

### КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАДЕНИЯ СТВОЛА ДЕРЕВА

A rod-chain model was used to study the dynamics of a tree stem. It was shown that the tree stem exhibits different dynamics that depending on the stiffness of the stem. Different combinations of rod mass and bending constant were used to simulate the motions of the tree stem.

**Введение.** Задача исследования влияния гибкости падающего дерева на его динамические параметры имеет важное практическое значение. Результаты этого исследования позволят прогнозировать характер взаимодействия ствола дерева с лесной машиной, ударный импульс, производимый стволом на основание. Точное решение задач о движении деформируемых систем удается получить в замкнутой форме лишь в немногих относительно простых случаях. В общем случае это сделать невозможно, и приходится упрощать расчетную модель, в частности, путем уменьшения числа степеней свободы [1].

В рассматриваемой задаче распределенное по всей длине ствола свойство податливости локализуется в конечном числе точек. При этом система представляется в виде цепочки жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами (рис. 1) [2].

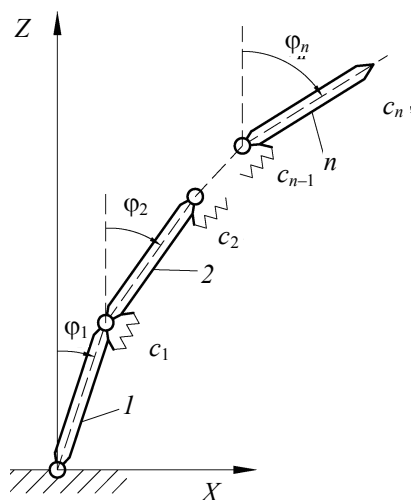


Рис. 1. Расчетная модель дерева

Для изучения влияния гибкости ствола на его динамическое поведение использовались различные модели (см. [3] и цитируемую там литературу). В большинстве случаев в качестве модели рассматривалось некоторое количество материальных точек (сосредоточенных масс), соединенных деформируемыми безынерционными элементами. В большинстве работ исследуются малые колебания ствола дерева около его положения равновесия. В данной работе численно решается задача о падении деформируемого ствола дерева.

**1. Уравнения движения.** В качестве обобщенных координат выберем углы поворота стержней  $\varphi_i$ , отсчитываемые от вертикали (рис. 1). Считаем, что движение происходит в одной плоскости. Координаты центров тяжести стержней находим из выражений:

$$\begin{cases} x_{Ck} = \sum_{i=1}^{k-1} l_i \sin \varphi_i + \frac{1}{2} l_k \sin \varphi_k, \\ z_{Ck} = \sum_{i=1}^{k-1} l_i \cos \varphi_i + \frac{1}{2} l_k \cos \varphi_k, \end{cases} \quad (1)$$

где  $l_i$  – длина  $i$ -го стержня.

Скорость центров масс стержней находится следующим образом:

$$v_{Ck}^2 = \dot{x}_{Ck}^2 + \dot{y}_{Ck}^2. \quad (2)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы определяется по формуле

$$T = \sum_{k=1}^n \left( \frac{m_k v_{Ck}^2}{2} + \frac{J_k \dot{\varphi}_k^2}{2} \right), \quad (3)$$

где  $m_k$  – масса  $k$ -го стержня;  $J_k$  – динамический осевой момент инерции  $k$ -го стержня.

Потенциальная энергия системы состоит из энергии в поле сил тяжести и энергии упругих связей:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \frac{c_k (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2}{2} + \sum_{n=1}^N g m_k z_k, \quad (4)$$

где  $c_k$  – жесткость упругих связей.

Для определения коэффициентов жесткости сочленений рассмотрим закон Гука при чистом изгибе

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E J_A}, \quad (5)$$

где  $1/\rho$  – кривизна упругой линии в произвольном сечении ствола;  $M$  – изгибающий момент в том же сечении;  $E$  – модуль упругости древесины;  $J_A$  – осевой момент инерции сечения ствола.

При чистом изгибе изгибающий момент постоянен во всех сечениях стержня. Разобьем стержень на цилиндры, соединенные упругими шарнирами (рис. 2). После изгиба стержня его упругая ось будет представлять ломаную линию с вершинами в точках соединения цилиндров. Зависимость между длиной цилиндра и радиусом кривизны примет вид

$$\Delta l = \rho \Delta \varphi. \quad (6)$$

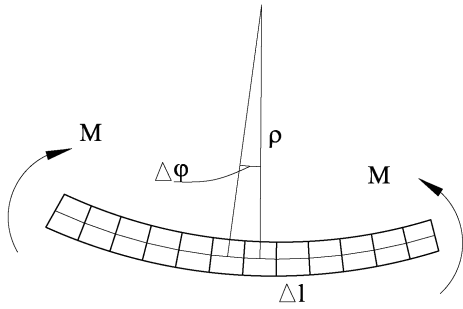


Рис. 2. К определению жесткости пружин

Изгибающий момент выражаем через коэффициент упругости шарнира:

$$M = c_\phi \Delta\phi. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в уравнение (5), получаем:

$$c_\phi = \frac{EJ_A}{\Delta l}. \quad (8)$$

Таким образом, коэффициенты жесткости сочленений обратно пропорциональны длине цилиндров и выражаются простой зависимостью (8) через характеристики ствола дерева.

Функция Лагранжа для модели имеет вид

$$L = \sum_{k=1}^n (T - \Pi). \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения движения модели получим, составив уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, линейную по угловым ускорениям элементов, но сильно нелинейную по самим обобщенным координатам. Систему ввиду ее громоздкости не выписываем.

## 2. Интегрирование уравнений движения.

Полученные уравнения решены численно, с помощью пакета *Maple 11*, при заданных начальных углах отклонения стержней от вертикали и их начальных скоростях. С учетом начальных условий получена система уравнений, линейных относительно старшей производной  $\ddot{\phi}_i$ . Угловые ускорения из системы найдены при помощи метода Ньютона – Рафсона по итерационной формуле [4].

После вычисления угловых ускорений положения и скорости элементов в каждый следующий момент времени найдены по формулам:

$$\dot{\phi}(t + \Delta t) = \dot{\phi}(t) + \ddot{\phi}(t) \Delta t, \quad (11)$$

$$\phi(t + \Delta t) = \phi(t) + \dot{\phi}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\phi}(t), \quad (12)$$

где  $\phi$  – вектор углов поворота;  $\dot{\phi}$  – вектор угловых скоростей;  $\ddot{\phi}$  – вектор угловых ускорений.

После вычисления новых значений положений и угловых скоростей подставляем их в исходную систему уравнений и расчеты повторяем.

При расчетах был выбран шаг по времени  $\Delta t = 0,0001$  с, параметры ствола дерева [5]: длина  $l = 20$  м, масса  $m = 1000$  кг, диаметр  $d = 20$  см, модуль упругости древесины  $E = 1,2 \cdot 10^{10}$  Па, плотность древесины  $\rho = 780$  кг/м<sup>3</sup>. Жесткость пружин вычислим при использовании формулы (8). Сечение ствола считаем круглым, поэтому осевой момент сечения высчитываем по формуле:  $J_A = \pi d^4 / 64$ . Получаем жесткость упругих шарниров  $c_\phi = 750$  кНм. Для дальнейших расчетов было принято заниженное значение  $c_\phi = 160$  кНм для демонстрации влияния гибкости стержня на рассчитываемые параметры. В приведенных ниже расчетах ствол дерева разбивался на 20 частей.

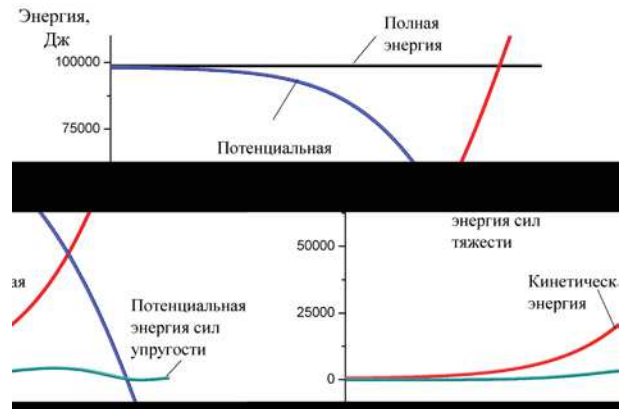


Рис. 3. Баланс энергии

Для контроля устойчивости работы алгоритма контролировалось сохранение полной энергии системы (рис. 3).

**3. Результаты расчетов.** Вычислим координаты точек ствола дерева и построим упругую линию в различные моменты времени (рис. 4).

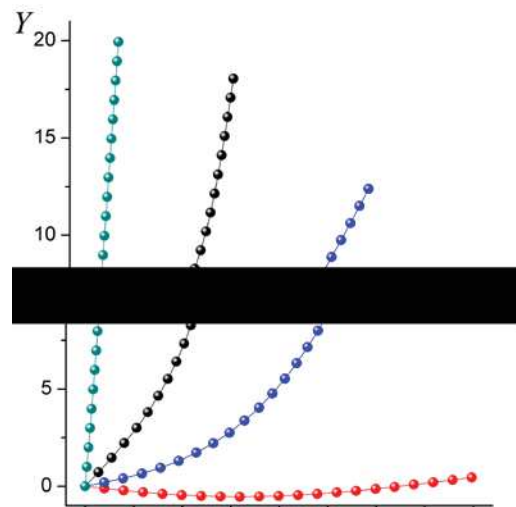


Рис. 4. Упругая линия ствола дерева без сбегу при падении в различные моменты времени

Сопоставим рассчитанные величины для гибкого и жесткого ствола. Для начала сравним время падения жесткого и гибкого стволов. Гибкий ствол будем считать упавшим, когда вертикальная координата центра масс становится равной нулю. Из решения задачи находим, что для жесткого ствола  $t_r = 3,4$  с, для гибкого –  $t_f = 3,6$  с. Для жесткого и гибкого стволов приняты следующие начальные условия:  $t_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0,1$  рад,  $\omega_0 = 0,1$  рад/с.

Выясним, как влияет гибкость ствола на силы, возникающие у основания ствола. Для этого сравним силы у основания для жесткого стержня и модели, рассмотренной выше (при одинаковой длине ствола и суммарной массе). Для многоступенчатой модели силы у основания найдем, используя теорему о движении центра масс:

$$F_x = Ma_{Cx} = \sum_{k=1}^N m_k a_{kx}, \quad (13)$$

$$F_y = M(a_{Cy} + g) = \sum_{k=1}^N m_k (a_{ky} + g). \quad (14)$$

Ускорения в формулах (13) и (14) находятся дифференцированием выражений для координат (1). Результаты расчетов приведены на рис. 5 и 6.

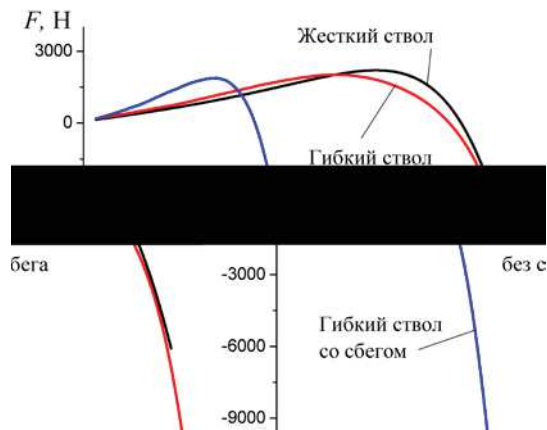


Рис. 5. Горизонтальная составляющая силы, действующей у основания ствола

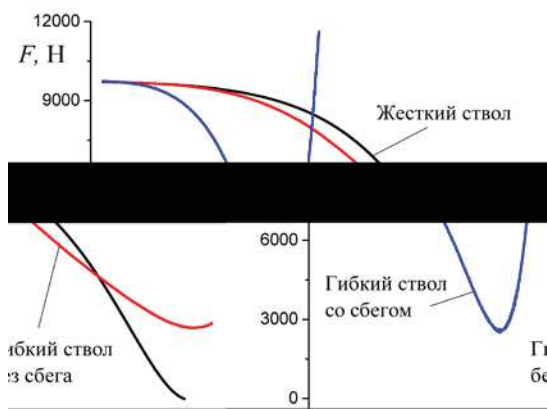


Рис. 6. Вертикальная составляющая силы, действующей у основания ствола

Как показано на рисунке, потенциальная энергия сил упругости невелика по сравнению с потенциальной энергией в поле сил тяжести или кинетической энергией.

Выясним, как влияет сбег (сбегом называют уменьшение диаметра ствола от основания к вершине) ствола дерева на силы у его основания и на величину потенциальной энергии изгиба. Примем, что диаметр ствола изменяется по линейному закону [5]

$$d = d_0 - qs, \quad (15)$$

где  $d_0$  – диаметр ствола у основания;  $q$  – коэффициент сбега;  $s$  – дуговая координата, отсчитываемая от основания ствола.

Определим коэффициент сбега следующим образом. Пускай на вершине, при  $s=l$ , диаметр ствола будет  $d=0$ , тогда из (15) получаем  $q = d_0/l$ .

Подставляя выражение (15) в формулу для осевого момента инерции сечения, получаем:

$$J_A = \frac{\pi d_0^4}{64} \left(1 - \frac{qs}{d_0}\right)^4,$$

или

$$J_A = J_{A0} \left(1 - \frac{qs}{d_0}\right)^4, \quad (16)$$

где  $J_{A0}$  – осевой момент инерции сечения у основания ствола.

Тогда жесткость пружины в любом сочленении можем определить по формуле

$$c_{\phi k} = \frac{EJ_{Ak}}{\Delta l} = \frac{EJ_{A0}}{\Delta l} \left(1 - \frac{q}{d_0} k \Delta l\right)^4, \quad k = 1 \dots n. \quad (17)$$

Учитывая выражение для коэффициента сбега, получим:

$$c_{\phi k} = \frac{EJ_{Ak}}{\Delta l} = \frac{EJ_{A0}}{\Delta l} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^4, \quad k = 1 \dots n. \quad (18)$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим выражение для массы звеньев модели:

$$m_k = m_1 \left(1 - \frac{q}{d_0} k \Delta l\right)^2, \quad k = 0 \dots n, \quad (19)$$

где  $m_1$  – масса первого от основания цилиндра.

Подставляя выражение  $q = d_0/l$  в формулу (19), получаем,  $m_k = m_1 (1 - k \Delta l/l)^2$  или, учитывая выражения для длины элемента  $\Delta l = l/n$ , будем иметь:

$$m_k = m_1 (1 - k/n)^2. \quad (20)$$

Массу первого цилиндра найдем из условия  $m = \sum m = \sum m (1 - k/n)$ .

Тогда

$$m_1 = \frac{m}{\sum_{k=0}^n (1-k/n)^2}. \quad (21)$$

Динамические осевые моменты инерции находились по формулам:  
для модели без сбега

$$J = m(l^2/12 + d^2/16); \quad (22)$$

для модели со сбегом

$$J = m(l^2/12 + d^2/16(1-k/n)^2). \quad (23)$$

Для сравнения рассмотрим два ствола одинаковой массы и длины, но у одного масса распределена равномерно и жесткость пружин в сочленениях не меняется по длине ствола, а у другого масса и жесткость пружин изменяются согласно формулам (17) и (19). Результаты расчетов сил у основания приведены на рис. 5 и 6.

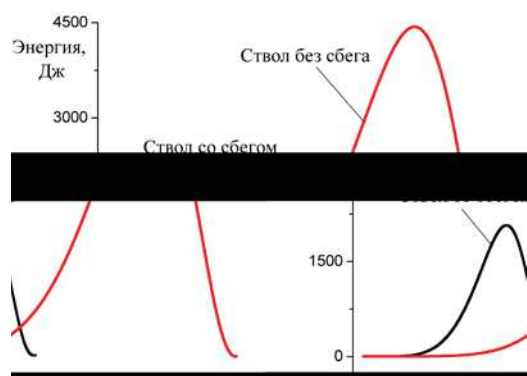


Рис. 7. График потенциальной энергии пружин

В заключение сравним величину потенциальной энергии сил упругости для случаев ствола со сбегом и без сбега. Результаты расчетов приведены на рис. 7.

**Закключение.** Время падения гибкого ствола дерева больше чем жесткого. На рис. 5 и 6 показано, что деформация ствола не меняет характера и не оказывает большого влияния на величину сил у его основания в процессе падения дерева. Сбег ствола увеличивает это различие. В дальнейшем представляется интересным выяснить, как влияет гибкость ствола на силы, возникающие при контакте падающего дерева с поверхностью.

### Литература

1. Пановко, Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. — М.: Наука, 1991. — 256 с.
2. Борисевич, С. А. Разработка многоступенчатой модели гибкого ствола дерева / С. А. Борисевич, В. Б. Немцов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. — 2004. — Вып. XII. — С. 47–49.
3. Жуков, А. В. Теория лесных машин / А. В. Жуков. — Минск: БГТУ, 2001. — 640 с.
4. Дэннис, Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. — М.: Мир, 1988. — 440 с.
5. Коротаев, Л. В. Параметры деревьев и хлыстов как объектов лесозаготовительного производства / Л. В. Коротаев. — Л.: АЛТИ, 1982. — 80 с.