Перепишем систему (9) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)-\tilde{\tilde{A}}_2 y(t-h)\right)=\tilde{A}_0 y(t)+\tilde{A}_1 y(t-h)+\tilde{b}u_2(t),\ t>0 \qquad (10)$$

В частотной области система (10) имеет вид

$$\lambda\left(I_n-m\tilde{\tilde{A}}_2\right)Y(\lambda)=\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)Y(\lambda)+\tilde{b}U_2(\lambda), \qquad (11)$$

где I_n – единичная матрица порядка n, $\lambda\in\mathbb{C}$, $m=e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига.

Обозначим $T_2(m)=I_n-m\tilde{\tilde{A}}_2$. Очевидно, что $\det T_2(m)=1$. Умножим слева обе части системы (11) на матрицу $T_2^{-1}(m)$. Тогда система (11) перепишется в виде

$$\lambda Y(\lambda)=T_2^{-1}(m)\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)Y(\lambda)+T_2^{-1}(m)\tilde{b}U_2(\lambda). \qquad (12)$$

Выполним в системе (12) замену $Y(\lambda)=T_2^{-1}(m)Z(\lambda)$. Тогда система (12) запишется в виде

$$\lambda Z(\lambda)=\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)T_2^{-1}(m)Z(\lambda)+\tilde{b}U_2(\lambda) \qquad (13)$$

Система (13) запаздывающего типа. По аналогии с [2] отсюда вытекает следующее достаточное условие модальной управляемости системы (1) регулятором типа (2):

Теорема. Для того, чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) достаточно выполнения условия

$$\det\left[\tilde{b},\ \left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)T_2^{-1}(m)\tilde{b},\ \ldots,\ \left(\left(\tilde{A}_0+m\tilde{A}_1\right)T_2^{-1}(m)\right)^{n-1}\tilde{b}\right]\equiv const\neq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Popov, V. M. Invariant description of linear time invariant controllable systems / V. M. Popov // SIAM J.Control. – Vol.10. – 1972. – P.252–264.

2 Асмыкович, И. К. К теории модального управления систем с запаздыванием / И. К. Асмыкович, В. М. Марченко // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С.200-206.

УДК 66.065 А. М. Волк, доц., канд. техн. наук (БГТУ, г. Минск)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГАЗОЦЕНТРОБЕЖНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ СУСПЕНЗИЙ

Введение. Разделение многофазных систем является составной частью многих технологических процессов в различных отраслях промышленности. Для интенсификации процессов разделения применяют вихревые аппараты различных типов. Данные устройства характеризуются достаточной простотой конструкций, малой металлоемкостью, небольшим гидравлическим сопротивлением. При этом вихревые аппараты работают в достаточно широком диапазоне изменения нагрузок по жидкости и газу [1]. Разработка и внедрение аппаратов требуют математического моделирования процесса разделения.

Процесс разделения крупнодисперсных суспензий на цилиндрической поверхности под воздействием закрученного газового потока, образованного вращающимся устройством (ротором вентилятора) исследовался на созданной установке (рисунок 1).

На данной установке соосно ротору 1 установлен цилиндрический перфорированный элемент 2 большего диаметра, помещенный в корпус 3 и снабженный патрубками 4 и 5 соответственно для ввода суспензии и вывода твердой фазы. Жидкость постоянно отводится из корпуса. Жидкость из корпуса стекала через патрубок 6. В патрубке 7 было предусмотрено устройство для регулировки отводимого газа. Жидкость подавалась насосом 8 через регулируемый вентиль 9 и ротаметр 10 для измерения ее расхода. Подача суспензии осуществлялась шнековым питателем.

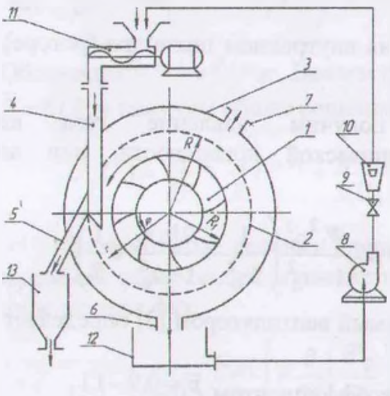

Рисунок 1

Были предусмотрены емкости 12 и 13 для сбора разделяемых жидкой и твердой фаз.

Математическая модель. Гидродинамику многих вихревых камер можно моделировать как плоское движение потоков между вращающимися коаксиальными проницаемыми цилиндрами бесконечной длины [2]. Вентилятор рассматриваем как внутренний проницаемый цилиндр радиуса R_1, а внешний проницаемый цилиндр радиуса R является неподвижным. На участке пленочного движения внешний цилиндр считаем непроницаемым. Выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z по оси цилиндров. Обозначим $\widetilde{r} = r/R$, $r_0 = R_1/R$. При линейной скорости внутреннего цилиндра $W_1 = \pi n/30$ и при отсутствии оттока тангенциальная составляющая газового потока описывается зависимостью[2]

$$W_\varphi = \frac{W_1 r_0}{1 - r_0^2}\left(\frac{1}{\tilde r} - \tilde r\right). \qquad (1)$$

Найдем касательные напряжения сил трения между цилиндрическими слоями единичной длины

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\mu_\Gamma}{R}\left[\tilde r \frac{\partial}{\partial \tilde r}\left(\frac{W_\varphi}{\tilde r}\right)\right] = -\frac{2\mu_\Gamma W_1 r_0}{R(1 - r_0^2)}\frac{1}{\tilde r^2}.$$

На границе раздела фаз при малой толщине пленки, принимая $\tilde r = 1$, получим

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{2\mu_\Gamma W_1 r_0}{R(1 - r_0^2)}. \qquad (2)$$

При известном давлении P_0 на внутреннем цилиндре (роторе), интегрируя уравнение $\frac{dP}{dr} = \rho_\Gamma \frac{W_\varphi^2}{r}$ получим давление газа на внешней непроницаемой цилиндрической поверхности, или на поверхности пленки жидкости

$$P_\Gamma = P_0 + \rho_\Gamma \int_{r_0}^{1} \frac{W_\varphi^2(\tilde r)}{\tilde r} d\tilde r = P_0 + \rho_\Gamma \frac{W_1^2 r_0^2}{1 - r_0^2}\left(\frac{1}{2r_0^2} + \frac{2\ln r_0}{1 - r_0^2} + \frac{1}{2}\right). \qquad (3)$$

Перепад давления, создаваемый вентилятором [3] определяется зависимостью $P_0 = \bar p \frac{\rho_\Gamma W_1^2}{2}$ с коэффициентом $\bar p = 0{,}9 - 1{,}1$.

Исследуем процессфильтрования при пленочном движении жидкой фазы по проницаемой поверхности в вихревой камере.

Скорость оттока сплошной среды определяется свойствами проницаемой поверхности и перепадом давления на ней. При турбулентном режиме движения среды через отверстия в стенке на основании уравнения Бернулли получают квадратичный закон [4]

$$\Delta P = \zeta \frac{\rho U_0^2}{2}. \qquad (4)$$

На элементарном участке поверхности скорость оттока U_0 будем считать постоянной, а движение автомодельным, при котором составляющие скорости зависят только от радиуса. В данном случае, радиальная скорость в пленке будет $U_r = \frac{U_0 R}{r}$.

Отток и криволинейная форма проницаемой поверхности оказывает стабилизирующее действие на ламинарный пограничный слой, уменьшают степень турбулентности потока, значительно увеличивают силу трения с поверхностью, повышают предел устойчивости ламинарного режима движения. Уравнения Навье-Стоксаламинарного автомодельного движения вязкой жидкости в цилиндрической системе координатпреобразовываются к виду

$$\frac{d^2U_\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\left(\frac{U_0R}{\nu_Ж}-1\right)\frac{dU_\varphi}{dr}-\frac{1}{r^2}\left(\frac{U_0R}{\nu_Ж}+1\right)U_\varphi+\frac{g_\varphi}{\nu}=0, \tag{5}$$

$$\frac{dP}{dr}=\rho_Ж\left(\frac{U_\varphi^2}{r}+\frac{U_0^2R^2}{r^3}\right)+\rho_Ж g_r. \tag{6}$$

Обозначим $\alpha=U_0R/\nu_Ж$. Введем относительную толщину пленки $\tilde{\delta}=\delta/R$ и получим общее решение уравнения (7):

$$U_\varphi(\tilde{r})=\frac{c_1}{R\tilde{r}}+\frac{c_2}{R}\tilde{r}^{\alpha+1}+\frac{g\cos\varphi\, R^2\tilde{r}^2}{3(U_0R-\nu_Ж)}. \tag{7}$$

За граничные условия принимаем условие прилипания на проницаемой поверхности и равенство касательных напряжений на границе раздела фаз:

$$U_\varphi\big|_{r=R}=0;\quad \frac{\mu_Ж}{R}\left[\tilde{r}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{W_\varphi}{\tilde{r}}\right)\right]=-\tau_{r\varphi}. \tag{8}$$

Определяя произвольные постоянные из граничных условий, получим распределение касательной составляющей скорости в пленке жидкости:

$$U_\varphi(\tilde{r})=\left[\frac{g\cos\varphi\, R^2\tilde{r}^2}{(\alpha+2)(U_0R-\nu_Ж)}+\frac{\tau_{r\varphi}R}{\mu_Ж(\alpha+2)}\right]\left(\frac{1}{\tilde{r}}+\tilde{r}^{\alpha+1}\right)+$$

$$+\frac{g\cos\varphi\, R^2\tilde{r}^2}{3(U_0R-\nu_Ж)}\left(\tilde{r}^2-\frac{1}{\tilde{r}}\right). \tag{9}$$

Интегрируя (8) находим перепад давления на проницаемой поверхности и с учетом (6)получим уравнение для определения скорости оттока жидкой фазы

$$P_Г + \rho_Ж \int\limits_{1-\tilde{\delta}}^{1} \left(\frac{U_\varphi(\tilde{r})}{\tilde{r}} + \frac{U_0^2}{\tilde{r}^3} \right) dr + \rho_Ж g \sin\varphi \, R\tilde{\delta} = \zeta \frac{\rho_Ж U_0^2}{2} \quad (10)$$

Определяем удельный расход жидкости q по сечению пленки

$$R \int\limits_{1-\tilde{\delta}}^{1} U_\varphi(\tilde{r}) \, d\tilde{r} = q \quad (11)$$

Изменение удельного расхода описывается уравнением

$$\frac{dq}{d\varphi} = -RU_0 \quad (12)$$

Система уравнений (9)–(12) является замкнутой и определяет гидродинамические характеристики газопленочного центробежного фильтрования жидкости. Ее решение позволяет рассчитать пошаговым методом оптимальную нагрузку по жидкой фазе и участок фильтрования в зависимости от геометрических и динамических характеристик вихревого аппарата.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кутепов, А. М. Вихревые процессы для модификации дисперсных систем / А. М. Кутепов, А.С. Латкин. – М. : Наука, 1992. – 250 с.

2 Волк, А. М. Течение вязкой жидкости в пространстве между движущими проницаемыми поверхностями / А. М. Волк //Инженерно-физический журнал. – 1993. – Т. 62, № 2. – С. 152-158.

3 Соломахова, Д. С. Центробежные вентиляторы / Д. С. Соломахова. – М. : Машиностроение, 1975. – 176 с.

4 Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. – М. : Машиностроение, 1975. – 560 с.