакции на оси координат, определяемые методами статики, равны:

$$N_r = F_e \cos \varphi - F_k \sin \gamma; \quad N_z = G. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (6) зависимости (3), (4) и (7), получаем формулу для определения нормальной реакции:

$$\begin{aligned} N &= (m\omega^2 r - 2m\omega \sin \gamma \sqrt{\vartheta_r^2 + \vartheta_\varphi^2}) \times \\ &\times \sin \alpha + mg \cos \alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

где g – ускорение свободного падения, м/с².

Тригонометрические функции углов β и γ в уравнениях (2), (5) и (8) определяются через проекции относительной скорости. Подставив

полученные выражения для сил и функций углов в уравнение (1) и проведя ряд преобразований, мы получили окончательные уравнения движения мелющего тела по конической поверхности в виде

$$\begin{cases} r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 2\omega\dot{r} - f((\omega^2 r - 2\omega r\dot{\phi}) \sin \alpha + \\ + g \cos \alpha) \frac{r\dot{\phi}}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2 + (\dot{z})^2}}, \\ \ddot{r} - r(\dot{\phi})^2 = \omega^2 r - 2\omega r\dot{\phi} - f((\omega^2 r - 2\omega r\dot{\phi}) \times \\ \times \sin \alpha + g \cos \alpha) \frac{\sqrt{(\dot{r})^2 + (\dot{z})^2} \cos \alpha}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2 + (\dot{z})^2}}, \\ \ddot{z} = -g - f((\omega^2 r - 2\omega r\dot{\phi}) \sin \alpha + \\ + g \cos \alpha) \frac{\sqrt{(\dot{r})^2 + (\dot{z})^2}}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2 + (\dot{z})^2}} \sin \alpha, \end{cases} \quad (9)$$

где r, ϕ, z – координаты тела, м.

Полученная система уравнений (9) была использована для расчета движения по ротору центробежно-шаровой мельницы. Из общих уравнений движения (9) можно получить уравнения для частных случаев.

Для движения по плоскому вращающемуся диску (днищу), подставив в систему уравнений (9) значение $\alpha = 0^\circ$, сделав соответствующие преобразования, получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 2\omega\dot{r} - f \frac{gr\dot{\phi}}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2}}, \\ \ddot{r} - r(\dot{\phi})^2 = \omega^2 r - 2\omega r\dot{\phi} - f \frac{gr}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2}}. \end{cases} \quad (10)$$

С использованием аналогичного подхода проведен расчет основных характеристик движения по вертикальной стенке ротора мельницы. В этом случае, учитывая значение $\alpha = 90^\circ$, система имеет вид

$$\begin{cases} r\ddot{\phi} = -f(\omega^2 r - 2\omega r\dot{\phi}) \frac{r\dot{\phi}}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{z})^2}}, \\ \ddot{z} = -g - f(\omega^2 r - 2\omega r\dot{\phi}) \frac{\dot{z}}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{z})^2}}. \end{cases} \quad (11)$$

Исходя из величины центробежных сил, необходимых для подъема мелющего тела, трудности балансировки ротора, а также учитывая размеры промышленных установок, радиус ротора мельницы принимался от 0,3 до 0,6 м (для установок лабораторного типа – от 0,05 до 0,20 м), угол наклона конической поверхности ротора – 45° . Расчеты проводились с использованием математического пакета Mathcad при различных угловых скоростях мельницы $\omega = 0-250$ рад/с для мелющего тела с коэффициентом трения качения $f = 0,0001$.

Применялся последовательный позонный принцип расчета, когда параметры, полученные в предыдущей зоне, являлись начальными для последующей.

Исследуя полученную математическую модель, была выведена траектория движения мелющего тела по плоскому днищу в виде спирали Архимеда (рис. 2), причем угол закрутки спирали зависит от частоты вращения ротора, а количество оборотов (витков) спирали вокруг оси – от частоты вращения и радиуса ротора.

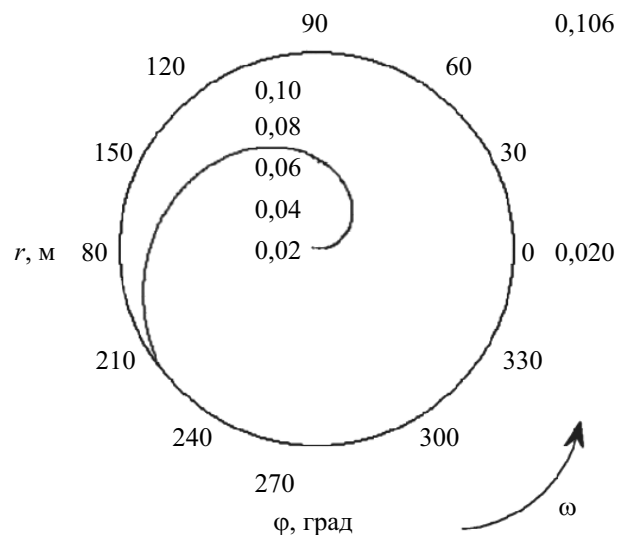


Рис. 2. Траектория движения мелющего тела по плоскому днищу при $\omega = 250$ рад/с (≈ 2390 об/мин) и радиусе ротора $r = 0,106$ м

Для расчета движения мелющего тела по конической поверхности в соответствии с системой уравнений (9) при той же угловой скорости мельницы за начальные условия принимались значения координат и скоростей, полученные в предыдущем решении.

Основной целью расчета являлось определение высоты подъема мелющего тела в зависимости от величины угловой скорости и геометрических размеров ротора (рис. 3, 4).

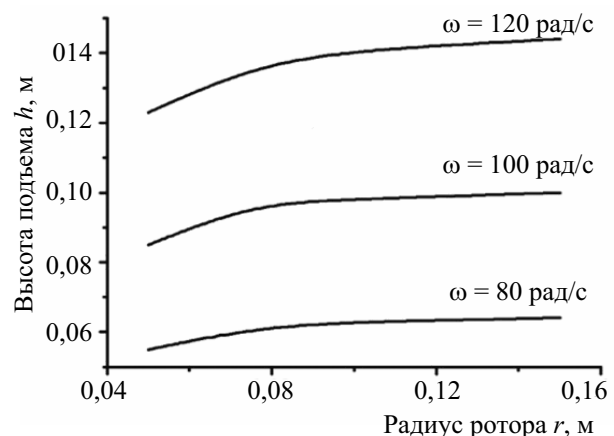


Рис. 3. Зависимость высоты подъема тела от радиуса ротора при разных угловых скоростях

Анализируя графики, представленные на рис. 3, 4, можно сделать вывод, что высота подъема растет при увеличении как радиуса ротора, так и частоты его вращения, а соответственно, и радиальной скорости движения мелющего тела, связывающей два названных выше параметра мельницы.

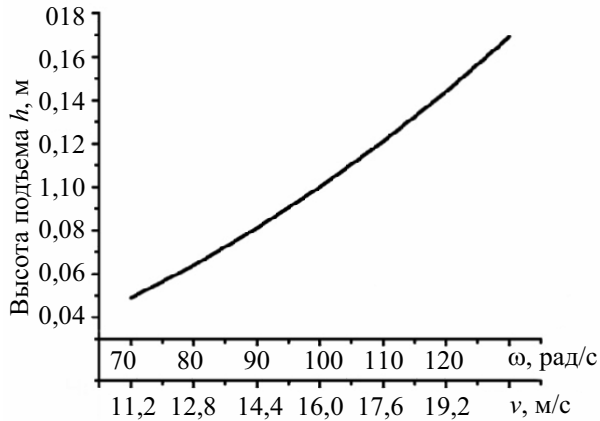


Рис. 4. Зависимость высоты подъема тела от частоты вращения ротора и радиальной скорости движения мелющего тела при радиусе ротора $r = 0,16$ м

Следовательно, влиять на высоту подъема можно изменением переносной скорости ротора. Но необходимо учесть, что при этом растут центробежные силы, мощность привода, ударные нагрузки на подшипники, возникают трудности балансировки ротора и т. д.

Заключение. Предложенная методика расчета, базирующаяся на решении системы дифференциальных уравнений, дает возможность провести комплексный анализ движения мелющих тел по поверхности сложной конфигурации, найти их высоту подъема по стенкам ротора в зависимости от его угловой скорости и конструктивных параметров. Это позволит определить размеры ротора, обеспечивающие максимально эффективное измельчение.

При анализе математической модели были выявлены следующие закономерности:

а) минимальная скорость перемещения мелющего тела в радиальном направлении для обеспечения своего подъема по вертикальной стенке ротора составляет 10 м/с;

б) величина переносной скорости ротора должна быть такой, чтобы обеспечить максимальный подъем мелющего тела. Причем увеличение частоты вращения вызывает больший рост высоты подъема тела, но в тоже время увеличиваются центробежные силы и необходима точная балансировка мельницы. Увеличение радиуса днища дает примерно такую же высоту подъема, но возрастают одновременно пусковой момент, необходимый для запуска мельницы, и мощность двигателя.

Литература

1. Бауман, В. А. Механическое оборудование предприятий строительных материалов, изделий и конструкций / В. А. Бауман. — М.: Машиностроение, 1981. — 324 с.
2. Сиденко, П. М. Измельчение в химической промышленности / П. М. Сиденко. — 2-е изд. — М.: Химия, 1977. — 368 с.
3. Hofmann, P. *Feinvermahlung wirtschaftlich und technisch optimieren* / P. Hofmann // *Welt Farben*. — 1998. — № 4. — S. 12–14.
4. Stehr, N. *Grobruhrwerkskugelmuhlen fur die Mineralstoffmahlung* / N. Stehr // *Chem. Ing. Techn.* — 1998. — Jhrg. 70, № 8. — S. 937.
5. Мелихов, И. В. Физико-химическая эволюция твердого вещества / И. В. Мелихов. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. — 309 с.
6. Гусев, А. И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии / А. И. Гусев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 416 с.
7. Мальцев, П. П. Нанотехнологии, наноматериалы, наносистемная техника — 2008 / П. П. Мальцев. — М.: Техносфера, 2008. — 438 с.
8. Mende, S. *Mechanische Erzeugung und Stabilisierung von Nanopartikeln in Ruhrwerkskugelmuhlen* / S. Mende, J. Schwedes // *Chem. Ing. Techn.* — 2003. — Jhrg. 75, № 8. — S. 1127.
9. *Beadmills save on labour* // *Polym. Paint Colour Z.* — 2004. — Vol. 194, № 4477. — P. 26–28.
10. Балоба, М. К. Работает пустота / М. К. Балоба. — Кишинев: Штиинца, 1985. — 64 с.
11. *A bead mill for making nanodispersions* // *Chem. Eng (USA)*. — 2005. — Vol. 112, № 10. — P. 17–18.
12. *This bead mill grings materials into nano-sized particles* // *Chem. Eng (USA)*. — 2003. — Vol. 110, № 8. — P. 24.
13. *Zentrifugalnassmahltechnik bis in den Nanobereich mit Pestle-Mill* // *Keram. Z.* — 2004. — Jhrg. 56, № 5. — S. 320.
14. Центробежная мельница: пат. 1123723 СССР, МПК7 С 15/08 / В. И. Козлов, Ф. Р. Кребель, В. Ф. Редькин, Н. М. Рубцов, С. А. Козырев; заявитель Краснояр. политехн. ин-т. — № 3575056/29-33; заявл. 07.04.83; опубл. 15.11.84 // Бюл. / ВНИИПИ Гос. комитет СССР по делам изобретений и открытий. — 1984. — № 42. — С. 41.
15. Центробежная мельница: пат. 2014892 Рос. Федерация, МПК7 С 15/08 / В. Н. Калашников, М. А. Саламатов, В. А. Бобров; заявитель Урал. горный ин-т им. В. В. Вахрушева. — № 4945390/33; заявл. 17.07.91; опубл. 30.06.94 // Бюл. / Комитет Рос. Федерации по патентам и товарным знакам. — 1994. — № 12. — С. 26.
16. Вайтехович, П. Е. Определение важнейших параметров центробежно-шаровых мельниц / П. Е. Вайтехович, В. С. Францкевич, Г. М. Хвесько // *Химическое и нефтегазовое машиностроение*. — 2007. — № 10. — С. 3–5.