

А. М. Волк, доцент; А. И. Вилькоцкий, ст. преподаватель; А. Э. Левданский, доцент

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ

The mathematical model was composed and calculation of moving of solid particles under influence of swirling gas flow in cylindrical element was realized. Hydrodynamics of gas flow was investigated and forces influencing on solid particle, both in the basic flow and during the contact with cylindrical surface, were considered. Obtained data can be used for research of processes of division of two-phasic flows in vertical device.

Введение. Процессы разделения многофазных систем являются составной частью многих технологических процессов в химической, пищевой, нефтехимической, микробиологической, энергетической и других отраслях промышленности [1, 2]. Вихревые аппараты позволяют значительно интенсифицировать процессы разделения, межфазного тепло- и массообмена, создавать гидродинамические режимы с относительно высокими скоростями частиц и несущей среды, значительными центробежными ускорениями, развитой поверхностью контакта фаз, эффективно выполнять классификацию, пылеулавливание и сушку дисперсных материалов, массообмен и сепарацию в газожидкостных потоках [3, 4].

Математическое моделирование рассмотренных процессов позволяет найти оптимальные соотношения между геометрическими и режимными параметрами, значительно повысить интенсивность и эффективность процессов разделения [5].

Характер движения частиц в газовом потоке является определяющим при сепарации, разделении фаз, массообмене и других процессах. Важным моментом для исследования движения частицы в потоке и особенно вблизи проницаемой поверхности является учет всех действующих на твердую частицу сил [1, 2], сравнительная оценка которых необходима и для исследования процесса осаждения частиц на фильтровальную поверхность.

Математическая модель. Принимаем, что частицы имеют сферическую форму радиусом a , плотностью ρ_a , массой m , объемом V_a , моментом инерции I . Скорость частицы обозначим через V , а скорость газового потока через W .

Проведение исследования закрученного газового потока в трубе необходимо при рассмотрении процессов разделения фаз. Важной задачей является изучение движения газового потока в пограничной области проницаемой поверхности и оценка возможности осаждения твердых частиц.

Для исследования гидродинамики установленного движения закрученного газового потока внутри цилиндра радиусом R рассмотрим уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, φ, z [6–8]. Для осесимметричных потоков принимаем $\partial W / \partial \varphi \cong 0$. При движении закру-

ченных потоков внутри цилиндра радиальная составляющая скорости W_r незначительна, и, как правило, в расчетах не учитывается. Поэтому можно принять $W_r = 0$. Для газовых потоков также не учитывается сила тяжести. Тогда из уравнения неразрывности следует

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Это означает, что профиль осевой составляющей скорости не изменяется по длине цилиндра. Принятые условия соответствуют коротким трубам и подтверждаются экспериментальными исследованиями [9]. В связи с этим уравнения Навье-Стокса преобразуются к виду [8]

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{W_\varphi^2}{r}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 W_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} - \frac{W_\varphi}{r^2} = 0. \quad (3)$$

За граничные условия принимаем

$$W_\varphi = 0 \text{ при } r = R, \quad (4)$$

$$\bar{W}_\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R W_\varphi 2\pi r dr = 2 \int_0^1 W_\varphi \tilde{r} d\tilde{r}, \quad (5)$$

где $\tilde{r} = r/R$.

С учетом граничных условий и непрерывности профиля получим

$$W_\varphi = \begin{cases} \frac{3}{4} \bar{W}_\varphi \frac{1 + \tilde{r}_{\max}}{\tilde{r}_{\max}^2} \tilde{r}, & 0 \leq \tilde{r} < \tilde{r}_{\max}, \\ \frac{3}{4} \frac{\bar{W}_\varphi}{1 - \tilde{r}_{\max}} \frac{1}{\tilde{r}}, & \tilde{r}_{\max} \leq \tilde{r} \leq 1, \end{cases} \quad (6)$$

(\tilde{r}_{\max} – значение r , соответствующее максимуму W_φ).

Подставляя (6) в выражение (2) и интегрируя последнее, находим разность давлений, действующих на стенку цилиндра, создаваемых закрученным газовым потоком:

$$\Delta P = \rho \int_0^1 \frac{W_\varphi^2}{\tilde{r}} d\tilde{r} = \frac{9}{16} \left(1 + \frac{1}{\tilde{r}_{\max}} + \frac{1}{2\tilde{r}_{\max}^2} + 2 \ln \tilde{r}_{\max} - \frac{\tilde{r}_{\max}^2}{2} \right). \quad (7)$$

Для случая проницаемой поверхности, когда максимум расположен достаточно близко к стенке цилиндра, т. е. $\tilde{r}_{\max} \approx 1$:

$$W_\varphi = \frac{3}{2} \bar{W}_\varphi \tilde{r} \text{ и } \Delta P = \frac{9}{8} \rho \bar{W}_\varphi^2. \quad (8)$$

Касательная составляющая \bar{W}_φ средней скорости \bar{W} газового потока зависит от ее среднерасходной составляющей \bar{W}_z в элементе и угла закрутки β потока статическим закручивателем [8]. Можно принять, что

$$\bar{W}_\varphi = \bar{W}_z \operatorname{tg}(k\beta), \quad (9)$$

где k – коэффициент, учитывающий отклонение угла закрутки потока от угла наклона лопастей завихрителя.

Анализ экспериментальных данных для центробежных элементов с лопастным завихрителем, имеющим угол наклона лопастей к горизонту в пределах 30–45°, дает значение $k = 0,83$ [8].

Рассмотрим осевую составляющую закрученного газового потока в проницаемом цилиндрическом элементе. Уравнение неразрывности имеет решение $W_r r = \text{const}$. При скорости оттока на проницаемой поверхности W_0 радиальная скорость будет $W_r = W_0 R / r$, градиент давления пропорционален перепаду давления по длине $\partial P / \partial z = -(P_1 - P_2) / L$ и уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 W_z}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{W_0 R}{v} - 1 \right) \frac{dW_z}{dr} = -\frac{1}{\mu} \frac{P_1 - P_2}{L}. \quad (10)$$

В качестве граничных условий зададим нулевую скорость на поверхности и среднюю расходную скорость по поперечному сечению:

$$W_z|_{r=R} = 0, \quad \bar{W}_z = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R W_z 2\pi r dr = 2 \int_0^1 W_z \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (11)$$

Обозначив $\alpha = W_0 R / v$, непосредственным интегрированием получим

$$W_z = \bar{W}_z (1 - \tilde{r}^\alpha) + \frac{(P_1 - P_2)R}{4\rho L W_0} \left(1 - 2\tilde{r}^2 - \frac{3}{2}\tilde{r}^\alpha \right). \quad (12)$$

С учетом касательных напряжений τ на проницаемой поверхности [10]

$$\tau_{rz}|_{r=R} = -\rho \bar{W}_z W_0 = -\frac{P_1 - P_2}{2L} R \quad (13)$$

получается следующая зависимость для осевой составляющей закрученного газового потока в проницаемом цилиндре:

$$W_z = \bar{W}_z \left(\frac{1}{2} + \tilde{r}^2 - \frac{3}{2}\tilde{r}^\alpha \right). \quad (14)$$

В основном потоке, вне пограничного слоя, или в непроницаемом элементе принимая составляющую \tilde{r}^α , равной нулю, получим

$$W_z = \bar{W}_z \left(\frac{1}{2} + \tilde{r}^2 \right). \quad (15)$$

Данная зависимость согласуется с результатами, описанными в работе [9].

Рассмотрим движение частицы в закрученном потоке и действующие на частицу силы в случае ее контакта с проницаемой поверхностью (рис. 1, 2). В основном потоке отсутствует лишь сила трения.

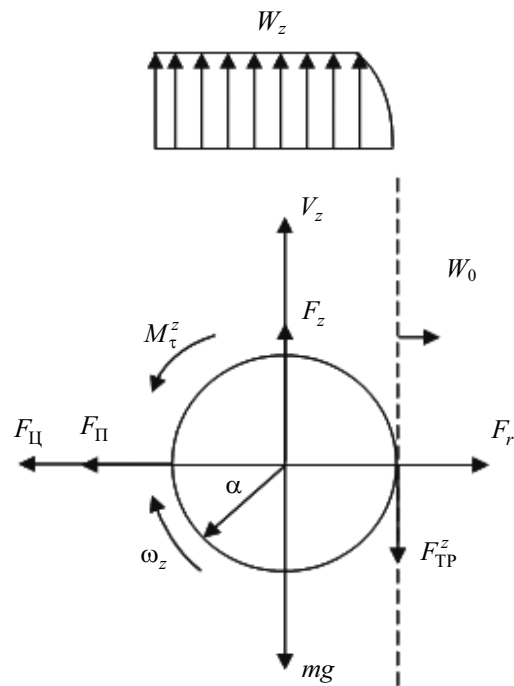


Рис. 1. Нормальные составляющие действующих на частицу сил

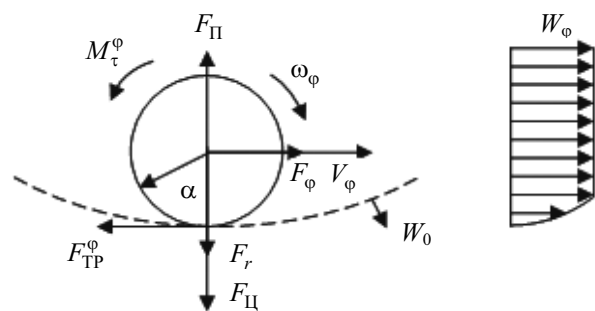


Рис. 2. Касательные составляющие действующих на частицу сил

Опишем силы, действующие на частицу.

1. Сила воздействия внешних силовых полей – сила тяжести

$$\vec{F}_g = mg. \quad (16)$$

2. Гидродинамическая сила Жуковского возникает в результате неравномерного обтекания

частицы набегающим потоком или при вращении частицы в однородном поле – эффект Магнуса. Исследователи разделяют силы Жуковского и Магнуса. Различают воздействие и направление силы Магнуса в зависимости от того, закручивается частица внешними силами или несущим потоком.

Выполним анализ воздействия данной силы на частицу в сплошном потоке. Выберем декартовую систему координат с началом в центре частицы и связанную с движущейся частицей: x – по касательной к поверхности траектории движения, y – по нормали. Поле скоростей потока на поверхности частицы, обусловленное ее вращением с угловой скоростью ω :

$$\vec{\Phi} = \{-\omega y; \omega x; 0\}. \quad (17)$$

Разобьем частицу на элементарные цилиндры плоскостями, параллельными плоскости движения, на расстоянии dz друг от друга. По формуле Жуковского найдем подъемную силу, действующую на элементарный цилиндр с учетом направления:

$$d\vec{F}_\Pi = -\rho_\Gamma \oint \vec{\Gamma} \times (\vec{W} - \vec{V}) dldz. \quad (18)$$

По формуле Стокса от интеграла по контуру перейдем к интегралу по поверхности

$$d\vec{F}_\Pi = -\rho_\Gamma \iint_{S_i} \text{rot}(\vec{W} - \vec{\Phi}) \times (\vec{W} - \vec{V}) dsdz. \quad (19)$$

Проинтегрировав элементарные силы по всему объему частицы, получим

$$\vec{F}_\Pi = \int d\vec{F}_\Pi = -\rho_\Gamma \iiint_{V_a} \text{rot}(\vec{W} - \vec{\Phi}) \times (\vec{W} - \vec{V}) dV_a. \quad (20)$$

Для вращающейся частицы $\text{rot}\vec{\Phi} = 2\vec{\omega}$, поэтому

$$\vec{F}_\Pi = -\rho_\Gamma \iiint_{V_a} (\text{rot}\vec{W} - 2\vec{\omega}) \times (\vec{W} - \vec{V}) dV_a. \quad (21)$$

Полученная формула обобщает все известные зависимости для поперечной силы, верна для произвольных потоков и частиц произвольной формы, однозначно определяет направление силы, показывает, что подъемная сила обусловлена только циркуляцией потока по контуру и не зависит от причин возникновения последней.

3. Сила гидродинамического воздействия $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\phi \vec{e}_\phi + F_z \vec{e}_z$ потока, движущегося с некоторой скоростью относительно частицы, будет равна:

$$\vec{F} = \zeta \frac{1}{2} \rho_\Gamma |\vec{W} - \vec{V}| (\vec{W} - \vec{V}) \pi a^2. \quad (22)$$

Коэффициент сопротивления ζ зависит от режима движения частицы, определяется числом Рейнольдса $\text{Re}_a = |\vec{W} - \vec{V}| a / \nu$ и может быть определен по формуле [11]

$$\zeta = \frac{24(1 + 0,17\text{Re}_a^{2/3})}{\text{Re}_a}. \quad (23)$$

4. Силы трения при контакте движущейся частицы с ограничивающей поверхностью

$$\vec{F}_{\text{ТР}} = -k_{\text{ТР}} |\vec{F}_N| \frac{\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a}}{|\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a}|}. \quad (24)$$

Направление этой силы зависит от направления скорости точки контакта. Точка контакта движется со скоростью, равной сумме поступательной и вращательной скоростей.

Сила трения создает вращательный момент. Если вектор \vec{a} направить от центра частицы в точку касания, то

$$\vec{M}_{\text{ТР}} = -\vec{F}_{\text{ТР}} \times \vec{a}. \quad (25)$$

5. Нормальная составляющая учитывает все силы, действующие по нормали к поверхности:

$$\vec{F}_N = -(\vec{F}_g^N + \vec{F}_r + \vec{F}_\Pi + \vec{F}_\Pi^N). \quad (26)$$

6. Центробежная сила

$$F_\Pi = m \frac{V_\phi^2}{r}. \quad (27)$$

Напишем в цилиндрической системе координат уравнения движения частицы:

$$\begin{cases} m \left(\frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\phi^2}{r} \right) = F_r - F_N, \\ m \left(\frac{dV_\phi}{dt} + 2 \frac{V_\phi V_r}{r} \right) = F_\phi - F_{\text{ТР}}^\phi, \\ m \frac{dV_z}{dt} = mg + F_z + F_{\text{ТР}}^z - F_A, \\ I \frac{\partial \omega_\phi}{\partial t} = M_{\text{ТР}}^\phi, \\ I \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = M_{\text{ТР}}^z. \end{cases} \quad (28)$$

Расчет движения частицы. Результаты расчета движения частицы, составляющие ее линейной скорости и угловой скорости вращения, а также действующие силы приведены на рис. 3–5.

Преобладающими являются центробежная и подъемная силы, направленные к стенке. Поэтому одиночная частица движется по винтовой траектории в контакте с проницаемой поверхностью. Возникающая сила трения (рис. 4) создает вращательное движение, которое, в свою очередь, обуславливает возникновение одной из составляющих подъемной силы – силы Магнуса.

Если скорость частицы меньше скорости обтекаемого ее газа, то сила Магнуса направлена к стенке. Сравнение рассчитанной угловой скорости с величиной $\omega = V/a$ показывает, что отклонение составляет не более 5% (рис. 5).

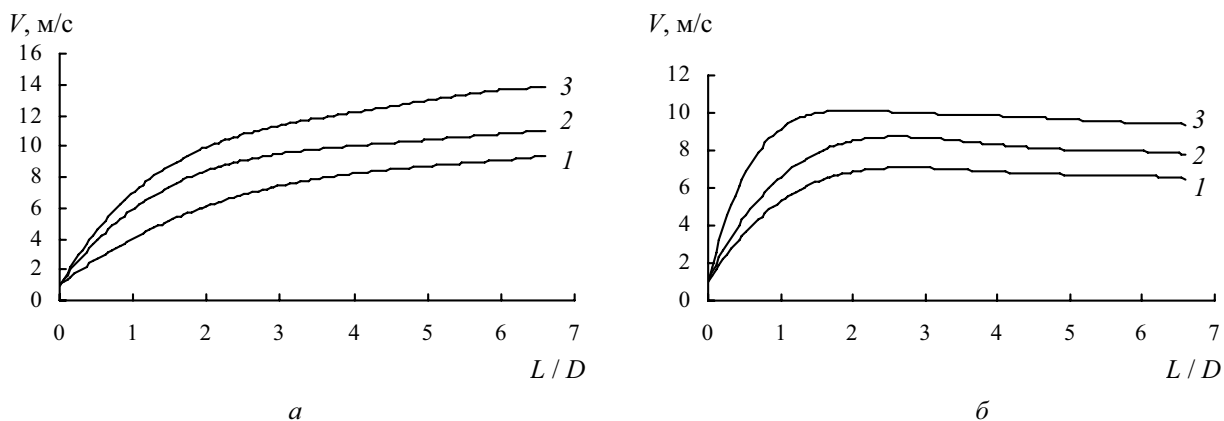


Рис. 3. Изменение скорости частицы по длине элемента:
a – осевые составляющие; *б* – касательные составляющие;
 $\bar{W}_z = 20$ м/с; $\rho_a = 950$ кг/м³; $D = 0,15$ м; $\beta = 35^\circ$;
 1 – $a = 1$ мм; 2 – $a = 2$ мм; 3 – $a = 3$ мм

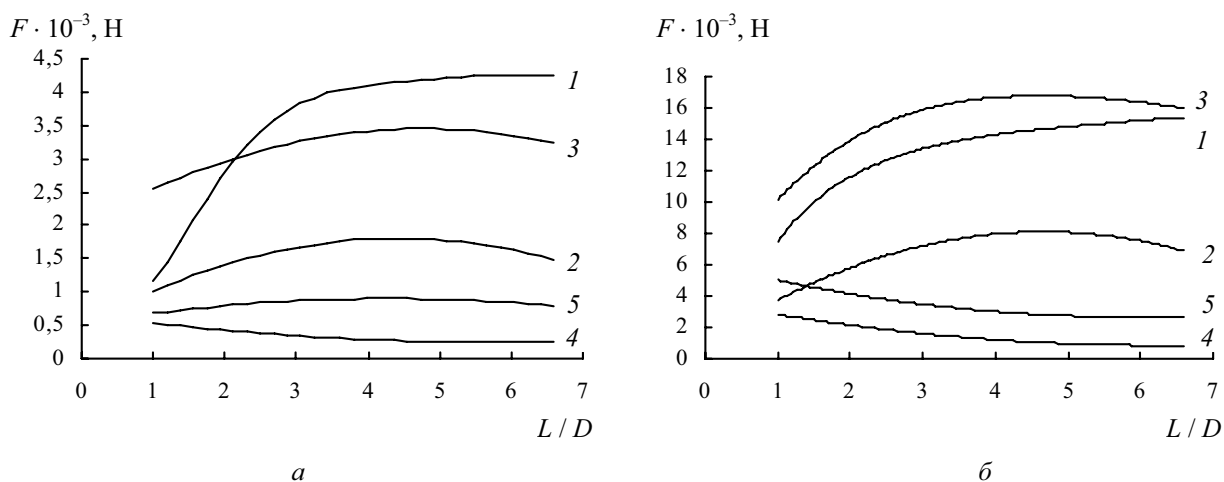


Рис. 4. Изменение по длине фильтра сил воздействия на твердую фазу:
a – диаметр частицы $a = 2$ мм; *б* – диаметр частицы $a = 4$ мм;
 $\bar{W}_z = 20$ м/с; $D = 0,15$ м; $\beta = 35^\circ$;
 1 – подъемная сила; 2 – сила трения; 3 – центробежная сила;
 4, 5 – осевая и касательная составляющие силы гидродинамического воздействия

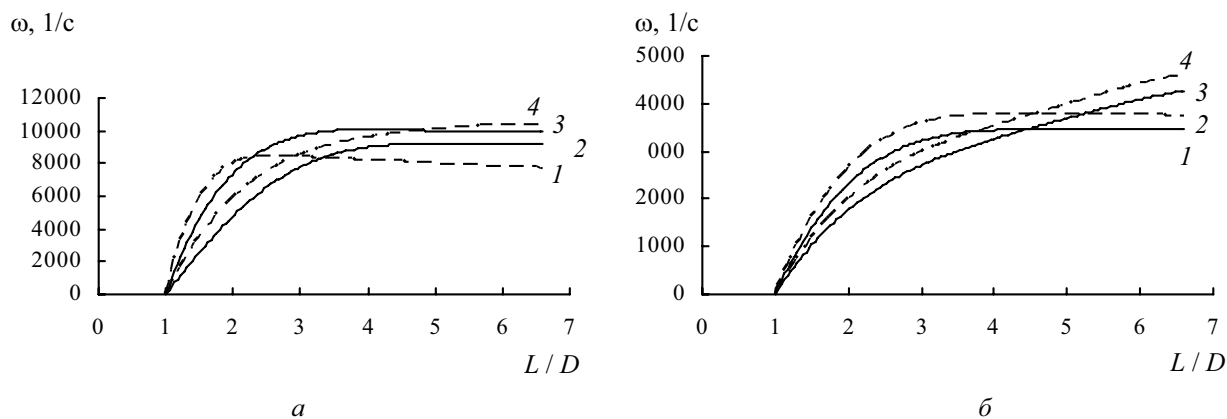


Рис. 5. Изменение угловой скорости вращения частицы по длине элемента:
a – частица полистирола с $\rho_a = 1150$ кг/м³ и $a = 2$ мм;
б – частица полистирола с $\rho_a = 1150$ кг/м³ и $a = 4$ мм;
 $\bar{W}_z = 20$ м/с; $D = 0,15$ м; $\beta = 35^\circ$;
 1 – касательная составляющая (расчетная); 2 – касательная составляющая ($\omega = V/a$);
 3 – осевая составляющая (расчетная); 4 – осевая составляющая ($\omega = V/a$)

Выводы. Составлена математическая модель и выполнен расчет движения твердых частиц под воздействием закрученного газового потока в цилиндрическом элементе. Исследована гидродинамика газового потока и рассмотрены действующие на твердую частицу силы, как в основном потоке, так и при контакте с цилиндрической поверхностью.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования процессов разделения двухфазных потоков в вихревых аппаратах. Вращение частиц является одной из причин их эффективного обезвоживания. Влага удерживается на поверхности силами молекулярного воздействия, которая проявляется в поверхностном натяжении. Вращение частицы создает центробежную силу в поверхностной жидкости, что приводит к интенсивной потере частицами поверхностной влаги.

Литература

1. Нигматуллин, Р. И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. / Р. И. Нигматуллин. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1. – 464 с.
2. Нигматуллин, Р. И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. / Р. И. Нигматуллин. – М.: Наука, 1987. – Ч. 2. – 360 с.
3. Кутепов, А. М. Вихревые процессы для модификации дисперсных систем / А. М. Кутепов, А. С. Латкин. – М.: Наука, 1992. – 250 с.
4. Гупта, А. Закрученные потоки / А. Гупта, Д. Лилли, Н. Сайред. – М.: Мир, 1988. – 588 с.
5. Соу, С. Гидродинамика многофазных систем / С. Соу. – М.: Мир, 1971. – 536 с.
6. Лойтянский, Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / Л. Г. Лойтянский. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
7. Гольдштик, М. А. Вихревые потоки / М. А. Гольдштик. – Новосибирск: Наука, 1981. – 366 с.
8. Марков, В. А. Исследование оттока жидкости через отверстия прямоточно-центробежного элемента / В. А. Марков, А. М. Волк, А. И. Ершов // Инженерно-физический журнал. – 1991. – Т. 61, № 1. – С. 82–87.
9. Щукин, В. К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил / В. К. Щукин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1980. – 240 с.
10. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
11. Медников, Е. М. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей / Е. М. Медников. – М.: Наука, 1981. – 176 с.