

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПАДАЮЩЕГО ДЕРЕВА С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ И ЛЕСНОЙ МАШИНОЙ

A rod-chain model was used to study the dynamics of a tree stem. A numerical method is developed for simulating the mechanical behavior of a flexible tree stem. The motion of the flexible tree stem is determined under the resistance forces exerting on the tree crown. Flexible tree stem interaction with an elastic foundation and a forest machine is investigated as well. The numerical model is applied for calculating the impulse of force on the elastic foundation and the forest machine.

**Введение.** Исследование влияния падающего дерева на основание и на лесную машину имеет важное практическое значение. Решение задачи усложняется тем фактом, что ствол дерева в процессе взаимодействия деформируется, поэтому необходимо учитывать поперечные изгибные колебания ствола. Результаты этого исследования позволят выяснить, как влияет гибкость ствола дерева на характер его взаимодействия с упругим основанием и лесной машиной. В настоящей статье для этого используется модель дерева в виде цепочки жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами (рис. 2) [1, 2]. Данная модель, называемая «rod-chain model», широко используется для изучения динамики длинных гибких нитей в потоке жидкости (см. [3] и цитируемую там литературу).

**1. Уравнения движения.** В качестве обобщенных координат выберем углы поворота стержней  $\varphi_i$ , отсчитываемые от вертикали (рис. 2). Принимаем, что движение происходит в одной плоскости. Координаты центров тяжести стержней находим из выражений:

$$\begin{cases} x_{Ck} = \sum_{i=1}^{k-1} l_i \sin \varphi_i + \frac{1}{2} l_k \sin \varphi_k, \\ z_{Ck} = \sum_{i=1}^{k-1} l_i \cos \varphi_i + \frac{1}{2} l_k \cos \varphi_k, \end{cases} \quad (1)$$

где  $l_i$  – длина  $i$ -го стержня.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы находится по формуле

$$T = \sum_{k=1}^n \left( \frac{m_k v_{Ck}^2}{2} + \frac{J_k \dot{\varphi}_k^2}{2} \right), \quad (2)$$

где  $m_k$  – масса  $k$ -го стержня,  $v_{Ck}^2 = \dot{x}_{Ck}^2 + \dot{z}_{Ck}^2$  – скорость центра масс  $k$ -го стержня;  $J_k$  – динамический центральный осевой момент инерции  $k$ -го стержня, для цилиндра  $J_k = m_k (l_k^2/12 + d_k^2/16)$ ,  $d_k$  – диаметр  $k$ -го стержня.

Потенциальная энергия системы состоит из энергии в поле сил тяжести и энергии упругих связей:

$$\Pi = \sum_{k=2}^n \frac{c_k (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2}{2} + \sum_{k=1}^n g m_k z_k, \quad (3)$$

где  $c_k$  – жесткость упругих связей.

Жесткость упругих связей вычисляется по формуле [2]

$$c_k = \frac{E J_{Ak}}{\Delta l}. \quad (4)$$

Примем, что сила сопротивления воздуха, действующая на каждый элемент, пропорциональна первой степени скорости  $\mathbf{F}_k = -\beta \mathbf{v}_{Ck}$  его центра масс. При линейной зависимости силы сопротивления от скорости для вычисления обобщенной силы сопротивления удобно ввести диссипативную функцию Релея  $\Phi$ :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \beta_k \frac{v_k^2}{2}.$$

Тогда обобщенная сила сопротивления

$$Q_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k}.$$

Коэффициенты  $\beta_k$  примем отличными от нуля для нескольких последних стержней модели в соответствии с расположением кроны дерева и будем считать, что их значения распределены по треугольному закону со значением  $\beta = 70 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$  у основания треугольника и нулевым значением на верхнем конце ствола.

Дифференциальные уравнения движения модели получим, составив уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, линейную по угловым ускорениям элементов, но сильно нелинейную по самим обобщенным координатам. Систему ввиду ее громоздкости не выписываем.

**2. Интегрирование уравнений движения.** Полученные уравнения решены численно, с помощью пакета *Maple 11*, при заданных начальных углах отклонения стержней от вертикали и их начальных скоростях. С учетом начальных условий получена система уравнений, линейных относительно старшей производной  $\ddot{\varphi}_i$ . Угловые ускорения из системы находились при помощи метода Ньютона – Рафсона по итерационной формуле [4].

Численное интегрирование уравнений движения производилось с помощью модификации базовой схемы Верле, так называемой полшаговой «*leap-frog*» схемы [5]:

$$\dot{\varphi}(t + \Delta t/2) = \dot{\varphi}(t - \Delta t/2) + \ddot{\varphi}(t)\Delta t; \quad (6)$$

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \dot{\varphi}(t + \Delta t/2)\Delta t, \quad (7)$$

где  $\varphi$  – вектор углов поворота;  $\dot{\varphi}$  – вектор угловых скоростей;  $\ddot{\varphi}$  – вектор угловых ускорений.

Текущие скорости вычислялись по формуле

$$\dot{\varphi}(t) = 0.5(\dot{\varphi}(t + \Delta t/2) + \dot{\varphi}(t - \Delta t/2)).$$

Примем, что диаметр ствола изменяется по линейному закону [6]

$$d = d_0 - qs, \quad (8)$$

где  $d_0$  – диаметр ствола у основания;  $q$  – коэффициент сбега;  $s$  – дуговая координата, отсчитываемая от основания ствола.

Определим коэффициент сбега следующим образом. Пускай на вершине, при  $s = l$ , диаметр ствола  $d = d_B$ . Тогда коэффициент сбега

$$q = (d_0 - d_B)/l. \quad (9)$$

Подставляя выражение (8) в формулу для осевого момента инерции сечения (сечение ствола считаем круглым) и учитывая выражение для коэффициента сбега (9) и выражение для длины звеньев  $\Delta l = l/n$ , получим выражение для жесткости упругих связей (4):

$$c_k = \frac{EJ_{A0}}{\Delta l} \left( 1 - \left( 1 - \frac{d_B}{d_0} \right) \frac{k}{n} \right)^4, \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $J_{A0}$  – осевой момент инерции сечения у основания ствола.

Проведя аналогичные рассуждения, найдем выражение для массы звеньев модели:

$$m_{k+1} = m_1 \left( 1 - \left( 1 - \frac{d_B}{d_0} \right) \frac{k}{n} \right)^2, \quad k = 0, \dots, n,$$

где  $m_1$  – масса первого от основания цилиндра.

Массу первого от основания цилиндра найдем из условия

$$m = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_1 \left( 1 - \left( 1 - \frac{d_B}{d_0} \right) \frac{k}{n} \right)^2.$$

$$\text{Тогда } m_1 = m / \sum_{k=1}^n \left( 1 - \left( 1 - \frac{d_B}{d_0} \right) \frac{k}{n} \right)^2.$$

Шаг по времени принимался: при свободном падении  $\Delta t = 0,001$  с, при взаимодействии с упругим основанием и машиной  $\Delta t = 0,0001$  с. Параметры ствола дерева [6]: длина –  $l = 19$  м, диамет-

ры:  $d_0 = 24$  см,  $d_B = 10$  см, модуль упругости древесины  $E = 1,2 \cdot 10^{10}$  Па, плотность древесины  $\rho = 780$  кг/м<sup>3</sup>, масса вычислялась исходя из объема ствола и плотности древесины. В приведенных ниже расчетах ствол дерева разбивался на 20 частей. Сохранение полной энергии системы, при отсутствии сил сопротивления, гарантировалось устойчивостью работы алгоритма.

**3. Свободное падение дерева.** Интегрирование дифференциальных уравнений движения проводилось при следующих начальных условиях: а) первоначальная осевая линия задана прямой с начальным углом наклона  $\varphi_0 = 10^\circ$ ; б) начальная угловая скорость  $\omega_0 = 0,1$  рад/с.

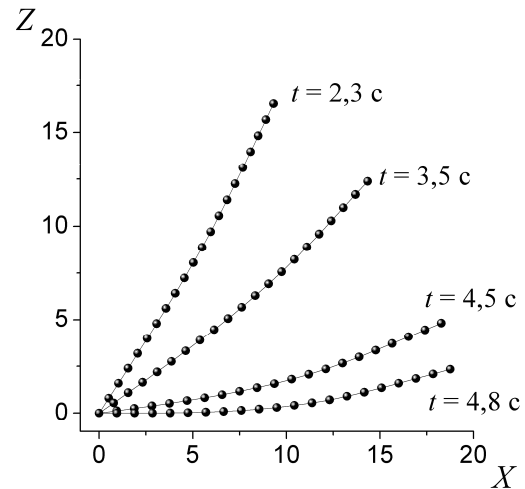


Рис. 1. Упругая линия ствола дерева при падении в различные моменты времени

Формы осевой линии ствола дерева при падении в различные моменты времени показаны на рис. 1.

Следует отметить, что при отсутствии сил сопротивления жесткость ствола не позволяет ему деформироваться, и он движется практически как абсолютно твердое тело.

**4. Взаимодействие падающего дерева с упругим основанием.** Примем, что ствол дерева падает на упругое основание, описываемое линейной моделью Винклера без демпфирования, в которой деформации поверхности пропорциональны нагрузке и полностью исчезают при ее снятии (рис. 2) [7].

При касании поверхности основания ( $z_{Ck} < 0$ ) в выражение для потенциальной энергии (3) добавляется дополнительное слагаемое, соответствующее потенциальной энергии деформации упругого основания. Потенциальная энергия принимает вид

$$\Pi^* = \Pi + \sum_{k=1}^n \frac{c_{оснк} \Delta z_{Ck}^2}{2}, \quad (10)$$

где  $c_{оснк}$  – жесткости пружин упругого основания.

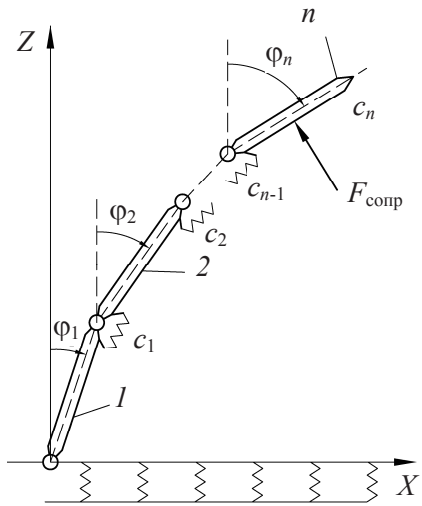


Рис. 2. Модель дерева и упругое основание модели Винклера

В расчетах принято, что стержни модели соприкасаются с пружинами своими центрами масс. Коэффициенты жесткости пружин основания приняты равными  $c_{оснk} = c_{осн} = 6,5 \cdot 10^5$  Н/м [7].

Формы осевой линии ствола дерева в процессе взаимодействия с упругим основанием представлены на рис. 3, из которого видно, что сначала, с увеличением номера соприкасающегося стержня, деформации пружин основания нарастают, затем в средней части ствола уменьшаются практически до нуля, а затем резко увеличиваются при соприкосновении с основанием последних стержней модели. Максимальная деформация пружин основания вызывается последним стержнем модели ствола и составляет  $\Delta z_c = 0,22$  м. В реальном случае воздействие конца ствола дерева на упругое основание смягчает крона дерева. Это легко учесть, изменяя длину пружин упругого основания в месте соприкосновения кроны дерева.

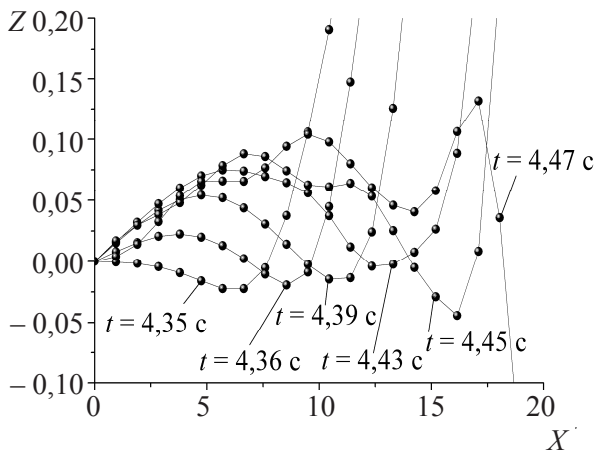


Рис. 3. Упругая линия ствола дерева при взаимодействии с основанием в различные моменты времени.

Импульс, произведенный стволом дерева на основание, можно вычислить по формуле

$$S = \sum_j \sum_k c_{оснk} \Delta z_{jk} \Delta t, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, t_{вз} / \Delta t,$$

где  $\Delta z_{nj}$  – деформации основания;  $t_{вз}$  – продолжительность взаимодействия.

В результате расчетов получили, для жесткого ствола дерева  $S = 10\,720$  Нс, для гибкого  $S = 8\,722$  Нс. Таким образом, гибкость ствола оказывает значительное влияние на взаимодействие ствола с упругим основанием и приводит к уменьшению импульса, произведенного стволом дерева на упругое основание почти на 20%. Полагая в формуле (10) все коэффициенты  $c_{оснk}$ , кроме одного, равными нулю можно получить модель для падения ствола на упругую невесомую опору.

**4. Взаимодействие падающего дерева лесной машиной.** Рассмотрим взаимодействие падающего дерева с лесной машиной (рис. 4).

При касании каким-либо стержнем модели ствола машины в точке  $k$ , в выражение для кинетической энергии (2) добавляется дополнительное слагаемое, соответствующее кинетической энергии машины:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{x}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\phi}^2,$$

где  $M$  и  $J_c$  – масса и поперечный центральный момент инерции поддрессоренной части машины, где  $x_k$  и  $z_k$  – горизонтальная и вертикальная координаты опоры  $k$ ;  $x_c$  и  $z_c$  горизонтальное и вертикальное смещение центра тяжести поддрессоренной части машины,  $\phi_m$  – угол поворота поддрессоренной части машины вокруг ее центра тяжести  $C$ .

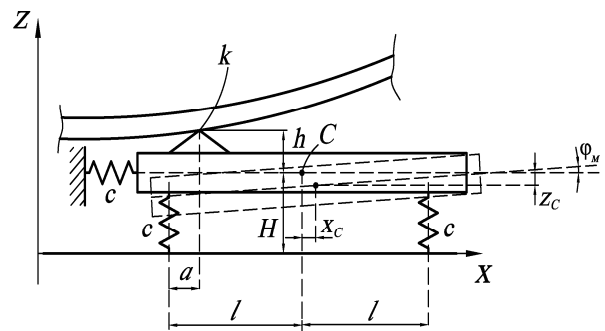


Рис. 4. Модель лесной машины

Выразим смещения центра масс машины через координаты точки  $k$ , которая совпадает с центром тяжести какого-либо стержня модели ствола:

$$\begin{aligned} x_c &= x_k + (l - a) \cos \phi_m - x_{c0}; \\ z_c &= z_k + (l - a) \sin \phi_m - H, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $x_{C0}$  – горизонтальная координата центра тяжести машины в момент соприкосновения ствола дерева с машиной.

Уравнения (11) предполагают, что относительное движение точек соприкосновения ствола дерева и машины отсутствует. В результате такого предположения в уравнениях движения появляется только одна новая обобщенная координата  $\varphi_M$ .

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии машины в поле сил тяжести (нулевой уровень потенциальной энергии совпадает с опорной поверхностью) и потенциальной энергии деформированных пружин подвески:

$$\begin{aligned} \Pi = & -Mgz_C + \frac{1}{2}c_{\text{вер}}(z_C + l\varphi_M + f_{\text{ст}})^2 - \\ & - \frac{1}{2}c_{\text{вер}}f_{\text{ст}}^2 + \frac{1}{2}c_{\text{вер}}(z_C - l\varphi_M + f_{\text{ст}})^2 - \\ & - \frac{1}{2}c_{\text{вер}}f_{\text{ст}}^2 + \frac{1}{2}c_{\text{гор}}x_C^2, \end{aligned}$$

где  $c_{\text{вер}}$  и  $c_{\text{гор}}$  – вертикальная и горизонтальная приведенные жесткости пружин подвески.

Вычисляя и подставляя значение  $f_{\text{ст}}$  в выражение для потенциальной энергии, получаем:

$$\Pi = c_{\text{вер}}z_C^2 + c_{\text{вер}}l^2\varphi_M^2 + \frac{1}{2}c_{\text{гор}}x_C^2. \quad (12)$$

Выражение (12) в момент соприкосновения ствола дерева и машины добавляется в выражение для потенциальной энергии (3).

Предположим, что в результате удара скорость стержня, соприкнувшегося с машиной, уменьшилась до нуля, и рассмотрим дальнейшее движение механической системы, состоящей из ствола дерева и машины.

Формы ствола дерева во время взаимодействия с машиной для случая, когда ствол соприкасается в середине длины, то есть  $l_k/l = 0,5$ , представлены на рис. 5.

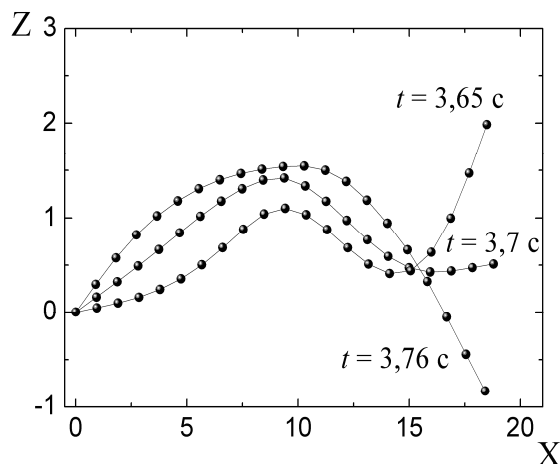


Рис. 5. Упругая линия ствола дерева при взаимодействии с машиной в различные моменты времени.

Для нахождения импульса, производимого стволом дерева на машину после процесса соударения, рассмотрим уравнения движения лесной машины. Сила упругости, действующая на машину со стороны горизонтальной пружины:

$$F_{\text{упр}}^{\text{гор}} = c_{\text{гор}}x_C.$$

Силы упругости, действующие на машину со стороны вертикальных пружин:

$$F_{\text{упр1}}^{\text{вер}} = c_{\text{вер}}(z_C + l\varphi_M + f_{\text{ст}}),$$

$$F_{\text{упр2}}^{\text{вер}} = c_{\text{вер}}(z_C - l\varphi_M + f_{\text{ст}}).$$

Уравнения движения центра масс машины:

$$M\ddot{x}_C = R_x - F_{\text{упр}}^{\text{гор}},$$

$$M\ddot{z}_C = R_z - Mg + F_{\text{упр1}}^{\text{вер}} + F_{\text{упр2}}^{\text{вер}},$$

где  $R_x$  и  $R_z$  – проекции силы взаимодействия машины со стволом дерева на оси координат.

Из уравнений движения центра масс машины находим  $R_x$  и  $R_z$  (рис. 6).

Проекция импульса на оси координат

$$S_x = \int_0^{t_{\text{вз}}} R_x dt, \quad S_z = \int_0^t R_z dt.$$

Модуль импульса  $S = \sqrt{S_x^2 + S_z^2}$ .

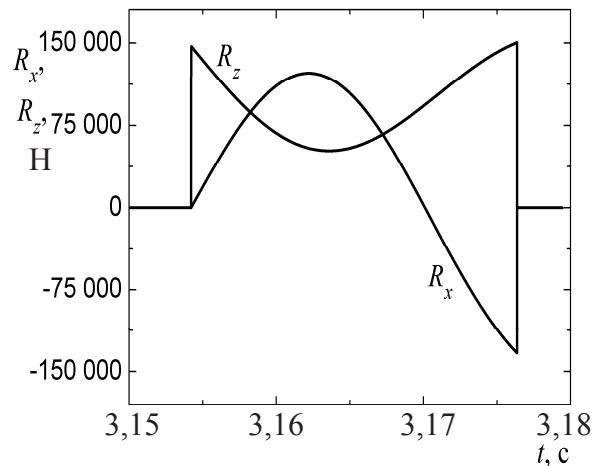


Рис. 6. Горизонтальная и вертикальная составляющие сил, действующих на машину

Значение импульса, произведенного стволом дерева на машину, изменяется в зависимости от номера стержня, которым заменяющая модель соприкасается с машиной. График импульсов для гибкого стержня для различных значений  $l_k/l$  представлен на рис. 7.

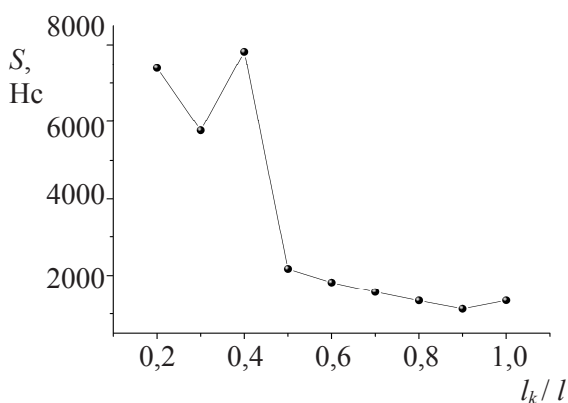


Рис 7. График импульсов, произведенных стволом дерева при соударении для различных значений  $l_k/l$

**Заключение.** Разработана методика интегрирования уравнений движения модели дерева, учитывающей гибкость ствола. В качестве примера рассмотрена динамика падения дерева с учетом сил сопротивления, линейных по скорости, действующих на его крону. Рассмотрено взаимодействие ствола дерева с упругим основанием. Показано, что импульс, произведенный стволом дерева на упругое основание, уменьшается, если учесть его гибкость. Рассмотрено воздействие ствола дерева на лесную машину в случае повала дерева путем опрокидывания его вокруг нижнего основания. Получены значения ударной силы, продолжительности удара и послеударного импульса для различных случаев повала дерева.

## Литература

1. Борисевич, С. А. Разработка многоступенчатой модели гибкого ствола дерева / С. А. Борисевич, В. Б. Немцов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2004. – Вып. XII. – С. 47–49.
2. Борисевич, С. А. Конечно-разностная схема для исследования падения ствола дерева / С. А. Борисевич // Труды БГТУ. Сер. II, Лесная и деревообаб. пром-сть. – 2008. – Вып. XVI. – С. 104–107.
3. Wang, Gang. Optimization of the rod chain model to simulate the motions of a long flexible fiber in simple shear flows / Gang Wang, Wei Yu, Chixing Zhou // European Journal of Mechanics B. – 2006. – Vol. 25, № 3. – P. 337–347.
4. Денис, Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. – М.: Мир, – 1988. – 440 с.
5. Allen, M. P. Computer Simulation of Liquids / M.P. Allen, D.J. Tildesley. – Oxford.: Clarendon press, 1999. – 385 p.
6. Коротаяев, Л. В. Параметры деревьев и хлыстов как объектов лесозаготовительного производства / Л. В. Коротаяев. – Л.: АЛТИ, 1982. – 80 с.
7. Черкасов, И. И. Механические свойства грунтов в дорожном строительстве / И. И. Черкасов. – М.: Транспорт, 1976. – 247 с.