НАУЧНЫЕ СТАТЬИ
SCIENCE ARTICLES

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.977

В. В. Горячкин[1], В. В. Крахотко[1], Н. И. Широканова[1], В. В. Игнатенко[2]
[1]Белорусский государственный университет
[2]Белорусский государственный технологический университет

УПРАВЛЕНИЕ АНСАМБЛЕМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ

Для линейной системы с запаздыванием по управлению с постоянными интервальными коэффициентами (ансамбля систем) получены внешние оценки решений. Исследована задача управляемости ансамблем – перевод пучка траекторий системы из одного множества из R^n в другое за конечное время в классе кусочно-постоянных управлений. В случае интервальной неопределенности нахождение управления сведено к решению задачи линейного программирования, сформулированной по коэффициентам систем ансамбля. Доказаны условия управляемости ансамблем, которые представлены в форме оптимизационной задачи.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, управляемость, интервальный анализ, линейная система с запаздыванием.

Для цитирования: Горячкин В. В., Крахотко В. В., Широканова Н. И., Игнатенко В. В. Управление ансамблем линейных систем с запаздыванием по управлению в классе кусочно-постоянных функций // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 5–8.

V. V. Goryachkin[1], V. V. Krakhotko[1], N. I. Shirokanova [1], V. V. Ignatenko[2]
[1]Belarusian State University
[2]Belarusian State Technological University

CONTROL OF AN ENSEMBLE OF LINEAR SYSTEMS WITH A DELAY IN CONTROL IN THE CLASS OF PIECEWISE CONSTANT FUNCTIONS

For a linear system with a delay in control with constant interval coefficients (ensemble of systems), external estimates of solutions are obtained. The task of controllability of an ensemble is studied – the translation of a bundle of system trajectories from one R^n set to another in a finite time in the class of piecewise constant controls. In the case of interval uncertainty the control finding is reduced to solving a linear programming problem formulated due to the ensemble systems coefficients Conditions for the controllability of an ensemble, which are presented in the form of an optimization problem, are proved.

Key words: system of differential equations, controllability, interval analysis, linear system with delay.

For citation: Goryachkin V. V., Krakhotko V. V., Shirokanova N. I., Ignatenko V. V. Control of an ensemble of linear systems with a delay in control in the class of piece-wise constant fnctios. *Proseedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 5–8 (In Russian).

Введение. Во многих задачах теории оптимального управления, теории систем параметры исследуемых уравнений известны лишь с некоторой точностью, а именно известны лишь интервалы, в которых они принимают значения. В этом плане интервальные модели можно рассматривать как эффективное средство описания широкого круга явлений с неопределенностями. Интервальная модель представляется как континуум моделей с параметрами, принимающими значения из допустимых интервалов. Подход исследования таких интервальных моделей состоит в нахождении одного приемлемого детерминированного решения для всего континуума моделей. Изучение интервальных моделей важно и перспективно для многих прикладных задач, таких как задачи управляемости, стабилизации и т. п. Это приводит к необходимости исследования динамических систем с интервальными коэффициентами [1–6] на управляемость.

В данной статье исследуется управляемость ансамбля систем с запаздыванием по управлению, для которых получены достаточные условия управляемости.

Основная часть. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2u(t-h), \\ x(0) = x_*, \in X^*, x(t^*) = x^* \in X^*, \\ u(\cdot) = \{u(t) \equiv 0, t \in [-h, 0]\}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, $X^*, X_* \subset R^n$; $A \in R^{n\times n}$, $B_1, B_2 \in R^{n\times r}$ – неопределенные матрицы со значениями в замкнутых интервалах

$$\underline{A} \le A \le \overline{A},\ \underline{B}_1 \le B_1 \le \overline{B}_1,\ \underline{B}_2 \le B_2 \le \overline{B}_2; \quad (2)$$

t^* – фиксированный момент времени; $h > 0$ – число (запаздывание). Матричные и векторные неравенства следует понимать поэлементно. Множества

$$X_* = \{x \in R^n : \underline{x}_* \le x_* \le \overline{x}_*\},$$

$$X^* = \{x \in R^n : \underline{x}^* \le x^* \le \overline{x}^*\} –$$

это заданные параллепипедные множества (брусы в R^n) [2].

Матрицы A, B_1, B_2, удовлетворяющие (2), будем называть допустимыми.

Ансамблем систем будем называть совокупность систем вида (1), коэффициенты которых – допустимые матрицы, принимающие значения в интервалах (2) независимо друг от друга.

Введем кусочно-постоянные управления

$$u(t) = u^k, \tau_{k-1} \le t < \tau_k, k = 1, 2, ..., s \quad (3)$$

с фиксированными моментами разрыва первого рода $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_s = t^*$, векторы $u^1, u^2, ..., u^s$ принадлежат множеству $U \subset R^r$, которое определяется конечной системой линейных неравенств.

Обозначим через $X(t) \in R^n$ множество фазовых состояний $x(t)$ ансамбля (1) для некоторого кусочно-постоянного управления $u(t)$ в момент времени t, $0 \le t \le t^*$, с начальным состоянием $x_* = x(0) \in X_*$ при любых допустимых матрицах A, B_1, B_2.

Ставится следующая задача: для любого начального состояния из множества X_* определить кусочно-постоянное управление (3) (одно и то же для всех систем ансамбля), при котором выполняется включение $X(t^*) \subset X^*$. Если поставленная задача разрешима в этом смысле, то будем говорить об управляемости ансамбля. Очевидно, что поставленная задача имеет решение лишь в исключительных случаях.

Рассмотрим систему (1) с допустимыми матрицами A, B_1, B_2, условиями $x_* \in X_*, x^* \in X^*$ $x^* \in X^*$ и произвольным кусочно-постоянным управлением $u(t), t \in [0, t^*]$. По формуле Коши имеем

$$x(t^*) = F(t^*, 0)x_0 + \int_0^{t^*} F(t^*, \tau) \times$$

$$\times [B_1u(\tau) + B_2u(\tau - h)]d\tau = F(t^*, 0)x_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} \left(\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [F(t^*, \tau)B_1 + F(t^*, \tau + h)B_2]d\tau \right) u^k,$$

где $F(t^*, \tau) = e^{A(t^* - \tau)}$ – фундаментальная матрица однородной системы удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t^*, \tau)}{\partial \tau} = -F(t^*, \tau)A$$

с начальными условиями

$$F(t^*, t^* - 0) = E_n, F(t^*, \tau) \equiv 0, \tau \ge t^* + 0.$$

Обозначим

$$d = F(t^*,0)x_*, C_k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [F(t^*,\tau)B_1 +$$

$$+ F(t^*,\tau+h)B_2]d\tau = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F(t^*,\tau)d\tau(B_1 +$$

$$+ e^{-Ah}B_2) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F(t^*,\tau)d\tau B, k=\overline{1,s}.$$

Тогда очевидно, что множество векторов $x(t^*)$ ансамбля систем (1) в момент времени $t=t^*$, отвечающее всем допустимым A, B_1, B_2 и начальному состоянию x_*, образует множество $X(t^*)$.

Можно показать, используя процедуры оценивания произведения интервальных матриц [5, с. 68], что матрица $B = B_1 + e^{-Ah}B_2$ принимает значение из замкнутого интервала $[B_0 - \Delta B, B_0 + \Delta B]$ (задан в симметричной форме) и интервальные оценки вектора d и матриц C_k имеют вид

$$\underline{d} \le d \le \overline{d}, \underline{C}_k \le C_k \le \overline{C}_k, k = 1,2,...,s, \quad (4)$$

где $\underline{d}, \overline{d}, \underline{C}_k, \overline{C}_k$ определяются по формулам (17)–(20) из работы [4].

Матричные интервалы (4) можно также представить в симметричной форме [2]:

$$[C_k] = [\underline{C}_k, \overline{C}_k] = [C_{0k} - \Delta C_k, C_{0k} + \Delta C_k],$$
$$k = 1,2,...,s,$$

где $C_{0k} = (\overline{C}_k + \underline{C}_k)/2$ – центр и $\Delta C_k = (\overline{C}_k - \underline{C}_k)/2$ – радиус интервальной матрицы $[C_k]$.

Тогда внешняя интервальная оценка [6, с. 55] множества $X(t^*)$ примет вид

$$\underline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k - \Delta C_k\left|u^k\right|\right) \le x \le$$
$$\le \overline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k + \Delta C_k\left|u^k\right|\right), \quad (5)$$

где $\left|u^k\right|$ понимается как вектор модулей координат вектора u^k.

Пусть $\varepsilon \ge 0, \varepsilon \in R^n$ – любой вектор. Обозначим $X_\varepsilon^* = \{x \in R^n : x^* - \varepsilon \le x \le x^* + \varepsilon\}$ замкнутую ε-окрестность бруса X^*.

Из полученной оценки (5), следует, что $X(t^*) \subset X_\varepsilon^*$ имеет место тогда, когда

$$\begin{aligned} &\underline{d} + \sum_{i=1}^{n}(C_{0k}u^k - \Delta C_k\left|u^k\right|) \ge \underline{x}^* - \varepsilon, \\ &\overline{d} + \sum_{i=1}^{n}(C_{0k}u^k + \Delta C_k\left|u^k\right|) \le \overline{x}^* + \varepsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

Составим по условиям (6) задачу нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n \to \min, \\ &\underline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k - \Delta C_k\left|u^k\right|\right) \ge \underline{x}^* - \varepsilon, \\ &\overline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k + \Delta C_k\left|u^k\right|\right) \le \overline{x}^* + \varepsilon, \\ &\varepsilon \ge 0, u^k \in U, k = \overline{1,s}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, в задаче (7) ищется управление (3), для которого внешняя оценка множества $X(t^*)$ находится в минимальной ε-окрестности бруса X^* (под минимальностью ε-окрестности бруса понимается окрестность бруса с минимальной нормой вектора $\varepsilon : \|\varepsilon\| = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$.

Очевидно, задачу (7) можно переписать в виде следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} &e' \cdot \varepsilon \to \min, \\ &-\sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k - \Delta C_k w^k\right) - \varepsilon \le \underline{d} - \underline{x}^*, \\ &\overline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k + \Delta C_k w^k\right) - \varepsilon \le \overline{d} + \overline{x}^*, \\ &\varepsilon \ge 0, -w^k \le u^k \le w^k, u^k \in U, w^k \ge 0, \\ &k = \overline{1,s}, e' = (1,1,...,1), \end{aligned} \quad (8)$$

где неизвестными будут ε и $u^k, w^k, k = \overline{1,s}$.

Ясно, что в задаче (8) множество планов не пусто и целевая функция ограничена на нем снизу – значит, решение задачи (8) существует.

Следовательно, откорректированная постановка задачи управляемости ансамбля (1) звучит так: для любого начального состояния из множества X_* определить кусочно-постоянное управление (одно и то же для всех систем ансамбля) и минимальный ε-брус множества X^*, что выполняется включением $X(t^*) \subset X_\varepsilon^*$.

Поэтому справедлива теорема.

Теорема. Для управляемости ансамбля систем (1) в классе кусочно-постоянных функций достаточно, чтобы разрешимая задача линейного программирования (8) имела оптимальный план $(\varepsilon^0, u^{k0}, w^{k0}, k = \overline{1,s})$. В этом случае соответствующее управление переводит пучок траекторий системы из X_* в минимальную ε^0-окрестность бруса X^*. Если в решении $\varepsilon^0 = 0$, то задача решается точно.

Заключение. Полученные достаточные условия управляемости интервальной системы с запаздыванием по управлению гарантируют попадание пучка траекторий системы (1) в ε^0-окрестность бруса X^*. Этот результат можно перенести на более сложные объекты, например, интервальные системы с запаздыванием по состоянию.

Список литературы

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. С. 392.
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. С. 356.
3. Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2014. № 3. С. 5–8.
4. Гайшун И.В., Горячкин В. В. Робастная и интервальная наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2016. № 2. С. 6–9.
5. Ащепков Л. Т. Управляемость интервальной линейной дискретной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 67–74.
6. Ащепков Л. Т. Внешние оценки и ступенчатая управляемость интервальной линейной системы // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 51–56.

References

1. Kurzhanski A. B. *Upravleniye i nablydeniye v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 392 p.
2. Alefel'd G., Herzberger Yu. *Vvedeniye v interval'nyye vychisleniya* [Introduction to interval calculations]. Moscow, Mir Publ., 1987. 356 p.
3. Gaishun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V. Estimation of solutions of a two-parameter discrete system with interval coefficients. *Vesti NAN Belarusi* [Bulletin of the NAS of Belarus], series Physics and Mathematics, 2014, no. 3, pp. 5–8 (In Russian).
4. Gaishun I. V., Goryachkin V. V. Robust and interval observability of two-parameter discrete systems with interval coefficients. *Vesti NAN Belarusi* [Bulletin of the NAS of Belarus], series Physics and Mathematics, 2016, no. 2, pp. 6–9 (In Russian).
5. Aschepkov L. T. Controllability of an interval linear discrete system. *Izvestiya RAN. Theorii i sistemy upravleniya* [News RAS. Theory and control systems], 2007, no. 3, pp. 67–74 (In Russian).
6. Aschepkov L. T. External estimations and step control of an interval linear system. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and telemechanics], 2008, no. 4, pp. 51–56 (In Russian).

Информация об авторах

Горячкин Владимир Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры технологий программирования. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: gorvv@bsu.by

Крахотко Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры методов оптимального управления. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: krakhotko@bsu.by

Широканова Наталья Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики и информатики. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: shirokanova@bsu.by

Игнатенко Василий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Information about the authors

Goryachkin Vladimir Viktorovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Programming Technologies. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gorvv@bsu.by

Krakhotko Valeriy Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Optimal Control Methods. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krakhotko@bsu.by

Shirokanova Natalia Ivanovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of General Mathematics and Computer Science. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shirokanova@bsu.by

Ignatenko Vasiliy Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Поступила после доработки 30.11.2020