УДК 519.872

О. Ф. Зирко, лаборант; В. И. Кудрявцев, д-р техн. наук

РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕБОВАНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

In the article it is the estimation of probability in complex structures of Queuing systems. The analyze look unconcerned that complex probabilities of Queuing systems transgress the bounds of common valuations. Most of all the complex probabilities are not formed the complex structures of Queuing systems. The gave problem of that probabilities were the receipts of real probability in complex model. The great purpose of the work was the definition of probability in real form by complex stream of statistics. As instrument of estimations were created the new classification of catastrophes for control models. Catastrophes decide the estimation of probability in space of Queuing models. At Queuing systems with complex stream the probability received the real function. The results helped to analyze the effective quality and to create the complex queuing models in real spaces.

Введение. В работе [1] показано, что при использовании в системах массового обслуживания (СМО) требований с комплексным показателем вероятность реализации, которая рассчитана с применением традиционного подхода, описанного, например, в [2, 3], также имеет комплексную форму. Представление комплексной вероятности реализации требований, с одной стороны, выходит за пределы общепринятых оценок СМО и является неопределенной. С другой стороны, структурообразующим в комплексной модели СМО [4] считается комплексный показатель реализации требований, представляющий собой набор координат СМО, связанных в единый комплекс. Однако комплексная форма вероятности реализации не является структурообразующей, что ограничивает возможности применения.

Для сохранения преемственности анализа СМО существует необходимость расчета вероятности реализации требований в вещественной форме при комплексном показателе требований СМО. Основная цель данной статьи – вывести полную вещественную вероятность реализации требований при комплексном представлении показателя реализации требований.

Основная часть. Полную вероятность реализации $P\{A\}$ множества случайных событий $\{A\}$ в СМО можно представить в следующем виде:

$$P\{A\} = 1 - \sum_{k=0}^{\eta(t)} \sum_{m=1}^{N} R_k^m(t,\ Q), \qquad (1)$$

где $R_k^m(t,\ Q)$ – вероятность катастроф k требований (k = 1…) m-го типа (m = 1 – N), набор которых составляет исследуемое пространство Q в момент времени t. Учитывая комплексность пространства, введем отраженную на рисунке следующую классификацию катастроф:

1) агрегационные катастрофы требований – катастрофы требований, связанные с выходом агрегации компонентов показателей требований очереди за пределы ограничений, наложенных на данный тип агрегации в данной очереди (например, на сумму по какой-либо из компонент показателей требований в данной очереди);

2) индивидуальные катастрофы требований – катастрофы требований, связанные с выходом показателя требования за пределы ограничений, наложенных на каждый показатель требования в данной СМО.

Последние в свою очередь могут быть подразделены на следующие:

– индивидуальные катастрофы неполноты требований – катастрофы требований, показатели которых выходят за пределы области допустимых неопределенностей, т. е. содержат недопустимые сочетания пустых значений в показателях требований;

– индивидуальные катастрофы требований по отдельным компонентам показателя требований – индивидуальные катастрофы, связанные с выходом показателей требований за пределы ограничений, наложенных на отдельные компоненты показателя требований;

– индивидуальные катастрофы требований по агрегациям компонентов показателей требований – индивидуальные катастрофы, связанные с выходом агрегаций компонентов показателей требований за пределы соответствующих ограничений.

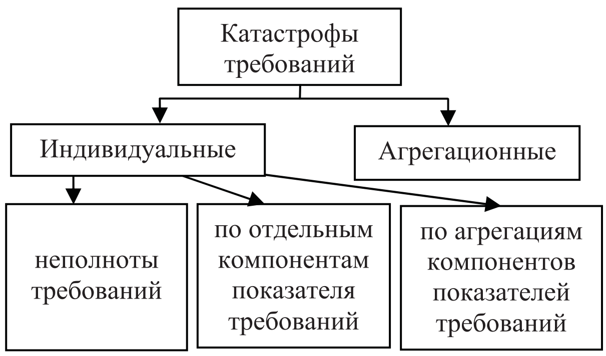

Рисунок. Классификация катастроф требований

Поскольку данное разнообразие катастроф определяется посредством сопоставления показателя требования с системой ограничений, налагаемой на данный показатель, то система анализа катастроф может быть представлена в виде СМО, требования которой отображают показатели требований анализируемой СМО. Количество обслуживающих приборов n в СМО совпадает с максимально возможным появлением катастроф в момент времени t. При этом в момент времени t может произойти только одна катастрофа, таким образом, СМО однолинейна ($n = 1$).

Система разделяется на k-е число требований на периоде занятости (ПЗ) основной СМО. При этом вещественная часть показателя требования равна $T_k(t)$. В систему поступают $m = N(t)$ заявок – катастроф. Если рассматривать вероятности переходов из состояний m в состояние j на ПЗ относительно катастроф, то можно считать, что представленный выше процесс близок к описанию процесса с «нетерпеливыми» требованиями, который достаточно часто используется при анализе классических систем. Однако в отличие от классических систем ПЗ заключаются в пространство размером $Q(t)$, функция распределения (ФР) которого равна $L(Q)$:

$$L(Q) = P\{Q(t) < Q\}. \qquad (2)$$

Функция распределения на выбранном периоде занятости СМО совпадает со значением ФР входного пространства СМО, что приводит к упрощению структуры и позволяет пренебрегать незначимыми для анализа факторами. Поскольку проводится исследование вероятности появления катастроф требований, поэтому интенсивность поступления требований сопряженной СМО должна совпадать с λ интенсивностью поступления k-го требования основной СМО.

Функция распределения катастроф $G(t)$ по времени в зависимости от начального определения может быть фиксирована либо произвольна.

Процесс определяется следующим образом:

– при фиксированном $G(t)$

$$(N(t),\ Q(t),\ G(t));\ R_k^i(t,\ Q,\ T_k); \qquad (3)$$

– при произвольном $G(t)$:

$$(N(t),\ Q(t));\ R_k^i(t,\ Q,\ T_k). \qquad (4)$$

Обслужить требование в такой системе значит определить вероятность $R_k^m(t,\ Q,\ T_k)$ того, что на периоде занятости $T_k(t)$ с k-м требованием, поступившим в систему с временем t и занимающим пространство $Q(t)$, произойдет катастрофа m-го типа.

Определим вероятность $R_k^m(t,\ Q,\ T_k)$. При наступлении катастрофы m с требованием k, поступившим в СМО в момент t, на периоде $T_k(t)$ за время Δt произойдут изменения пространства на ΔQ единиц, которые вызовут переход в состояние $J(t + \Delta t,\ Q + \Delta Q) = j$, если в момент $t = 0$ система находилась в состоянии $J(0,\ Q) = m$.

Процесс (3), (4) описывается следующим образом:

1) показатель требования $Z(t)$ представим в виде

$$Z(t) = T_k + iQ(t), \qquad (5)$$

где T_k, t, Q – характеристики комплексного показателя k-го требования; i – мнимая единица;

2) плотность распределения вероятности появления m катастроф:

$$m = 1 - N,$$

$$r_k^m(t,\ Q,\ T_k)dtdQ = P\{N(t) = m,\ t < T_k(t) < t + \Delta t,$$

$$Q^m < Q < Q^m + \Delta Q,\ J(t + \Delta t,\ Q + \Delta Q) =$$

$$= j / J(0,\ Q) = m\}; \qquad (6)$$

3) плотность функции распределения пространства:

$$l(Q)dQ = P\{Q < q < Q + \Delta Q\}; \qquad (7)$$

4) плотность функции распределения действующих катастроф:

$$g^m(t)dt = P\{t < g^m < t + \Delta t\}; \qquad (8)$$

5) совместная плотность распределения величин t и Q:

$$f(t,Q)dtdQ = P\{t \le g^m(t) \le t + \Delta t;$$

$$Q < q < Q + \Delta Q\}. \qquad (9)$$

Необходимо отметить, что совместная плотность распределения задает только предполагаемые связи между текущим временем «обслуживания» катастроф и окружающим пространством, поэтому при выборе зависимостей желательно ссылаться не на статистические данные, а на элементы прогноза. При отсутствии таковых в исследуемом процессе можно пренебречь наличием тех или иных катастроф и свести закон распределения к простейшему либо нормальному [5].

Вероятность того, что m катастрофа произошла с k-м требованием в пространстве (Q, $Q + dQ$) при изменении времени (t, $t + dt$):

$$\eta_k^m(t,Q) =$$

$$= r_k^m(t,Q,T_k)\left(1 - \int_{Q_1}^{Q_2}\int_0^t r_k^m(t,Q,T_k)l(Q)g^m(t)dtdQ\right)$$

или обратная формула

$$r_k^m(t,Q) =$$

$$= \eta_k^m(t,Q)\exp\left(-\int_{Q_1}^{Q_2}\int_0^t \eta_k^m(t,Q,T_k)l(Q)g^m(t)dtdQ\right).$$

Определим вероятности появления катастрофических требований через их плотности $r_k^m(t, Q, T_k)$, для нахождения которых составим систему дифференциальных уравнений. Для чего рассмотрим плотности вероятностей, с которыми объекты будут переходить из состояния m в состояние j за интервал времени $(t, t + \Delta t)$. Для любых связанных с катастрофами СМО должен существовать процесс ухода поступивших в систему требований, который можно характеризовать следующими плотностями вероятности.

1. Плотность вероятности $r_k^m(t, Q, T_k)$ изменения пространства ΔQ за промежуток времени Δt:

$$r_k^m(t + \Delta t, Q, T_k)\,\Delta Q,$$

либо

$$\lambda(N - m)\, r_k^m(t, Q, T_k)\,\Delta t\,\Delta Q.$$

2. Плотность вероятности $r_k^m(t, Q, T_k)$ находящихся во время Δt $m(\lambda + \mu)$ количества катастроф при изменении пространства на ΔQ:

$$m(\lambda + \mu)\, r_k^m(t, Q + \Delta Q, T_k),$$

или

$$-\eta_k^m(t, Q)\,\Delta t\Delta Q\, r_k^m(t, Q, T_k).$$

3. Плотность вероятности $r_k^m(t, Q, T_k)$ изменения времени Δt и пространства ΔQ:

$$r_k^m(t + \Delta t, Q + \Delta Q, T_k),$$

либо

$$-\lambda(N - m + 1)(1 - \delta^{m,0})r_k^{m-1}(t, Q, T_k).$$

Суммируя плотности вероятности, получим для любого $m = 1 - N$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&r_k^m(t, Q_k, T_k)\Delta Q_k + m(\lambda+\mu)r_k^m(t, Q_k, T_k)\Delta t + \\
&+ r_k^m(t, Q_k, T_k) = r_k^m(t+\Delta t, Q_k, T_k)\Delta Q_k + \\
&+ \lambda(N-m)r_k^m(t, Q_k, T_k)\,\Delta Q_k\Delta t + \\
&+ m(\lambda+\mu)r_k^m(t, Q_k + \Delta Q_k, T_k) + \\
&+ \eta_k^m(t, Q_k)\Delta t\Delta Q_k r_k^m(t, Q_k, T_k) + \\
&+ r_k^m(t+\Delta t, Q_k + \Delta Q_k, T_k) - \lambda(N-m+1)\times \\
&\times (1-\delta^{m,0})r_k^{m-1}(t, Q_k, T_k)\Delta t\Delta Q_k. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Выводы системы дифференциальных уравнений и других формул, указанных ниже, вследствие их объемности в данной статье не приводятся полностью. Для вывода авторы используют стандартные методы высшей математики. С целью получения системы дифференциальных уравнений функции плотности вероятности появления m катастроф для k-го требования в системе уравнений (10) компонуются по переменным времени t и пространства Q, делятся на значения Δt и ΔQ, а затем устремляются к их предельным значениям ($t \to \infty$, $Q \to \infty$). В результате для любого $m = 1 - N$ получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}r_k^m(t, Q, T_k) + m(\lambda+\mu)\frac{d}{dQ}r_k^m(t, Q, T_k) + \\
&+ \frac{d^2}{dtdQ}r_k^m(t, Q, T_k) = \\
&= -\lambda(N-m)r_k^m(t, Q, T_k) - \eta_k^m(t, Q)r_k^m(t, Q, T_k) + \\
&+ \lambda(N-m+1)(1-\delta^{m,0})r_k^{m-1}(t, Q, T_k). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Причем при $t = 0$

$$r_k^m(0, Q, T_k) = \delta^{m,0}\delta(T_k)l(Q). \qquad (12)$$

Определим граничные условия.

Вероятность того, что катастрофа произойдет сразу со всеми требованиями, равна нулю, т. е.

$$r_k^0(0, Q, T_k) = 0.$$

Поскольку в момент катастрофы требование покидает систему, то плотность закона распределения действующих катастроф и плотность распределения пространства выражаются через плотность распределения вероятности отсутствия катастроф $r_k^0(t, Q, T_k)$.

Если учитывать, что $b(T_k)$ представляет плотность вероятности обслуживания требований на периоде занятости T_k без катастроф, то

$$r_k^m(t, 0, T_k) = b(T_k)\times \int_0^t\int_{Q_1}^{Q_2} r_k^m(t, Q, T_k)\eta_k^m(t, Q)dQdt. \qquad (13)$$

Наличие переменных коэффициентов $\lambda\,(N - m)$ и $\eta_k^m(t, Q)$ на периоде занятости $T_k(t)$ усложняет применение метода производящих функций, который, как правило, используется при анализе классических СМО. Одним из методов решения данных уравнений являются «дискретные преобразования» [4], согласно которым можно предположить, что существует множество переменных $u_k^m(t, Q, T_k)$ таких, что для $0 \le m \le N$, $0 \le k \le n(t)$

$$u_k^m(t, Q, T_k) = \sum_{j=0}^{N}\binom{j}{m} r_k^{N-j}(t, Q, T_k), \qquad (14)$$

где $\binom{j}{m}$ – биноминальные коэффициенты, равные 0 при $j < m$.

Уравнения представляют систему совместных уравнений от N неизвестных, для которых существуют обратные преобразования

$$r_k^m(t, Q, T_k) = \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{N-m+l}{l} u_k^{N-m+l}(t, Q, T_k). \qquad (15)$$

Тогда система уравнений (11) примет вид

$$\left(\frac{d}{dt}+m(\lambda+\mu)\frac{d}{dQ}+\frac{d^2}{dtdQ}\right)u_k^{N-m+l}(t,\ Q,\ T_k)+$$
$$+\eta_k^m(t,\ Q)u_k^m(t,\ Q,\ T_k)=0. \qquad (16)$$

Решение уравнения (16) представимо в виде

$$u_k^m(t,\ Q,\ T_k)=\left(u_k^m(t,\ 0,\ T_k)+\binom{N-j}{m}g^m(t)l(Q)\right)\times$$
$$\times\ \exp(-m\lambda+T_k)t-\left(m\mu-T_k\right)mQ\Big)\times$$
$$\times\ \exp\left(-\int_0^t\int_{Q_1}^{Q_2}\eta_k^m(t,\ Q)l(Q)dQdt\right), \qquad (17)$$

где $u_k^m(t,\ 0,\ T_k)$ определяется с помощью граничного условия $Q = 0$ и начального условия (12).

Совместная плотность распределения величин t, Q рассчитывается по формуле

$$f(t,\ Q)=\int_0^t\int_{Q_1}^{Q_2}u_k^m(t,\ Q,\ T)\eta_k^m(t,\ Q)dQdt. \qquad (18)$$

Граничные условия могут быть записаны для функции $u_k^m(t,\ Q,\ T_k)$ с учетом совместной плотности распределения и плотности вероятности обслуживания требования на периоде занятости T_k:

$$u_k^m(t,\ 0,\ T_k)=b(T_k)\int_0^t\int_{Q_1}^{Q_2}u_k^m(t,\ Q,\ T_k)\eta_k^m(t,\ Q)dQdt-$$
$$-\binom{N}{m}g^m(t)l(0). \qquad (19)$$

Подставляя (19) в (17), решение примет вид

$$u_k^m(t,\ Q,\ T_k)=\left(b(T_k)f(t,\ 0)-\binom{N}{0}g^0(t)l(0)+\right.$$
$$\left.+\binom{N-j}{m}g^m(t)l(Q)\right)\times\exp(-m\lambda+T_k)t\times$$
$$\times\exp(-N\mu+T_k)Q\times$$
$$\times\exp\left(-\int_0^t\int_{Q_1}^{Q_2}\eta_k^m(t,\ Q)l(Q)dQdt\right). \qquad (20)$$

Положим, что

$$a_k=b(T_k)f(t,\ 0)-\binom{N}{0}g^0(t)l(0)+$$
$$+\binom{N-j}{m}g^m(t)l(Q), \qquad (21)$$

$$C_0=(-m\lambda+T_k)t-(Nm\mu-T_k)Q-$$
$$-\int_0^t\int_{Q_1}^{Q_2}\eta_k^m(t,\ Q)l(Q)dQdt. \qquad (22)$$

Тогда решение (20) запишется в виде

$$u_k^m(t,\ Q,\ T_k)=a_k\exp(C_0), \qquad (23)$$

где $\exp(C_0)$ – простейший поток.

Подставив решение (23) в уравнение (14), получим значение коэффициента a_k:

$$a_k=-\frac{a_t+(m(\lambda+\mu)+C_QC_{tQ})a_Q+a_{tQ}C_Q}{C_t+m(\lambda+\mu)C_Q+\eta_k^i(t,\ Q)}. \qquad (24)$$

Если плотность функции распределения $g^m(t)$ фиксирована для всей системы, формулу (24) можно подставлять в решение (23). Значение η_k^m $(t,\ Q)$ рассчитывается, исходя из предельного значения коэффициента C_Q. Учитывая, что при $t\to\infty$ исключаются катастрофы в пространстве $(Q_k,\ Q_k + dQ_k)$, изменения времени и пространства k-го требования на интервале T_k равны нулю

$$\frac{dC_0}{dQ_k}=C_Q=-\mu(-1)^m m+T_k-$$
$$-\int_0^t\eta_k^m(t,\ Q)l(Q)dt=0. \qquad (25)$$

Вероятность того, что m катастрофа произошла с k-м требованием в пространстве $(Q,\ Q + dQ)$ при изменении времени $(t,\ t + dt)$ η_k^m $(t,\ Q_k)$:

$$\eta_k^m(t,\ Q)=t[(-1)^m\mu m-T_k]l(Q)^{-1}. \qquad (26)$$

Причем

$$b(T_k)=f(T_k,\ 0)^{-1}g^m(t)\left[\binom{N}{0}l(0)-\binom{N-j}{m}l(Q)\right]-$$
$$-\binom{N}{0}g^0(t)l(0)+\binom{N-j}{i}g^i(t)l(Q). \qquad (27)$$

Если плотность функции распределения $g^m(t)$ произвольна, то необходимо учитывать изменения всего пространства с учетом изменений времени. Тогда систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$a_k\left(h_k^m(t,\ Q)+\eta_k^m(t,\ Q)\right)=$$
$$=g^m(t)C_k^m(t,\ Q)+m(\lambda+\mu)\exp C_0, \qquad (28)$$

где $h_k^m(t,\ Q)+\eta_k^m(t,\ Q)=f(T_k,\ Q)$; $C_k^m(t,\ Q)$ – распределение Фурье по пространству и Лапласа по времени [3].

Для решения систем уравнения вида (28) при моделировании СМО часто [3] вводят функцию $w_k(m,\ t,\ Q)$, обладающую следующими свойствами:

– значения $w_k(m,\ t,\ Q)$ являются статистическими данными;

– физический смысл – учет изменений всего пространства с учетом изменения времени;

– сумма отношений коэффициента a_k к $w_k(m,\ t,\ Q)$:

$$\sum_{l=0}^{N}\frac{a_k}{w_k(l,\ t,\ Q)}=0. \qquad (29)$$

Значения $w_k(m, t, Q_k)$ задавались следующей формулой:

$$w_k(m,\ t,\ Q)=\begin{cases}\prod\limits_{l=0}^{m}\dfrac{C_k^l(t,Q)}{h_k^l(t,Q)+\eta_k^l(t,Q)},\\ 1 \text{ при } \ f(t,Q)=0.\end{cases} \qquad (30)$$

Подставляя (30) в (28), получим равенство

$$\frac{a_k}{w_k(m,\ t,\ Q)}\left(h_k^m(t,\ Q)+\eta_k^m(t,\ Q)\right)=$$

$$=\frac{g^m(t)C_k^m(t,\ Q)}{w_k(m-1,\ t,\ Q)}+\frac{m(\lambda+\mu)\exp(C_0)}{w_k(m,\ t,\ Q)}. \qquad (31)$$

Суммируя все отношения (31) по m, получим для любого $m = 1 - N$ следующее выражение:

$$\sum_{l=0}^{m=N(t)}\frac{a_k}{w_k(l,\ t,\ Q)}=g^m(t)\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{m=N(t)}\frac{C_k^l(t,\ Q)}{w_k(l-1,\ t,\ Q)f_k^l(t,\ Q)}+$$

$$+\sum_{l=0}^{m=N(t)-1}\frac{l(\lambda+\mu)\exp(C_0)}{w_k(l,\ t,\ Q)(h_k^l(t,\ Q)+\eta_k^l(t,\ Q))}. \qquad (32)$$

Учитывая условие (29) функции $w_k(m, t, Q)$, получим формулу расчета плотности распределения $g^m(t)$, выраженную через статистические данные $w_k(m, t, Q)$:

$$g^m(t)=\left(\sum_{l=0}^{m=N(t)}\frac{w_k(l,\ t,\ Q)}{w_k(l\ -\ 1,\ t,\ Q)}\right)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{m=N(t)-1}\frac{l(\lambda\ +\ \mu)\exp(C_0)}{w_k(l,\ t,\ Q)(h_k^l(t,\ Q)+\eta_k^l(t,\ Q))}. \qquad (33)$$

Подставив статистические данные и (33) в (20), используя формулу (17), рассчитаем искомую плотность вероятности появления m катастроф для требования k на одном периоде $T_k(t)$:

$$r_k^m(t,Q)=\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{N-m+l}{l}u_k^{N-m+1}(t,Q). \qquad (34)$$

Заключение. Результатом расчета является значение плотности вероятности m катастроф k требований на выделяемом периоде занятости в ограниченном пространстве. Таким образом, вероятность m катастроф k требований в соответствии с данным расчетом равна

$$R_k^m(t,\ Q,\ T_k)=\sum_{l}^{m-1}(-1)^l\binom{N-m+l}{l}\Bigg(B(T_k)F(t,\ 0)-$$

$$-\binom{N}{0}G^m(t)L(0)+\binom{N-l}{m}G^m(t_k)L(Q_k)\Bigg)\exp(C_0). \qquad (35)$$

Учитывая, что $k = 1 - n$, получим суммарную вероятность появления катастрофических потоков требований:

$$R_k^m(t,\ Q,\ T_k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l}^{m-1}(-1)^l\binom{N-m+l}{l}\times\Bigg(B(T_k)F(t,\ 0)-$$

$$-\binom{N}{0}nG^m(t)L(0)+$$

$$+\binom{N-l}{m}\sum_{k=1}^{n}G^m(t_k)L(Q_k)\Bigg)\exp(C_0). \qquad (36)$$

Коэффициенты

$$\binom{N-m+l}{l},\ \binom{N}{0},\ \binom{N-l}{m}$$

и величины n, $B(T_k)$, $F(t, 0)$, $G^m(t_k)$, $L(Q_k)$ вещественны по условию; $\exp(C_0)$ представляет простейший поток появления m катастроф в k-х требованиях, значение которого вещественно. Таким образом, вероятность появления катастрофических требований $R_k^m(t, Q, T_k)$ представима в виде набора вещественно определенных функций. Подставив (36) в (1), полная вероятность реализации требований в СМО будет иметь вещественную форму при комплексном показателе требований, что и необходимо было получить.

Литература

1. Зирко, О. Ф. Требования с комплексными показателями в системах массового обслуживания / О. Ф. Зирко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2007. – Вып. XV. – С. 130–132.

2. Тихоненко, О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: учеб. пособие / О. М. Тихоненко. – Минск: Технопринт, 2003. – 327 с.

3. Джейсуол, Н. Очереди с приоритетами / Н. Джейсуол. – М.: Мир, 1973. – 277 с.

4. Кудрявцев, В. И. Модель системы массового обслуживания с высокой адаптивностью / В. И. Кудрявцев, О. Ф. Зирко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 149–153.

5. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М.: Изд-во Рос. ун-та Дружбы Народов, 1995. – 529 с.