УДК 514.144

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ. КОМПЛЕКСНЫЙ СЛУЧАЙ

Симплектическая геометрия – важный раздел современной дифференциальной геометрии. Целью данной работы является описание четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой над полем $\mathbb{C}$. В работе определены основные понятия: почти симплектическая структура, обобщенный модуль, виртуальная пара, изотропное представление, изотропно-точная пара, виртуальная структура. Приведен алгоритм классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой. С применением этого алгоритма проведено в явном виде описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств в комплексном случае. Алгоритмы, данные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях, а результаты, полученные в работе, могут найти приложения в различных отраслях математики и физики, в частности, симплектическое многообразие позволяет естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам, также аппарат симплектической геометрии переносится с геометрической оптики и классической механики и на квантовую механику.

Ключевые слова: алгебра Ли, однородное пространство, группа Ли, изотропное представление, почти симплектическая структура.

Для цитирования: Можей Н. П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 13–18.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

FOUR-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES WITH ALMOST SYMPLECTIC STRUCTURE. THE COMPLEX CASE

Symplectic geometry is an important branch of modern differential geometry. The purpose of the work is a description four-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure over the field $\mathbb{C}$. In the work the basic concepts are defined: almost symplectic structure, generalized module, virtual pair, isotropic representation, isotropically-faithful pair, virtual structure. The algorithm for classifying isotropically-faithful homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure is presented. Using this algorithm, we explicitly describe four-dimensional isotropically-faithful almost symplectic homogeneous spaces in the complex case. The algorithms described in the work can be computerized and used to solve similar problems in large dimensions. The results obtained in this paper can be applied in various areas of mathematics and physics, in particular, the symplectic manifold allows us to introduce Hamiltonian mechanics in a natural geometric way and provides a visual interpretation of many of its properties, the apparat of symplectic geometry is transferred from geometric optics and classical mechanics to quantum mechanics.

Key words: Lie algebra, homogeneous space, Lie group, isotropic representation, almost symplectic structure.

For citation: Mozhey N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case. *Proceedings of BSTU, issue* 3, *Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 13–18 (In Russian).

Введение. Симплектическая геометрия – важный раздел современной дифференциальной геометрии. Повышенный интерес к симплектическим многообразиям первоначально мотивируется важной ролью пуассоновских структур в гамильтоновой динамике, этот интерес возрождается после публикации фундаментальных трудов А. Лихнеровича [1], А. Кириллова [2], А. Вайнштейна [3] и др. Симплектическое многообразие – это многообразие с заданной на нем симплектической формой (замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой), оно позволяет естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам. Любая гладкая функция на симплектическом многообразии может использоваться для определения гамильтоновой системы. Соответствующая функция известна как гамильтониан, или энергетическая функция, а симплектическое многообразие называют фазовым пространством. Гамильтониан порождает специальное векторное поле на симплектическом многообразии – симплектическое векторное поле (также называется гамильтоновым векторным полем), оно порождает гамильтонов поток на многообразии. Интегральные кривые векторного поля являются однопараметрическим семейством преобразований многообразия с параметром времени, эволюция во времени задается симплектоморфизмами. Каждый симплектоморфизм сохраняет форму объема в фазовом пространстве (это следует из теоремы Лиувилля), множество симплектоморфизмов, порождаемых гамильтоновым потоком, и называют гамильтоновой механикой системы. Гамильтоново векторное поле также порождает специальную операцию – скобку Пуассона, которая действует на функции на симплектическом многообразии, таким образом придавая пространству функций на многообразии структуру алгебры Ли. Аппарат симплектической геометрии переносится с геометрической оптики и классической механики на квантовую механику.

Целью данной работы является классификация четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой над полем $\mathbb{C}$. В работе [4] автором проделан первый шаг такой классификации, а именно описаны подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, там же даны основные определения и приведено более подробное обоснование применяемых методов.

Основная часть. Пусть $(\overline{G},M)$ – четырехмерное однородное пространство, а $G=\overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Паре $(\overline{G},G)$ поставим в соответствие пару $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, где $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$ и $\mathfrak{g}$ – подалгебра в $\overline{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе Ли G.

Рассмотрим задачу классификации для заданной подалгебры $\mathfrak{g}$ с точностью до эквивалентности пар $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, у которых изотропное представление является инъекцией и сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$.

Назовем *обобщенным модулем* пару $(\mathfrak{g},U)$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, а U – $\mathfrak{g}$-модуль. Обобщенный модуль $(\mathfrak{g},U)$ является *точным,* если $\mathfrak{g}$-модуль U точен. *Размерностью обобщенного модуля* $(\mathfrak{g},U)$ считаем размерность векторного пространства U.

Пусть V – векторное пространство, а $\mathfrak{g}$ – подпространство в V. Пару $(V,\mathfrak{g})$ вместе с билинейной формой $B:\mathfrak{g}\times V\to V,(x,v)\mapsto x.v$ назовем *виртуальной парой,* если $\mathfrak{g}.\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}$, ограничение B на $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ задает на $\mathfrak{g}$ структуру алгебры Ли ($[x,y]=x.y$) и V – $\mathfrak{g}$-модуль относительно B. Любой виртуальной паре $(V,\mathfrak{g})$ можно сопоставить обобщенный модуль $(\mathfrak{g},V/\mathfrak{g})$, который будем называть *ассоциированным с виртуальной парой* $(V,\mathfrak{g})$. *Изотропное представление виртуальной пары* $(V,\mathfrak{g})$ – это отображение $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V/\mathfrak{g})$, определенное $\rho(x)(v+\mathfrak{g})=x.v+\mathfrak{g},\ v\in V,x\in\mathfrak{g}$. Виртуальная пара $(V,\mathfrak{g})$ является *изотропно-точной,* если гомоморфизм ρ – инъекция. Очевидно, что виртуальная пара $(V,\mathfrak{g})$ изотропно-точная тогда и только тогда, когда ассоциированный обобщенный модуль $(\mathfrak{g},V/\mathfrak{g})$ точен. Любая пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ может быть рассмотрена как виртуальная с обычным умножением, ограниченным на $\mathfrak{g}\times\overline{\mathfrak{g}}$. *Изотропное представление* $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ совпадает с изотропным представлением соответствующей виртуальной пары. Пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ является *изотропно-точной*, если ее изотропное представление – инъекция. В дальнейшем рассматриваются только такие пары. Будем называть однородное пространство $(M,\ \overline{G})$ *изотропно-точным*, если это можно сказать про пару $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$ произвольной точки $x\in M$ на T_xM имеет нулевое ядро.

Предположим, что $(\mathfrak{g},U)$ – обобщенный модуль и $q:\mathfrak{g}\to L(U,\mathfrak{g})$ – линейное отображение, такое, что

$$q([x,y])=x.q(y)-y.q(x),\quad x,y\in\mathfrak{g}.$$

Отображение q назовем *виртуальной структурой* на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$.

Для дальнейшей классификации потребуются некоторые утверждения.

Пусть q – виртуальная структура на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$. Положим $V_q=\mathfrak{g}\times U$. Тогда билинейное отображение $\mathfrak{g}\times V_q\to V_q$, заданное

$$x.(y,u)=([x,y]+q(x)(u),x.u),\quad x,y\in\mathfrak{g},u\in U,$$

определяет виртуальную пару $(V_q,\mathfrak{g})$.

Любой виртуальной структуре на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$ сопоставим указанную виртуальную пару $(\mathfrak{g}\times U,\mathfrak{g})$. Более того, любая виртуальная пара $(V,\mathfrak{g})$, ассоциированная с обобщенным модулем $(\mathfrak{g},U)$, может быть получена таким способом. Пусть q_1 и q_2 – виртуальные структуры на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$. Будем говорить, что q_1 и q_2 *эквивалентны*, если виртуальные пары $(V_{q_1},\mathfrak{g})$ и $(V_{q_2},\mathfrak{g})$ изоморфны, т. е. если существует изоморфизм векторных пространств $H:V_{q_1}\to V_{q_2}$ такой, что $H(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$ и $H(x.v)=H(x).H(v)$ для всех $x\in\mathfrak{g},v\in V_{q_1}$.

Пусть q_1 и q_2 – виртуальные структуры на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$ и существует отображение $h\in L(U,\mathfrak{g})$ такое, что $q_1(x)-q_2(x)=x.h$ для всех $x\in\mathfrak{g}$. Тогда виртуальные структуры q_1 и q_2 эквивалентны.

Получаем, что классификация (с точностью до изоморфизма) всех виртуальных пар $(V,\mathfrak{g})$ для данного обобщенного модуля $(\mathfrak{g},U)$ сводится к классификации всех виртуальных структур на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$ (с точностью до эквивалентности).

Пусть $(\mathfrak{g},U)$ – точный четырехмерный обобщенный модуль, $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ $(n=\dim\mathfrak{g})$ и $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ – базис векторного пространства U. Для $x\in\mathfrak{g}$ через $A(x)$ и $B(x)$ обозначим матрицы отображений $adx:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ и $x_U:U\to U$ в базисах E и U соответственно. Тогда отображение $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$, $x\mapsto B(x)$ – инъекция. Это позволяет отождествить алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с некоторой подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$. Можно отождествить множество отображений $q:\mathfrak{g}\to L(U,\mathfrak{g})$ со множеством отображений $C:\mathfrak{g}\to Mat_{n\times4}(\mathbb{C})$, где $C(x)$ – матрица отображения $q(x)$ в базисе, зафиксированном ранее. Отображение $C:\mathfrak{g}\to Mat_{n\times4}(\mathbb{C})$ также будем называть виртуальной структурой на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$, если соответствующее отображение q – виртуальная структура.

Чтобы отображение $C:\mathfrak{g}\to Mat_{n\times4}(\mathbb{C})$ было виртуальной структурой на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$, необходимо и достаточно

$$C([x,y])=A(x)C(y)-C(y)B(x)-$$
$$-A(y)C(x)+C(x)B(y),\quad x,y\in\mathfrak{g}.$$

Пусть C_1 и C_2 – виртуальные структуры на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$ и существует матрица $H\in Mat_{n\times4}(\mathbb{C})$ такая, что для всех $x\in\mathfrak{g}$ выполняется условие

$$C_1(x)-C_2(x)=A(x)H-HB(x).$$

Тогда C_1 и C_2 эквивалентны.

Отметим, что все выписанные выражения линейны по $x,y\in\mathfrak{g}$. Поэтому, чтобы гарантировать, что эти условия выполняются для всех $x,y\in\mathfrak{g}$, достаточно проверить, что они выполняются для $x,y\in E=\{e_1,\dots,e_n\}$.

Пусть $(V,\mathfrak{g})$ – виртуальная пара и $(\mathfrak{g},U)$, где $U=V/\mathfrak{g}$ – обобщенный модуль, ассоциированный с $(V,\mathfrak{g})$.

Пусть $\mathfrak{h}$ – нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Чтобы $\mathfrak{h}$-модуль V был прямой суммой примарных компонент, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{h}$-модули $\mathfrak{g}$ и U являлись прямой суммой примарных компонент; существует сечение $s:U\to V$ канонической сюръекции $\pi:V\to U$ такое, что для любого $\alpha\in\mathfrak{h}^*$ выполняется $s(U^\alpha(\mathfrak{h}))\subset V^\alpha(\mathfrak{h})$.

Пусть s – сечение канонической сюръекции $\pi:V\to U$. Будем говорить, что s *соответствует подалгебре* $\mathfrak{h}$, если $s(U^\alpha(\mathfrak{h}))\subset V^\alpha(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha\in\mathfrak{h}^*$. Из предыдущего утверждения следует, что такое сечение всегда существует.

Предположим, что s (сечение канонической сюръекции $\pi:V\to U$) соответствует подалгебре $\mathfrak{h}$. Тогда соответствующая виртуальная структура $q_s:\mathfrak{g}\to L(U,\mathfrak{g})$ на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$ удовлетворяет условию

$$q_s(\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}))(U^\beta(\mathfrak{h}))\subset\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(\mathfrak{h}),\ \alpha,\beta\in\mathfrak{h}^*.$$

Будем говорить, что виртуальная структура q на $(\mathfrak{g},U)$ *примарна* (относительно $\mathfrak{h}$), если q удовлетворяет этому условию. Из двух предыдущих утверждений следует, что любая виртуальная структура эквивалентна некоторой примарной виртуальной структуре.

Пусть q – примарная (относительно $\mathfrak{h}$) виртуальная структура на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$ и $(V_q,\mathfrak{g})$ – соответствующая виртуальная пара. Тогда $V_q^\alpha(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})\times U^\alpha(\mathfrak{h})$, $\alpha\in\mathfrak{h}^*$.

Виртуальную пару $(V,\mathfrak{g})$ называем *тривиальной,* если существует подмодуль U $\mathfrak{g}$-модуля V такой, что $V=U\oplus\mathfrak{g}$. Тривиальная виртуальная пара $(V,\mathfrak{g})$ однозначно определяется (с точностью до изоморфизма) соответствующим обобщенным модулем $(\mathfrak{g},V/\mathfrak{g})$.

Пусть q – виртуальная структура на обобщенном модуле $(\mathfrak{g},U)$. Чтобы виртуальная пара $(V_q,\mathfrak{g})$ была тривиальной, необходимо и достаточно, чтобы q было эквивалентно нулевому отображению $\mathfrak{g}$ в $L(U,\mathfrak{g})$. Если $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, то любая виртуальная пара $(V,\mathfrak{g})$ тривиальна.

Пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называем *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{g}}$. Если $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – тривиальная пара, то соответствующая виртуальная пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ также тривиальна, но не наоборот. Тривиальная пара определяется однозначно (с точностью до эквивалентности) соответствующим обобщенным модулем $(\mathfrak{g},\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g})$.

Пусть $V=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ – $\mathfrak{g}$-модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $B(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить

$$(x.b)(v_1,v_2)=-b(x.v_1,v_2)-b(v_1,x.v_2),$$

где $x\in\mathfrak{g}$, $v_1,v_2\in V$, $b\in B(V)$. *Почти симплектической структурой на $\mathfrak{g}$-модуле V* называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b\in B(V)$ такая, что $x.b=0$ для всех $x\in\mathfrak{g}$. Другими словами, $b\in B(V)^{\mathfrak{g}}$.

Пусть B – матрица симплектической структуры в базисе пространства V, а A_x – матрица элемента $x\in\rho(\mathfrak{g})$ в том же базисе. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ допускает почти симплектическую структуру, если выполняется следующее свойство:

$$A_x^t \cdot B + B \cdot A_x = 0, \quad \forall x \in \rho(\mathfrak{g}). \qquad (1)$$

Существует единственная (с точностью до сопряженности) невырожденная кососимметрическая билинейная форма b [5]. Множество всех эндоморфизмов пространства V, сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму b, является алгеброй Ли. Эта алгебра Ли обозначается $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, она представима в следующем виде:

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & u & w \\ z & t & w & v \\ s & p & -x & -z \\ p & r & -y & -t \end{pmatrix} \right| x, y, z, t, u, v, s, w, p, r \in \mathbb{C} \right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$.

Принимая во внимание вышеизложенное, решение проблемы классификации четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой разобьем на следующие части:

1. Классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр $\mathfrak{g},^{\mathbb{C}}$ удовлетворяющих (1), что равносильно классификации (с точностью до сопряженности) подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$.

2. Для каждой подалгебры $\mathfrak{g}$ из пункта 1 производим классификацию (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

3. Для каждой пары $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ находим (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Мы ограничиваемся в данной работе случаем, при котором множество нильпотентных элементов алгебры $\rho(\mathfrak{g})$ отлично от $\rho(\mathfrak{g})$.

Описание пункта 1 приведено в работе [4]. Для ссылки на подалгебры, полученные в [4], будем использовать следующее обозначение: d.n, где d – размерность подалгебры, а n – ее порядковый номер. Будем говорить, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет тип ($d.n$), если изотропное представление пары сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$, имеющей номер ($d.n$). Остановимся подробнее на классификации изотропно-точных пар из пункта 2.

В качестве примера классификации пар с заданным изотропным представлением рассмотрим пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.9, т. е. имеющие подалгебру $\mathfrak{g}$ следующего вида:

$$\begin{bmatrix} x & & & \\ & y & & \\ & & -x & \\ & & & -y \end{bmatrix}.$$

Теорема. *Любая пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *типа 2.9 эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-e_2$	0	0

Действительно, пусть $(\mathfrak{g}, U)$ – точный обобщенный модуль; $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис пространства U; $\{e_1, e_2\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{h} = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2$ – нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $(V, \mathfrak{g})$ – виртуальная пара, определенная линейным отображением $q : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(U, \mathfrak{g})$ (т. е. билинейное отображение $B : \mathfrak{g} \times V \to V$ имеет вид

$$x.(y,u) = ([x,y] + q(x)(u), x.u)$$

для всех $x, y \in \mathfrak{g}, u \in U$). Без ограничения общности мы можем считать q примарным. Так как

$$\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2,$$

$$U^{(1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_1, U^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_2,$$

$$U^{(-1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_3, U^{(0,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_4,$$

то $C(e_1) = C(e_2) = 0$. Мы можем считать, что соответствующая виртуальная пара тривиальна и

$$[e_1,u_1] = u_1, [e_1,u_2] = 0, [e_1,u_3] = -u_3, [e_1,u_4] = 0;$$

$$[e_2,u_1] = 0, [e_2,u_2] = u_2, [e_2,u_3] = 0, [e_2,u_4] = -u_4.$$

Так как отображение $q:\mathfrak{g}\to\mathcal{L}(U,\mathfrak{g})$, соответствующее виртуальной паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, примарно, то $\bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})\times U^{\alpha}(\mathfrak{h})\forall\ \alpha\in\mathfrak{h}^*$. Из того, что

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{C}e_1+\mathbb{C}e_2,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{C}u_1,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{C}u_2,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-1,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{C}u_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{C}u_4,$$

следует

$$[u_1,u_2]=0, \qquad [u_2,u_3]=0,$$
$$[u_1,u_3]=b_1e_1+b_2e_2, \qquad [u_2,u_4]=f_1e_1+f_2e_2,$$
$$[u_1,u_4]=0, \qquad [u_3,u_4]=0.$$

Проверяя тождества Якоби на векторах e_i,u_j,u_k $(1\le i\le 2,\ 1\le j<k\le 4)$ и u_i,u_j,u_k $(1\le i<j<k\le 4)$, получаем, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	b_1e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	f_2e_2
u_3	u_3	0	$-b_1e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-f_2e_2$	0	0

Рассмотрим следующие случаи:

1. $b_1=f_2=0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1,\mathfrak{g}_1)$.

2. $b_1^2+f_2^2\neq 0, b_1f_2=0$. Отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}'\to\bar{\mathfrak{g}}$ такое, что

$$\pi(e_1)=e_2,\pi(e_2)=e_1,\pi(u_1)=u_2,\pi(u_2)=u_1,$$
$$\pi(u_3)=u_4,\pi(u_4)=u_3,$$

устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$, где последняя имеет следующий вид:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	f_2e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	b_1e_2
u_3	u_3	0	$-f_2e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-b_1e_2$	0	0

Тогда без ограничения общности можно считать, что $b_1\neq 0,\ f_2=0$ и пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2,\mathfrak{g}_2)$ при помощи отображения $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_1)=e_1,\pi(e_2)=e_2,\pi(u_1)=\frac{1}{b_1}u_1,$$
$$\pi(u_2)=u_2,\pi(u_3)=u_3,\pi(u_4)=u_4.$$

3. $b_1f_2\neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_3,\mathfrak{g}_3)$ при помощи отображения $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_3\to\bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_1)=e_1,\pi(e_2)=e_2,$$
$$\pi(u_1)=\frac{1}{b_1}u_1,\pi(u_2)=\frac{1}{f_2}u_2,$$
$$\pi(u_3)=u_3,\pi(u_4)=u_4.$$

Так как $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D\bar{\mathfrak{g}}_2\neq\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3$, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1,\mathfrak{g}_1)$, $(\bar{\mathfrak{g}}_2,\mathfrak{g}_2)$, $(\bar{\mathfrak{g}}_3,\mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны.

Применяя аналогичные рассуждения для всех остальных случаев, получаем искомый результат классификации пар над полем $\mathbb{C}$.

Заключение. Приведен алгоритм классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой. С применением этого алгоритма проведено в явном виде описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств в комплексном случае. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях, а результаты, полученные в работе, могут найти приложения в различных отраслях математики и физики.

Список литературы

1. Lichnerowicz A. Les vari´et´es de Poisson et leurs alg`ebres de Lie associ´ees // Journal Differential Geometry. 1977. No. 2. P. 253–300.

2. Кириллов А. А. Локальные алгебры Ли // Успехи математических наук. 1976, № 4 (190). С. 57–76.

3. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // Journal Differential Geom. 1983. No. 3. P. 523–557.

4. Можей Н. П. Почти симплектические однородные пространства // Труды БГТУ. Сер. 6, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. № 6. С. 17–20.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

References

1. Lichnerowicz A. Les vari´et´es de Poisson et leurs alg`ebres de Lie associ´ees. *Journal Differential Geometry*, 1977, no. 2, pp. 253–300.

2. Kirillov A. A. Local Lie algebras. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Success math. sciences], 1976, no. 4 (190), pp. 57–76 (In Russian).

3. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds. *Journal Differential Geometry*, 1983, no. 3, pp. 523–557.

4. Mozhey N. P. Almost simplexic homogeneous spaces. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2009, no. 6, pp. 17–20 (In Russian).

5. Gantmacher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 552 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 09.11.2020