

## КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ ВАЛОВ ОДНОСВЯЗНОГО И МНОГОСВЯЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Numerical studying problems of cylindric bar elastic torsion based on the boundary element method (BEM). Peculiarities of a stressed state of a cylindric bar with a multi-connected section are examined.

**Введение.** Концентрация напряжений – один из основных факторов, определяющих прочность и долговечность конструкции. Поэтому актуальны создание и дальнейшее расширение данных о коэффициентах концентрации напряжений в валах при кручении.

Основные уравнения задачи кручения призматического стержня произвольного поперечного сечения были получены методами теории упругости Б. Сен-Венаном. Впоследствии теория кручения была развита рядом авторов [1–5], которые предложили новые методы и идеи решения многообразных задач кручения, основанные на сложных способах получения численных решений.

Задача нестесненного кручения валов произвольного сечения решена методом граничных элементов (МГЭ) [6–8]. Достоинством МГЭ является снижение размерности задачи, что позволяет при численном решении выполнять дискретизацию не всей области, а только ее границы.

Обстоятельный обзор интегральных уравнений для решения задачи кручения Сен-Венана выполнил S. Christiansen [12]. В работе получен классификационный и систематический способ написания уравнений, позволяющий определить связь между различными уравнениями. Там же отмечается, что опубликовано очень мало результатов численного применения приведенных уравнений.

**1. Вывод интегрального уравнения задачи кручения, особенности многосвязных сечений.** Дифференциальные уравнения равновесия и совместности в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 2Gc, \quad (1)$$

где  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  – касательные напряжения, действующие в направлениях  $x$  и  $y$  в плоскости поперечного сечения;  $G$  – модуль сдвига материала стержня;  $c$  – угол закручивания на единицу длины стержня.

В комплексных переменных  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  два уравнения (1) могут быть заменены одним:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\tau_y + i\tau_x) = Gc. \quad (2)$$

Из (2) находим общее решение

$$\tau_y + i\tau_x = Gc\bar{z} + \varphi(z), \quad (3)$$

где  $\varphi(z)$  – произвольная аналитическая функция.

По интегральной формуле Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad (4)$$

где  $\Gamma$  – граница области;  $\varphi(t)$  – граничное значение  $\varphi(z)$ ;  $t = x + iy$  – координаты точек границы  $\Gamma$ ;  $dt = dx + idy = ie^{i\beta} ds$ ,  $ds$  – элемент длины,  $\beta$  – угол наклона внешней нормали в точке  $t$  к положительному направлению оси  $x$ .

Из (3) выразим  $\varphi(z)$  и подставим в (4):

$$\tau_y + i\tau_x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_y + i\tau_x - Gc(\bar{t} - \bar{z})}{t - z} dt. \quad (5)$$

Формула (5) выражает напряжения в области  $\Omega$  через напряжения на контуре  $\Gamma$ .

Выполним предельный переход от точки  $z$ , лежащей внутри области, к точке  $t_0$  контура (рис. 1). Для этого выделим элемент  $\Delta S$  граничной кривой, симметричный относительно  $t_0$ ,  $\rho_2 = \rho_1$ , достаточно малый, чтобы его можно было считать прямым, а функцию  $\varphi(t)$ , заданную на границе контура, постоянной.

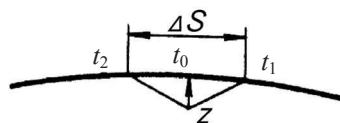


Рис. 1. Предельный переход от точки  $z$ , лежащей внутри контура, к точке  $t_0$  контура

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Delta S} \frac{\omega dt}{t - z} &= \omega_0 \lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Delta S} \frac{dt}{t - z} = \\ &= \omega_0 \lim_{z \rightarrow t_0} \ln \frac{t_2 - z}{t_1 - z} = \pi i \omega_0. \end{aligned} \quad (6)$$

После выполнения предельного перехода интеграл понимается в смысле главного значения

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Gamma} \frac{\omega dt}{t - z} = \pi i \omega_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega dt}{t - t_0}. \quad (7)$$

Применяя выражение (7) к интегралу (5), получим

$$\frac{1}{2}(\tau_y + i\tau_x)_{z=t_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_y + i\tau_x - Gc(\bar{t} - \bar{t}_0)}{t - t_0} dt. \quad (8)$$

Напряжение на контуре

$$\tau_y + i\tau_x = (\tau_s + i\tau_n)e^{-i\beta}; \quad \tau_n = 0, \quad (9)$$

где  $\beta$  – угол наклона внешней нормали в точке  $t$  к положительному направлению оси  $x$ ;  $\tau_s$ ,  $\tau_n$  – составляющие касательного напряжения вдоль и поперек внешней нормали к контуру.

Подставляя (9) в (8), получим

$$\tau_{s_0} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_s e^{-i(\beta-\beta_0)}}{t - t_0} dt = -Gc \frac{e^{i\beta_0}}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} dt, \quad (10)$$

где  $\tau_{s_0}$  – значение напряжения  $\tau_s$  в точке  $t_0$ ;  $\beta_0$  – угол наклона внешней нормали в точке  $t_0$  к положительному направлению оси  $x$  (рис. 2).

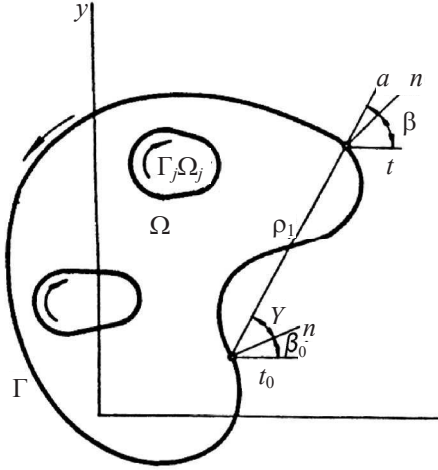


Рис. 2. Область  $\Omega$ , контур границы  $\Gamma$ , геометрические параметры, входящие в интегральное уравнение

С учетом  $t - t_0 = \rho e^{i(\beta_0 + \gamma)}$ ,  $dt = ie^{i\beta} ds$ , а также  $\beta_0 + \gamma = \beta + \alpha$  преобразуем (10) к виду

$$\tau_{s_0} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\gamma}}{\rho} \tau_s ds = -\frac{Gc}{\pi} \int_{\Gamma} e^{-i(\gamma + \alpha)} ds, \quad (11)$$

где  $\rho$  – радиус (исчисляется от точки  $t_0$  к текущей точке  $t$ );  $\gamma$  – угол между внешней нормалью в точке  $t_0$  и радиусом  $\rho$ ,  $\alpha$  – угол между внешней нормалью в текущей точке  $t$  и радиусом  $\rho$  (рис. 2).

Действительная часть последнего равенства и есть интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода для решения задачи кручения:

$$\tau_{s_0} = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos \gamma}{\rho} \tau_s ds = -\frac{Gc}{\pi} \int_{\Gamma} \cos(\gamma + \alpha) ds. \quad (12)$$

Введем величину крутящего момента

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} r^2 \tau_s ds - GcI_p, \quad (13)$$

где  $I_p$  – полярный момент инерции,  $r^2 = x^2 + y^2$ .

В стержнях многосвязного сечения при обходе внутренних контуров вводят условия однозначности осевых смещений по теореме Бредта о циркуляции касательного напряжения

$$\int_{\Gamma} \tau_s ds = -2Gc\Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где  $\Omega_j$  – площадь области, ограниченная контуром;  $n$  – количество контуров.

Для дальнейших выкладок вернемся к уравнению (12). Будем множить интегральное уравнение на  $ds_0$  и интегрировать по контуру. Воспользуемся вспомогательной формулой (15), которая получается путем геометрической интерпретации  $ds_0 \cos \gamma = \pm \rho d\alpha$ , где  $\alpha$  – полярный угол при точке  $t$ . Точка  $t$  в (15) является переменной, а при интегрировании по  $t_0$  считается неподвижной.

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos \gamma}{\rho}(t, t_0) ds_0 = \begin{cases} 0 \\ \pm \pi \\ 2\pi \end{cases}. \quad (15)$$

Нулевой результат соответствует положению точки  $t$  вне области, охваченной контуром,  $\pm\pi$  – если точка  $t$  принадлежит контуру, причем  $+\pi$  – для внутреннего контура, а  $-\pi$  – для наружного,  $2\pi$  – если точка  $t$  находится внутри наружного контура интегрирования.

В случае односвязного сечения интегрирование (12) по наружному контуру приводит к (14), то есть условие однозначности смещений вдоль оси стержня выполняется автоматически при решении интегрального уравнения.

В многосвязном случае интегрирование (12) по внутреннему контуру приводит к нулевому тождеству, что свидетельствует о наличии у интегрального уравнения (12) собственных функций.

Предложим следующее: при нулевой точке  $t_0$  на наружном контуре оставим интегральное уравнение в прежней форме (12), а при  $t_0$  на внутреннем контуре применим линейную комбинацию интегрального уравнения (12) и равенства (14):

$$\begin{aligned} & -\pi\tau_{s_0j} + \int_{\Gamma_j} \frac{\cos \gamma}{\rho} \tau_s ds + \frac{1}{\sqrt{\Omega_j}} \int_{\Gamma_j} \tau_s ds = \\ & = 2Gc \int_{\Gamma_j} \cos \gamma \cos \alpha - 2Gc \sqrt{\Omega_j}. \end{aligned} \quad (16)$$

Повторяя приведенные выкладки с использованием формулы (15), можно убедиться, что в случае многосвязного сечения интегральное уравнение (16) обеспечивает выполнение усло-

вий однозначности смещений вдоль оси стержня при обходе каждого контура и тем самым решает задачу.

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (16) в целом представляет собой бесконечную систему равенств с каждой точкой границы  $\Gamma$  в качестве нулевой. При численном решении, например, по квадратурной формуле Гаусса, интегралы заменяются суммами, и бесконечная система становится конечной. Дело сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений  $\tau_s$  в узловых точках.

На основе метода интегральных уравнений построена программа, предназначенная для решения задач кручения валов с поперечным сечением сложной конфигурации, часть которых и представлена ниже.

**2. Концентрация напряжений при кручении полых валов со шпоночной канавкой.** Паз под шпонку уменьшает сечение вала, что обычно компенсируется соответствующим увеличением его диаметра. Однако несущая способность вала со шпоночной канавкой снижается не только вследствие уменьшения сечения, но и из-за возникающих во внутренних углах шпоночных пазов концентрации напряжений.

Коэффициент концентрации напряжений при кручении определен как отношение максимального касательного напряжения в вале с концентратором к напряжению в гладком вале того же диаметра.

Особенно резко шпонки ослабляют полые валы, у которых отношение диаметра отверстия к диаметру вала больше 0,6.

В тяжело нагруженных соединениях шпонку иногда заменяют шипом, выполненным как одно целое с валом или ступицей. Такие конструкции являются по существу переходной ступенью к шлицевым соединениям.

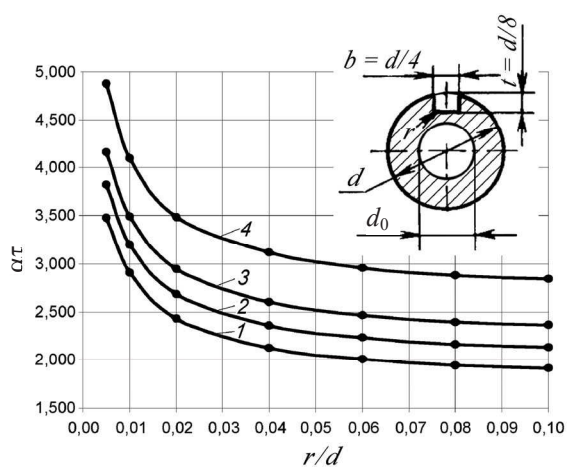


Рис. 3. Зависимость  $\alpha\tau$  при кручении вала с пазом для призматической шпонки:

1 – сечение вала сплошное; 2 – полый вал с отношением  $d/d_0 = 5/12$ ; 3 –  $d/d_0 = 6/12$ ; 4 –  $d/d_0 = 7/12$

**3. Концентрация напряжений при кручении шлицевых валов с зубьями прямоугольного и эвольвентного профиля.** Зубчатое (шлицевое) соединение представляется как многошпоночное, у которого шпонки выполнены как одно целое с валом.

Форма шлицевого профиля и размерный ряд прямоугольных и эвольвентных соединений регламентированы ГОСТ 1139-80 и ГОСТ 6033-80 соответственно.

Коэффициент концентрации напряжений для зубчатых валов по ГОСТ 1139-80, определенный как отношение наибольшего касательного напряжения к номинальному напряжению для аналогичного гладкого вала, диаметр которого равен диаметру впадин шлицевого вала, находится в диапазоне  $1,86 \leq \alpha\tau \leq 2,52$ .

Прочность вала с эвольвентными шлицами на кручение повышается в сравнении с валом с прямоугольными шлицами как из-за увеличения момента инерции, так и из-за уменьшения концентрации у корня зуба.

Коэффициент концентрации напряжений для зубчатых валов с эвольвентными шлицами с плоским дном впадины по ГОСТ 6033-80, определенный как отношение наибольшего касательного напряжения к номинальному напряжению для аналогичного гладкого вала, диаметр которого равен диаметру впадин шлицевого вала, находится в диапазоне  $1,53 \leq \alpha\tau \leq 2,10$ .

На рис. 4 показано типичное применение программы на примере расчета хвостовика вала отбора мощности трактора «БЕЛАРУС». Результаты расчета подтверждают предположение о том, что коэффициент концентрации в наиболее опасной точке контура Вебера (окружность с полукруглой выточкой) не зависит от формы поперечного сечения, ослабляемого выточкой.

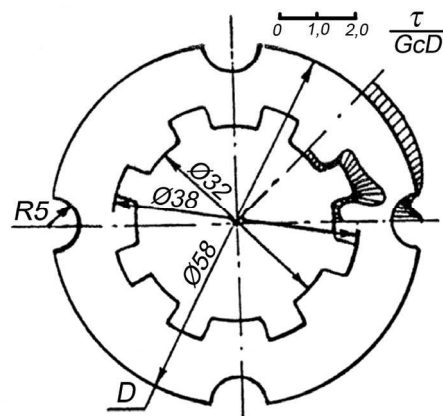


Рис. 4. Эпюра касательных напряжений при кручении хвостовика вала отбора мощности

**4. Концентрация напряжений при кручении валов с равноосным поперечным сечением.** С точки зрения прочности недостатком шпоночных и шлицевых соединений является

концентрация напряжений во входящих углах шпоночных (шлицевых) пазов.

Для лучших условий работы некруглого вала на скручивание необходимо, чтобы длина контурной кривой поперечного сечения вала при данной площади этого сечения была бы наименьшей, что, в частности, сводится к тому, что контурная кривая должна иметь кривизну одного знака, т. е. не должна иметь вогнутых участков. Этому условию наилучшим образом удовлетворяет равноосный профиль РЗГ по DIN 32711. Национальный стандарт пока отсутствует, хотя необходимость адаптации отечественной нормативной базы к мировым стандартам достаточна велика. Профильные соединения РЗГ применяют в плотных посадках для передачи крутящего момента на режущий инструмент (насадные фрезы, сверла, зенкеры, развертки), в коробках передач тракторов, автомобилей, станков.

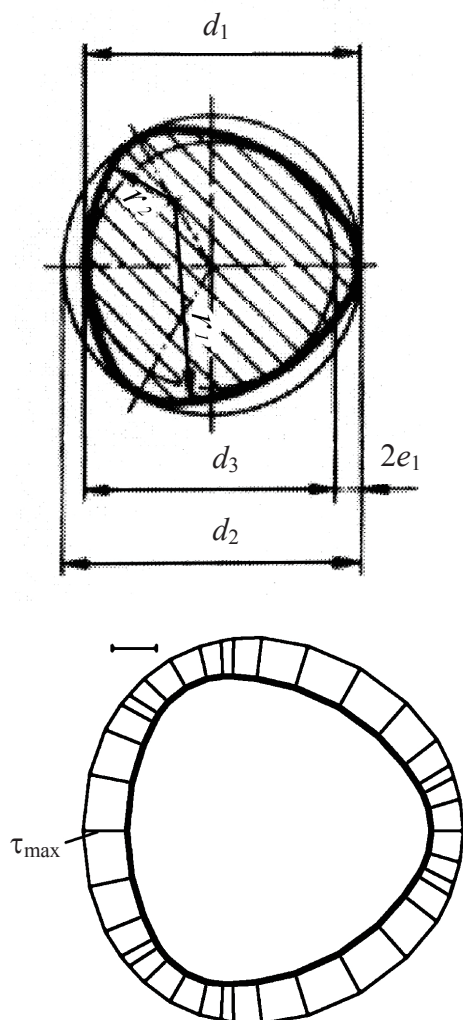


Рис. 5. Равноосный профиль РЗГ и характерная эпюра касательных напряжений  $\tau_{\max}$ :  
 $d_1$  – наружный размер («диаметр») вала;  
 $d_2$  – диаметр, описанный вокруг профиля;  
 $d_3$  – диаметр, вписанный в профиль;  
 $e_1$  – эксцентриситет профиля

Профиль РЗГ имеет неизменное расстояние между двумя параллельными прямыми и общую нормаль в точках касания, «диаметр» некруглого профильного вала постоянен и не зависит от угла поворота профиля относительно параллельных касательных. Такой контур прост в изготовлении и может контролироваться обычным измерительным инструментом.

Коэффициент концентрации, определенный как отношение  $\tau_{\max}$  профиля РЗГ к  $\tau_{\text{ном}}$  круглого сечения диаметром  $d_1$  находится в диапазоне от 1,13 до 1,21.

**5. Ружейное сверло с продольными каналами для подвода смазочно-охлаждающей жидкости.** В связи с трудностями аналитического характера для решения задачи кручения зачастую привлекают аналогии, основанные на единстве фундаментальных уравнений теории поля.

На рис. 6 представлена эпюра касательных напряжений в поперечном сечении ружейного сверла с продольными каналами для подвода смазочно-охлаждающей жидкости. Полученные результаты хорошо согласуются с данными на основе метода электромагнитной аналогии [10].

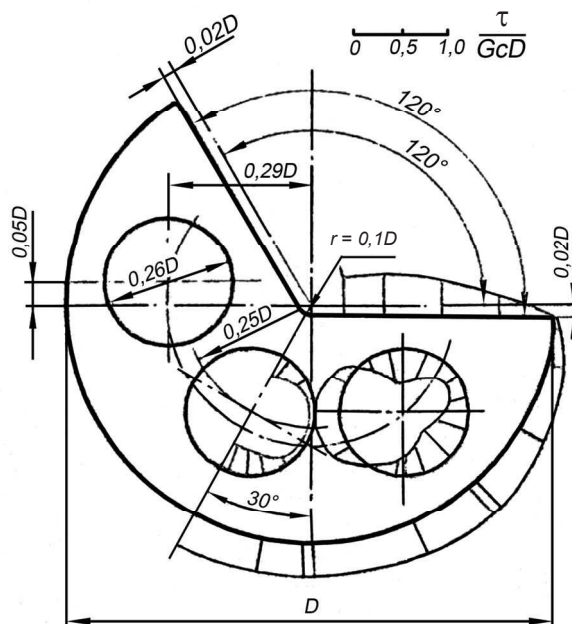


Рис. 6. Эпюра касательных напряжений в поперечном сечении ружейного сверла с продольными каналами

**Выводы.** Представлено общее решение задачи кручения упругих цилиндрических стержней многосвязного профиля. Интегральное уравнение задачи, в котором искомая функция представляет касательное напряжение у поверхности, дополняется условиями однозначности смещений по теореме Бредта, примененными к внутренним контурам.

Приведенные результаты расчета и сравнение их с экспериментальными и численными методами свидетельствуют о том, что рассматриваемый метод целесообразно использовать для усовершенствования геометрии стержней односвязного и многосвязного поперечного сечения сложной конфигурации, а полученные теоретические коэффициенты концентрации напряжений – при ресурсном проектировании машин.

### Литература

1. Арутюнян, Н. Х. Кручение упругих тел / Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян. – М.: ГИФМЛ. 1963. – 688 с.
2. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – Изд. 5-е. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
3. Кацикаделис, Дж. Т. Граничные элементы. Теория и приложения / Дж. Т. Кацикаделис. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 348 с.
4. Петерсон, Р. Коэффициенты концентрации напряжений: справочник / Р. Петерсон. – М.: Мир, 1977. – 302 с.
5. Коновалов, Л. В. Концентрация напряжений при кручении валов / Л. В. Коновалов // Вестник машиностроения. – 2001. – № 5. – С. 35, 36.
6. Супин, В. В. Приложение метода граничных интегральных уравнений к решению зада-

чи нестесненного кручения стержней / В. В. Супин // Вопросы исследования надежности и динамики элементов транспортных машин и подвижного состава железных дорог: сб. науч. тр. – Тула: ТПИ, 1979. – С. 102–106.

7. Рубенчик, В. Я. К решению задачи кручения стержней односвязного и многосвязного поперечного сечения методом интегральных уравнений / В. Я. Рубенчик, В. В. Супин // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: Выш. школа, 1980. – Вып. 7. – С. 98–106.

8. Супин, В. В. Исследование напряженного состояния зубьев зубчатых передач и шлицевых соединений методом регулярных интегральных уравнений / В. В. Супин // Проблемы создания нового пропашного колесного трактора: материалы науч.-практ. семинара. – Минск, 1981. – С. 39.

9. Борович, Л. С. Бесшпоночные соединения деталей машин / Л. С. Борович. – М.: Машгиз, 1951. – 132 с.

10. Алексеев, Н. В. Новый метод экспериментального исследования кручения и изгиба призматических стержней на основе электромагнитной аналогии / Н. В. Алексеев, А. О. Дитман // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение. – 1977. – № 18. – С. 282–299.

11. Christiansen, S. A review of some integral equations for solving the Saint-Venant torsion problem / S. Christiansen // Journal of Elasticity. – 1978. – Vol 8, No 1. – P. 1–20.