КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
BRIEF MESSAGES

УДК 519.86

Н. Н. Буснюк
Белорусский государственный технологический университет

КРИТЕРИЙ КОЛИЧЕСТВА РАБОТНИКОВ В СЕТИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА БЕЗ ПРОСТОЕВ РАБОТ

В классической задаче сетевого планирования длительность выполнения проекта равна длине критического пути в соответствующем графе-сети. Критические пути могут быть разными для одного и того же графа в зависимости от значений весов дуг. На практике это соответствует тому, что над одинаковыми проектами могут работать люди с разной производительностью труда. От способа их расстановки на соответствующие работы будет зависеть длительность выполнения проекта (длина критического пути).

Работы, лежащие на одном пути, могут выполняться лишь последовательно, поэтому для их реализации необходимо и даже достаточно одного работника. Работы, не лежащие на одном пути, могут выполняться одновременно, при условии наличия незанятых на других работах работников. Возможность начала очередной работы зависит от того, как быстро завершены предшествующие ей работы. Менеджеру проекта важно знать, сколько нужно иметь в наличии работников в каждый момент времени для того, чтобы, во-первых, работы не простаивали и критический путь не удлинился; а во-вторых, чтобы не держать в резерве работников, которые не понадобятся.

В статье доказана теорема о том, какое количество работников необходимо и достаточно для того, чтобы любой проект в зависимости от структуры соответствующего графа-сети выполнялся без простоев работ.

Ключевые слова: сетевой график, критический путь, полный путь, параллельные работы, задача сетевого планирования, длительность выполнения проекта, достаточное количество работников.

Для цитирования: Бюснюк Н. Н. Критерий количества работников в сети для выполнения проекта без простоев работ // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 61–64.

N. N. Busnyuk
Belarusian State Technological University

CRITERION FOR THE NUMBER OF EMPLOYEES IN THE NETWORK FOR PROJECT IMPLEMENTATION WITHOUT DOWNTIME JOBS

In the classical problem of network planning the project duration is equal to the critical path length in the corresponding graph network. The critical paths can be different for the same graph, depending on the values of the arcs weights. In practice this corresponds to the fact that employees with different labor productivity can work on the same projects. The project duration (the length of the critical path) will depend on the way as employees are placed on the corresponding jobs.

Jobs lying on the same path can only be performed sequentially; therefore, one employee is necessary and sufficient for their implementation. Jobs that do not lie on the same path can be performed simultaneously, provided that there are employees not employed in other jobs. The possibility of starting the next job depends on how quickly the previous job is completed. It is important for the project manager to know how many employees must be available at each moment of time in order to: firstly, the jobs do not stand idle and the critical path does not lengthen; and secondly, so as not to keep in reserve employees who are not needed.

The article proves a theorem about how many employees are necessary and sufficient for any project, depending on the structure of the corresponding graph-network, to be carried out without downtime.

Key words: network chart, critical path, full path, parallel works, network planning task, project duration, sufficient number of employees.

For citation: Busnyuk N. N. Criterion for the number of employees in the network for project implementation without downtime jobs. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021*, no. 1 (242), pp. 61–64 (In Russian).

Введение. В классической задаче сетевого планирования задана последовательность выполнения работ некоторого проекта и их длительность [1]. В соответствующем ориентированном взвешенном по дугам графе (сети) отыскивается наиболее длинный путь из исходного узла (источника) в завершающий узел (сток). Этот путь называется критическим и задает время выполнения всего проекта. Критические пути могут быть разными для одного и того же графа в зависимости от значений весов дуг. На практике это соответствует тому, что над одинаковыми проектами могут работать работники с разной производительностью труда. От способа их расстановки на соответствующие работы будет зависеть длительность выполнения проекта (длина критического пути).

Основная часть. При применении алгоритма построения критического пути [2] находят резервы времени для некритических работ (не принадлежащих критическим путям); критических путей может быть несколько. В случае превышения резерва времени соответствующая работа будет начата с опозданием и в итоге проект будет завершен позже времени, определенного критическим путем.

Работы, лежащие на одном пути, могут выполняться лишь последовательно, поэтому для их реализации необходимо и достаточно одного работника. Работы, не лежащие на одном пути, могут выполняться одновременно. Их будем называть *параллельными*; несколько взаимно параллельных работ могут одновременно выполняться таким же количеством работников. Возможность начала очередной работы зависит от того, как быстро завершены предшествующие ей работы.

Введем следующие обозначения:

G – граф-сеть проекта; дуги соответствуют работам, узлы – событиям окончания одних работ и начала других;

$V = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_z)$ – упорядоченное множество событий начала и окончания работ; v_0 – источник; v_z – сток;

Θ – оптимальная длительность выполнения проекта;

K – критический путь. $T(K)$ – длительность критического пути;

g – наибольшее количество попарно параллельных работ в сети;

g_k – количество параллельных работ после наступления события v_k;

m – количество работников;

$d(v_i)$ – степень узла v_i;

$d^+(v_i)$ (для краткости d_i^+) – полустепень захода узла (v_i), означает, сколько работ закончилось и работников освободилось в момент наступления события v_i;

$d^-(v_i)$ (для краткости d_i^-) – полустепень исхода узла v_i, означает, сколько работ может начать выполняться одновременно;

$\Delta d^i = d_i^- - d_i^+$ – задает минимальное (по модулю) изменение требуемого количества работников в момент события v_i для того, чтобы работы не простаивали.

Путь, соединяющий источник со стоком, назовем *полным*.

Количество работников для выполнения проекта назовем *достаточным*, если все работы проекта могут быть выполнены этими работниками без простоев работ. Другими словами, каждая работа может быть начата сразу же после выполнения всех предшествующих событию работ. В таком случае $\Theta = T(K)$.

Можно построить сеть, в которой все полные пути критические, их g штук (g – целое положительное число) и они попарно не пересекаются за исключением источника и стока. Для упрощения решения задачи на графах отступим от определения классической сети планирования и допустим существование мультидуг. Тогда предложенный выше пример будет выглядеть как сеть из двух узлов (источник и сток), соединенных g дугами одинакового веса.

***Лемма* 1**. В любой сети можно задать веса дуг так, что все полные пути будут критическими.

Доказательство. Приведем алгоритм присвоения весов дугам. Вначале присвоим всем дугам веса, равные единице, и воспользуемся алгоритмом нахождения критических путей [2]. Это будут полные пути, содержащие наибольшее количество дуг (число k). В результате применения алгоритма у некритических дуг будут найдены положительные резервы времени. Поочередно (в любой последовательности) увеличивая вес некритической дуги на величину резерва и пересчитывая критические пути, в конечном итоге за время, не превышающее $O(n)$, мы присвоим дугам такие веса, что у них не останется положительных резервов времени, т. е. все пути станут критическими и длины k. *Лемма доказана*.

В источнике [3] сформулировано утверждение о том, что минимальное достаточное количество работников m не превышает g, где g – максимальное для данной сети количество параллельных дуг.

Покажем, что условие $m = g$ является необходимым. Если у некоторых работ есть резерв времени, то они могут заканчиваться не одновременно с другими предшествующими тому же событию работами; также они могут не начинаться одновременно с другими работами, следующими за данным событием. Но если веса дугам сети присвоены в соответствии с алгоритмом леммы 1, то резерва времени у работ нет и все предшествующие событию работы заканчиваются одномоментно; в этот же момент начинается выполнение всех следующих за событием работ.

Занумеруем узлы сети в соответствии с порядком наступления соответствующих событий $v_0, v_1, \ldots, v_z$. Подсчитаем количество одновременно выполняемых работ в сети, взвешенной по правилу леммы 1, в момент наступления каждого события.

Лемма 2. Количество параллельных работ $g_k = \sum_{i-0}^{k} \Delta \mathrm{d}^i$ в момент события v_k.

Доказательство. Методом математической индукции. В момент v_0 имеем $g_0 = d(v_0) = d^-(v_0)$. Пусть в момент v_{k-1} справедливо равенство $g_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta d^i$. В момент $v_k d_k^+$ работы закончились, d_k^- работ могут начаться одновременно, поэтому количество параллельных работ в момент v_k меняется на величину Δd^k. В момент события $v_k g_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta d^i + \Delta d^{\mathrm{k}} - \sum_{i=0}^{k} \Delta d^i$. *Лемма доказана*.

Величина $g = \max,\ g_k = \max\limits_{1 \le k \le z} \sum_{i=0}^{k} \Delta d^i$ есть максимальное количество параллельных работ в сети G при заданных весах дуг. При других весах эта величина может принимать иные значения. На рис. 1 и 2 приведены примеры одной и той же сети, в которой все пути – критические, но в зависимости от весов дуг в одном случае $m = g = 4$, а в другом случае $m = g = 3$.

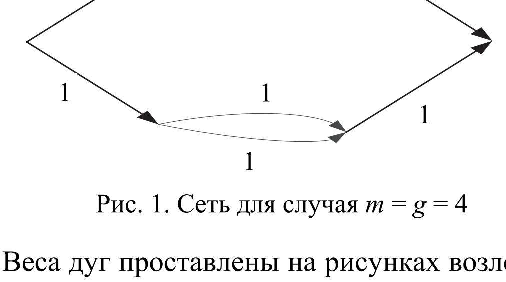

Рис. 1. Сеть для случая $m = g = 4$

Веса дуг проставлены на рисунках возле соответствующих дуг. На первом рисунке все веса равны 1.

На втором рисунке в каждом из критических путей по одной дуге имеют вес, равный 2, и эти дуги не параллельны при упорядочении событий в соответствии со временем их наступления.

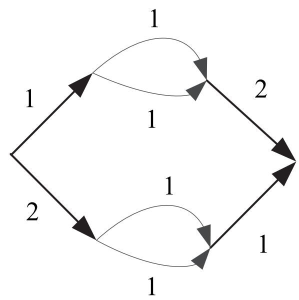

Рис. 2. Сеть для случая $m = g = 3$

Для рис. 1 $T(K) = 3$, $g = 4$. Если $m = 2$ или $m = 3$, то $\Theta = 4$, т. е. $\Theta > T(K)$. Если $m = 4$, то $\Theta = T(K)$.

Для рисунка 2 $T(K) = 4$, $g = 3$. Если $m = 2$, то $\Theta = 5$, т. е. $\Theta > T(K)$. Если $m = 3$, то $\Theta = T(K)$.

Любой сети независимо от значений весов дуг присуща частичная упорядоченность ее узлов. Эта частичная упорядоченность определяется путями из источника в сток. Вычисляя значения величины g_k в соответствии с частичной упорядоченностью узлов, можно получать разные значения g_k для одного и того же v_k. В соответствии с частичной упорядоченностью можно разными способами получить топологическую сортировку всех узлов сети. И для различных топологических сортировок могут оказаться разными значения параметра g.

Из лемм 1 и 2 следует критерий количества работников для работы над проектом, чтобы работы не простаивали и не было лишних работников.

Теорема. Для того чтобы время выполнения проекта равнялось длине критического пути соответствующей сети, необходимо и достаточно $m = g$ работников.

Доказательство. Необходимость. Проследим ход выполнения работ проекта. Пока выполняется условие $m \ge g$, проект выполняется оптимальным образом (без простоев), т. е. $\Theta = T(K)$.

Пусть в момент наступления события v_k выполнено условие $\sum\limits_{i=1}^{k} \Delta d_i > m$, тогда $g_k - m$ работ в этот момент будут простаивать и начнут выполняться позже. С учетом леммы 1 получаем $\Theta > T(K)$.

Достаточность. Поскольку в любой момент времени не возникнет необходимости выполнять одновременно более g работ, то $m = g$ работников достаточно для работы без простоев. В случае $m > g$ один или более работников будут простаивать и без их участия продолжительность выполнения проекта не увеличится, т. е. $\Theta = T(K)$. Теорема доказана.

Замечание. На практике, если работы имеют резерв времени, некоторые из них можно распараллелить и таким образом уменьшить количество параллельных работ [4].

Заключение. Рассмотренная теорема позволяет по структуре сети оценить количество работников для выполнения проекта при условии, что критический путь не удлинился из-за простоев части работ в какой-то промежуток времени в связи с занятостью всех исполнителей на других работах. Также теорема позволяет оценить это количество таким образом, чтобы каждый запланированный исполнитель принял участие в выполнении проекта, т. е. чтобы не оказалось незадействованных работников.

Количество параллельных работ в проекте, т. е. работ, которые можно выполнять одновременно, влияет на общую численность привлекаемых к работе над проектом исполнителей. Это количество зависит как от очередности выполнения работ (структуры сети), так и от производительностей труда работников (весов дуг графа).

Список литературы

1. Плескунов М. А. Задачи сетевого планирования. Екатеринбург: Уральский ун-т, 2014. 92 с.
2. Буснюк Н. Н., Черняк А. А. Математическое моделирование. Минск: Беларусь, 2014. 216 с.
3. Буснюк Н. Н. Разновидности задачи сетевого планирования, некоторые методы их решения и алгоритмические оценки // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2019. № 2. С. 101–104.
4. Буснюк Н. Н., Новиков В. А. Метод оптимального решения задачи о назначениях в сетевом планировании // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 170–172.

References

1. Pleskunov M. A. *Zadachi setevogo planirovaniya* [Network planning problems]. Ekaterinburg, Ural'skiy universitet Publ., 2014. 92 p.
2. Busnyuk N. N., Chernyak A. A. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling]. Minsk, Belarus' Publ., 2014. 216 p.
3. Busnyuk N. N. Varieties of the network planning problem, some methods of their solution and algorithmic estimates. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physies and Mathematics. Informatics. 2019, no. 2, pp. 101−104 (In Russian).
4. Busnyuk N. N., Novikov V. A. Optimal solution method of assignment problem in network planning. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6, Physies and Mathematics. Informatics, pp. 170−172 (In Russian).

Информация об авторе

Буснюк Николай Николаевич − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

Information about the author

Busnyuk Nikolay Nikolaevich − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

Поступила после доработки 01.12.2020