

А. И. ТАЙНОВ
доцент кандидат техн. наук

ТРЕНИЕ В ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ПАРАХ

Расчет трения в поступательных парах производится обычно по аналитическим формулам, которые, вообще говоря, не так сложны, а потому производить по ним расчет не представляет особого труда. Однако эти формулы, удовлетворяющие разным условиям работы поступательных пар, редко помещаются в справочники. Не всегда их можно найти и в справочниках, посвященных специальным вопросам механики.

Поэтому практически более удобно пользоваться графическими методами расчета трения в таких парах, тем более, что эти методы являются простыми и наглядными. Ниже приводятся приемы решения подобных задач на основе построения планов сил.

1. ТРЕНИЕ В ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ

Пусть тело A (рис. 1), имеющее постоянную вертикальную нагрузку Q , под действием внешней силы P , приложенной под некоторым углом β , движется по плоскости с постоянной скоростью v . Касательной реакцией здесь является сила трения F , пропорциональная коэффициенту трения f или тангенсу угла трения φ .

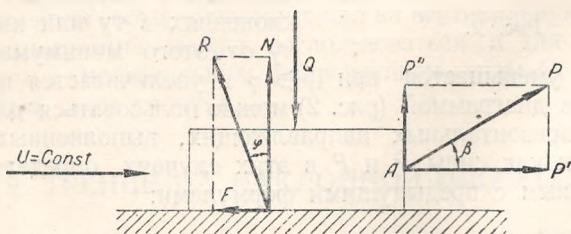


Рис. 1.

Движущая сила P в этом случае будет равна:

$$P = Q \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi - \beta)} \quad (1)$$

и сила трения:

$$F = f(Q - P \sin \beta). \quad (2)$$

В общем случае задача решается графически следующим образом.

Проводим прямоугольную систему координат (рис. 2). По оси y откладываем отрезок oa , равный по величине силе Q в масштабе μ_p . Из точки a проводим прямую ab под углом φ к оси ординат. После этого строим план сил, пользуясь для этого векторным уравнением:

$$\vec{Q} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = 0, \quad (3)$$

где N — нормальная реакция.

Сила Q , направленная вниз, уже нами проведена. Из конца o этой силы проводим прямую под углом β к оси абсцисс до пересечения с наклонной ab в точке c . Вектор oc будет изображать силу P в том же масштабе. Далее, из точки c опускаем перпендикуляр на вертикальную ось. Тогда отрезок cd будет изображать силу F , отрезок da — нормальную реакцию N , а отрезок ca — полную реакцию R . Из построения видно, что движущая сила P будет иметь минимальное значение при $\beta = \varphi$. В этом случае угол β носит название наивыгоднейшего угла тяги.

Из диаграммы также видно, что сила P возрастает при отклонениях в ту или иную сторону от этого минимума, а сила

трения F уменьшается при $\beta > \varphi$ и увеличивается при $\beta < \varphi$.

Этой же диаграммой (рис. 2) можно пользоваться для расчета трения в горизонтальных направляющих, выполненных в виде желоба, так как силы P и F в этих случаях определяются по тождественным с предыдущими формулами:

$$P = Q \frac{\sin \varphi'}{\cos(\varphi' - \beta)} \quad (4)$$

и

$$F = f' (Q - P \sin \beta), \quad (5)$$

где f' — приведенный коэффициент трения;
 φ' — приведенный угол трения.

Причем в случае клиновидных направляющих (рис. 3)

$$f' = \operatorname{tg} \varphi' = \frac{f}{\sin \delta}, \quad (6)$$

где 2δ — угол заострения клиновидного желоба.

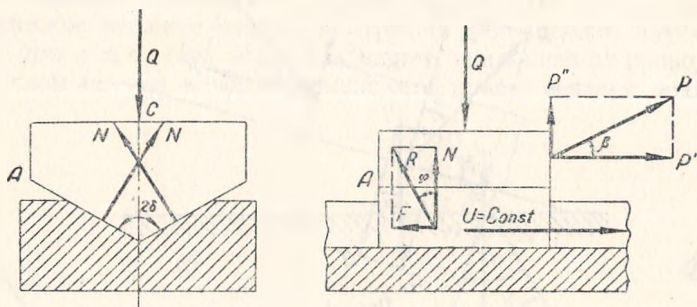


Рис. 3.

И в случае направляющих, выполненных в виде цилиндрического желоба,

а) для новых

$$f' = \operatorname{tg} \varphi' = f \frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0}; \quad (7)$$

б) для приработавшихся

$$f' = \operatorname{tg} \varphi' = f \frac{2 \sin \alpha_0}{\alpha_0 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0}, \quad (8)$$

где $2\alpha_0$ — угол обхвата цилиндрического желоба.

План сил в этих случаях строится так же, как и в предыдущем. Только отрезки da и ca будут представлять в этих случаях сумму проекций соответствующих сил на вертикальную плоскость.

Этой диаграммой можно воспользоваться и для построения планов сил с произвольным направлением силы Q , приняв за начало этой силы точку a .

2. ТРЕНИЕ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

На наклонной плоскости, как известно, возможно как поднятие, так и опускание груза.

В случае подъема груза (рис. 4) расчетные уравнения на трение имеют вид:

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\varphi - \beta)} \quad (9)$$

и

$$F = f(Q \cos \alpha - P \sin \beta), \quad (10)$$

где α — угол наклона плоскости.

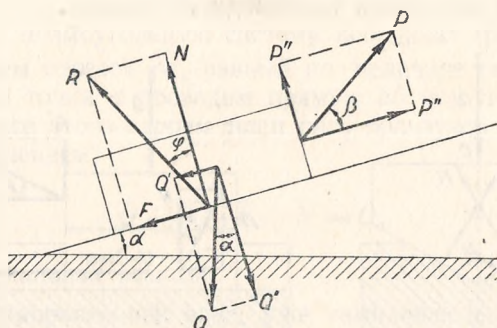


Рис. 4.

В этом случае из точки a , лежащей на оси ординат (рис. 5), проводим сначала наклонную ae под углом α к вертикали, а затем — наклонную ab под углом $(\alpha + \varphi)$ к этой же вертикали. Проводим также из точки o две наклонные под углом α и $(\alpha + \beta)$ к горизонтальной оси, после чего строим план сил, исходя из того же векторного уравнения:

$$\bar{Q} + \bar{P} + \bar{F} + \bar{N} = 0.$$

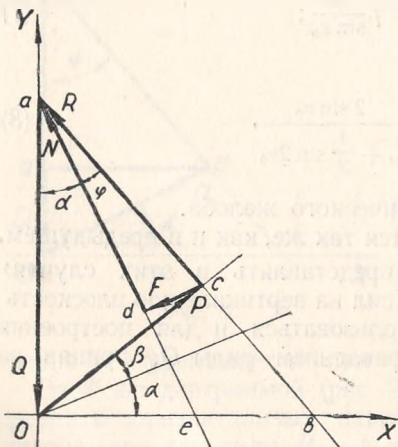


Рис. 5.

Отрезки \overline{ao} и \overline{oc} на плане будут представлять силы Q и P . Далее из точки c опускаем перпендикуляр на наклонную прямую ae . В результате чего получаем отрезки \overline{cd} и \overline{da} , определяющие соответственно силы F и N . Полная реакция R и в этом случае определится отрезком \overline{ca} .

Приведенная диаграмма также позволяет производить соответствующий анализ изменения сил P , F и N в зависимости от выбора угла β . Так, например, движущая сила P будет иметь

минимальное значение, и в этом случае при $\beta = \varphi$.

При опускании груза по наклонной плоскости расчетные формулы на трение принимают вид:

$$P = Q \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\varphi + \beta)} \quad (11)$$

и

$$F = f(Q \cos \alpha - P \sin \beta). \quad (12)$$

Здесь возможны два характерных случая соотношения между углом наклона плоскости и углом трения. На рис. 6, а дано графическое решение задачи на трение для случая опускания груза при $\varphi < \alpha$. При этом, как видим, наклонная ab проводится под углом $(\alpha - \varphi)$ к вертикальной оси; конец вектора внешней

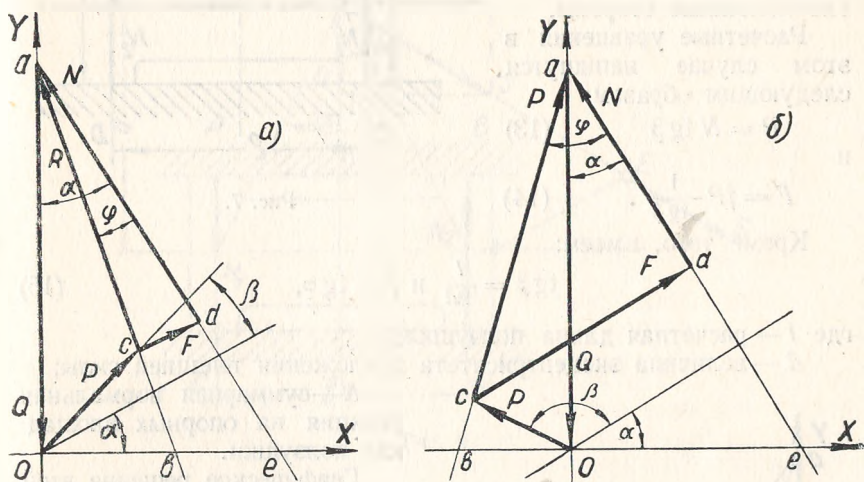


Рис. 6.

силы P лежит на этой прямой, а конец вектора силы трения F — на прямой ae . Направление силы P в этом случае будет противоположно направлению груза, т. е. эта сила при этих условиях является тормозящим усилием, не позволяющим грузу двигаться ускоренно. На диаграмме построены также отрезки \overline{da} и \overline{ca} , определяющие величины нормальной и полной реакций.

Графическое решение этой задачи для условия $\varphi > \alpha$ показано на рис. 6, б. Концы векторов сил P и F здесь также лежат соответственно на прямых ab и ae . Внешняя сила P в этом случае способствует движению груза вниз по наклонной плоскости. Величины сил нормальной и полной реакций также находятся по соответствующим отрезкам.

3. ТРЕНИЕ В ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ ПАРЕ ПРИ ЭКСЦЕНТРИЧНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

На рис. 7 показана поступательная пара с ползушкой конечных размеров. Ползушка находится в состоянии движения с постоянной скоростью под действием внешней силы P , приложенной к ней эксцентрично. При таком приложении внешней силы на опорных площадках A и D этой ползушки возникнут нормальные реакции N_1 и N_2 , равные по величине и направленные в противоположные стороны.

Расчетные уравнения в этом случае напишутся, следующим образом:

$$P = N \operatorname{tg} \beta \quad (13)$$

и

$$F = fP \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \quad (14)$$

Кроме того, имеем:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{l}{2d} \text{ и } f = \operatorname{tg} \varphi, \quad (15)$$

где l — расчетная длина ползушки;

d — величина эксцентриситета приложения внешней силы;

N — суммарная нормальная реакция на опорных площадках ползушки.

Графическое решение этой задачи приведено на рис. 8. Здесь по оси x в соответствующем масштабе отложена сила P . Из точки c , определяющей конец вектора силы P , проведена прямая ac под углом β к оси y . Затем из точки a проведена другая прямая ab под углом φ к той же оси. Отрезок ob при таком построении определяет величину силы трения F , а отрезок oa — суммарную величину нормальных реакций, приходящих на опорные площадки ползушки.

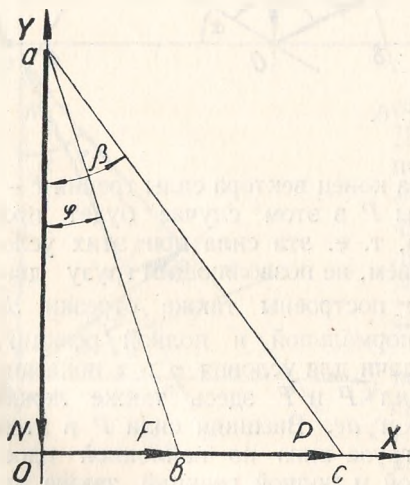


Рис. 8.

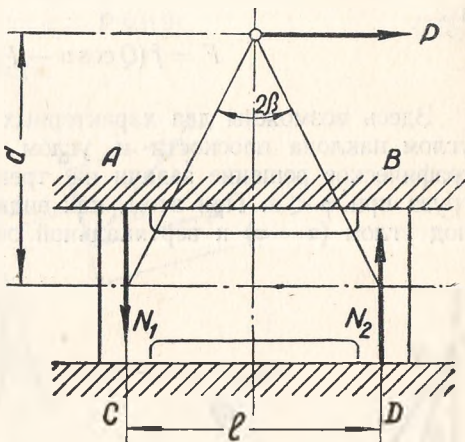


Рис. 7.

Из диаграммы видно, что движение ползушки в этом случае возможно только при условии $\varphi \leq \beta$, когда $P \gg F$. В противном случае происходит заклинивание ползушки. При $P > F$ разность между этими силами затрачивается либо на преодоление сил инерции, либо на выполнение дополнительной полезной работы.

4. ТРЕНИЕ В ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ ПАРЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

Поступательная пара с произвольным приложением внешней силы S дана на рис. 9. Для удобства решения задачи перенесим эту силу из точки E в точку H , находящуюся на пересечении

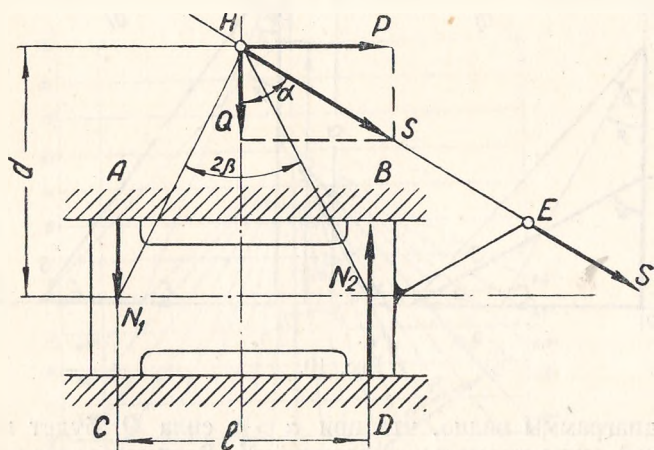


Рис. 9.

чения вертикальной оси ползушки с линией ее действия. Затем разложим эту силу на составляющие нормальную Q и касательную P . В этом случае, очевидно, они соответственно равны:

$$P = S \cdot \sin \alpha \text{ и } Q = S \cdot \cos \alpha. \quad (16)$$

Действие силы P в этом случае равнозначно действию эксцентрично приложенной силы из предыдущего примера. Поэтому расчетные уравнения на трение от силы P в этом случае будут те же, что и в предыдущем случае:

$$P = N \operatorname{tg} \beta; \quad F = fP \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \text{ и } \operatorname{tg} \beta = \frac{l}{2d}.$$

Графическое решение этой задачи показано на рис. 10, a . Здесь из произвольной точки a , лежащей на оси y , проведены две прямые соответственно под углами φ и β к вертикали. Пересечение этих прямых с осью x дают точки b и c . Затем

проведена третья прямая под углом α к той же вертикали, проходящая через точку c . Полученный таким образом отрезок dc и определяет собой величину внешней силы P в масштабе

$$P_p = \frac{P}{dc}.$$

По этому масштабу сил можно определить величины всех остальных сил по соответствующим отрезкам, полученным на диаграмме.

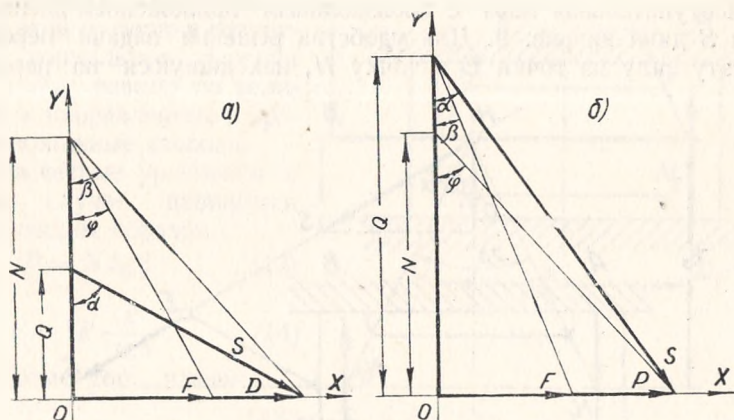


Рис. 10

Из диаграммы видно, что при $\alpha > \beta$ сила Q будет меньше суммарной силы нормальных реакций N . В этом случае влияние силы Q на ползушку ограничивается перераспределением нормальных реакций на опорных площадках A и D этой ползушки.

При условии $\alpha < \beta$ нормальные реакции возникнут на площадках C и D и общая суммарная нормальная реакция будет равна Q . Поэтому для определения величины силы трения в последнем случае нужно провести прямую под углом φ не через точку a , а через точку d . Построение этой диаграммы показано на рис. 10, б.

Из приведенного анализа видно, что при условии $\alpha > \beta$ для перемещения ползушки достаточно соблюдения условия $\varphi \geq \beta$, так как в этом случае движущая сила P будет всегда больше силы трения F . В противном случае происходит заклинивание ползушки в направляющих.

При условии $\alpha < \beta$ также возможно заклинивание ползушки. В этом случае, чтобы заклинивание не произошло, очевидно, необходимо соблюдение условия $\varphi < \alpha$. Тогда касательная составляющая внешней силы S сила P будет всегда меньше силы трения F , и ползушка будет работать нормально.

Избыток движущей силы над силой трения в обоих этих случаях будет расходоваться на выполнение дополнительной работы.

5. НОМОГРАММА ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ТРЕНИЕ В ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ПАРАХ

Анализируя приведенные здесь диаграммы графического решения задач на трение для различных случаев приложения силы, можно заметить, что эти диаграммы являются однотипными. Поэтому возможно их обобщение. На рис. 11 приведена номо-

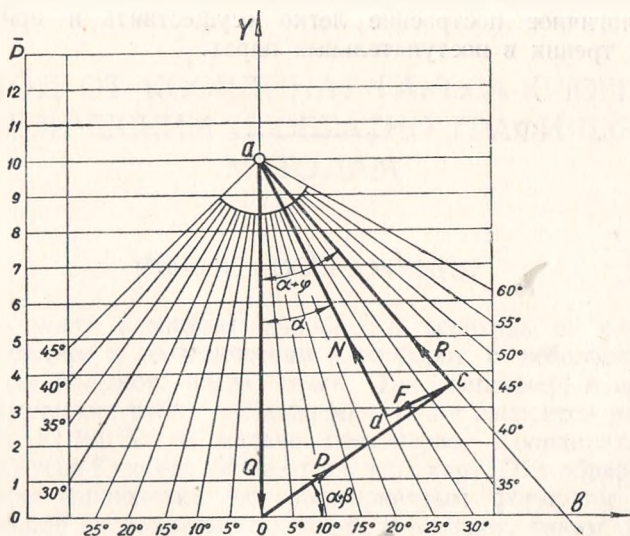


Рис. 11.

грамма очень простая по построению, но достаточная для решения всех подобных задач. Номограмма состоит из прямоугольной системы координат, в которой из произвольной точки a , лежащей на оси y , проведены расходящиеся лучи. Деление на номограмме можно дать как градусное, так и в тангенсах угла. Этого построения вполне достаточно для решения всех задач на трение в поступательных парах. Для этого нужно иметь лишь линейку и треугольник. При достаточной дробности делений на номограмме можно получить результаты, удовлетворяющие потребностям практической точности.

Пусть, например, дан случай подъема груза по наклонной плоскости. Вес груза $Q = 100$ кг, угол наклона плоскости $\alpha = 25^\circ$, угол трения $\varphi = 15^\circ$, движущая сила P приложена под

углом $\beta = 10^\circ$ к плоскости. Требуется определить величины сил: P , F , N и R .

Для решения задачи на номограмме находим лучи, соответствующие углам α и $(\alpha + \varphi)$. Пересечение этих лучей с осью x дают точки b и e . Далее, через точку a проводим прямую, перпендикулярную лучу, определяемому углом $(\alpha + \beta)$. Пересечение этой прямой с линией ab дает точку c . Затем из точки c опустим перпендикуляр на прямую ae и находим на пересечении этих линий точку d . Соединив полученные точки жирными линиями, как это показано на рис. 11, получим план сил.

Масштаб плана сил соответственно будет $\mu_p = \frac{Q}{ao}$, пользуясь ко-

торым определяем модули векторов всех искомым сил.

Аналогичное построение легко осуществить и при других случаях трения в поступательных парах.