УДК 519.6

А. С. Кобайло, доцент

ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

The article of design the methods of presentation and minimization of mathematical models of calculable process, allowing to automates a planning process difficult to shorten time of planning of the real-time systems, optimize the designed systems on the row of technical descriptions are considered. A method for optimizing the base on the algorithm design, allows you to implement the search of reducing the labor required for the design of control systems of parameters of technological processes. It also reduced the required amount of memory to store the outcome-governmental data and intermediate results.

Введение. Применение формальных методов синтеза вычислительных систем, ориентированных на автоматизацию проектирования [1], предусматривает разработку специальных способов представления математических моделей вычислительных процессов для синтезируемых систем. Среди проблем, связанных с автоматизацией проектирования вычислительных систем реального времени, выделим три основных:

– ввод и обработка математических моделей, зависящих от временных параметров или содержащих временные преобразования;

– потребность в больших объемах памяти для сохранения промежуточных результатов и исходных данных при обработке графов, соответствующих моделям процессов, заданных дискретными отсчетами временных параметров;

– сложности, возникающие при вводе таких моделей.

В настоящей статье исследуются методы решения указанных проблем, один из которых базируется на применении предложенных автором специальных функций для представления временных преобразований, второй – на положениях, позволяющих минимизировать математические модели дискретных циклических процессов.

Основная часть. Рассмотрим несколько характерных случаев временных преобразований процессов.

1. Задание области определения функции времени. Традиционное представление такой зависимости от временных параметров вида

$$y(t)=\begin{cases} f\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right), t\in\left(t_1, t_2\right), \\ 0, t\notin\left(t_1, t_2\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где $f(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ – непрерывная функция времени, усложняющая процедуры синтеза, ориентированные на обработку математической модели, все параметры которой задаются едиными аналитическими выражениями. Кроме того, данная функция при автоматизации синтеза обусловливает повышение трудоемкости алгоритмов, а в конечном итоге ведет к усложнению вычислительных структур и снижает точность формирования временных параметров по причине необходимости наличия служебных функциональных устройств для анализа попадания функции $f(.)$ в требуемый временной интервал и в связи с потерей времени на эти служебные функции.

2. Преобразование типа «временная задержка процесса» имеет вид

$$y(t)=f\left(t-\tau_з\right), \qquad (2)$$

где $\tau_з$ – фиксированный интервал задержки.

Очевидно, что такое преобразование требует представления, которое позволяло бы в аналитическом выражении учитывать операции задержки, реализуемые простыми функциональными устройствами.

3. Формирование из непрерывной функции кусочно-непрерывной

$$f(t)\xrightarrow{t_i+\tau_i}y(t), \qquad (3)$$

где $t_i+\tau_i$ – верхняя граница интервала существования функции $y(t)$. Вероятно, что даный случай является более общим случаем 1.

4. Временная задержка функции $f(x)$ с растяжением:

$$y(t)=f\left(\frac{t-\tau_з}{K_р}\right), \qquad (4).$$

где $K_р$ – коэффициент растяжения.

5. Временная задержка функции $f(x)$ со сжатием (частный случай предыдущего при $K_р<1$):

$$y(t)=f\left(\left(t-\tau_з\right)K_с\right), \qquad (5)$$

где $K_с$ – коэффициент сжатия.

Выражения (4), (5) так же, как и (3), требуют представления, удобного для преобразования соответствующего графа и реализации доступными техническими средствами.

Ряд других математических моделей, зависящих от временных параметров, сводится в конечном итоге к комбинации рассмотренных.

Графовое отображение моделей (1)–(5), используемое при автоматизации проектирования, которая основана на методах теории синтеза вычислительных систем реального времени [1], целесообразно представлять в виде

$$y(t)=f(t)q(t), \tag{6}$$

где $q(t)$ – оператор преобразования.

Предлагается в качестве оператора $q(t)$ применять ряд функций на базе разностной единичной функции.

Так, преобразование (1) связано с формированием временного интервала. Для него введем понятие единичной разностной функции.

Определение 1. Единичной разностной функцией называется функция $\chi_{\text{р}}(t_0,\tau)$, которая рассчитывается следующим образом:

$$\chi_{\text{р}}(t_0,\tau)=1(t-t_0)-1\big(t-(t_0+\tau)\big), \tag{7}$$

где 1(.) – единичная функция Хевисайда.

При формировании процессов, зависимых от временных параметров, полезной может быть функция, характеризующая момент окончания формирования интервала.

Определение 2. Параметром разностной единичной функции $t^*\left(t_0,\tau_{\text{р}}\right)$ будем называть параметр, определяемый как момент окончания временного интервала:

$$t^*\left(\chi_{\text{р}}\right)=t^*\left(t_0,\tau_{\text{р}}\right)=1\Big(t-\left(t_0+\tau_{\text{р}}\right)\Big)-$$

$$-1\Big(t-\left(t_0+\tau_{\text{р}}+\tau'\right)\Big), \tag{8}$$

при $\tau'\to 0$.

Определение 3. Функцией задержки называется функция

$$\chi_{\text{з}}(\tau_{\text{з}})=1(t-\tau_{\text{з}}). \tag{9}$$

Определение 4. Модифицированной функцией задержки называется функция

$$\chi'_{\text{з}}(t_0,\tau_{\text{з}})=1\big(t-(t_0+\tau_{\text{з}})\big). \tag{10}$$

Определение 5. Функцией задержки с растяжением называется функция

$$\chi_{\text{з.р}}\left(\tau_{\text{з}},K_{\text{р}}\right)=1\left(\frac{t-\tau_{\text{з}}}{K_{\text{р}}}\right). \tag{11}$$

Определение 6. Функцией задержки со сжатием называется функция вида

$$\chi_{\text{з.с}}\left(\tau_{\text{з}},K_{\text{с}}\right)=1\big((t-\tau_{\text{з}})K_{\text{с}}\big). \tag{12}$$

Отметим, что более сложные временные преобразования сводятся к разнообразным комбинациям выражений (7)–(12).

Преобразованиям (1)–(5) при введенных обозначениях соответствуют выражения

$$y(t)=f(t)\chi_{\text{р}}(t_1,\tau),$$

где

$$\tau=t_2-t_1,$$

$$y(t)=f(t-\tau_{\text{з}})\chi_{\text{з}}(\tau_{\text{з}}),$$

$$y(t)=f(t)\sum_{i=1}^{I}\chi_{\text{р}}(t_i,\tau_i),$$

$$y(t)=f\left(\frac{t-\tau_{\text{з}}}{K_{\text{р}}}\right)\chi_{\text{з.р}}\left(\tau_{\text{з}},K_{\text{р}}\right),$$

$$y(t)=f\big((t-\tau_{\text{з}})K_{\text{с}}\big)\chi_{\text{з.р}}\left(\tau_{\text{з}},K_{\text{с}}\right).$$

Рассмотрим еще несколько типовых преобразований.

Случайная флуктуация задержки имеет вид

$$y(t)=f(t-\tau_{\text{з}}-\tau_b)\chi_{\text{з}}(\tau_{\text{з}}+\tau_b),$$

где τ_b – случайная составляющая задержки.

Аналогичным образом можно найти случайную флуктуацию длительности импульсов и пауз импульсного процесса

$$y(t)=f(t)\sum_{i=1}^{I}\chi'_{\text{р}}\Big(\Big(t_{\text{п}}{}^{(i)},\tau_{\text{п}}{}^{(i)},\tau_{\text{п}b}{}^{(i)}\Big),\tau_{\text{и}}{}^{(i)}+\tau_{\text{и}b}{}^{(i)}\Big),$$

где $t_{\text{п}}{}^{(i)}$ – момент начала формирования *i*-й паузы, рассчитанный следующим образом:

$$t_{\text{п}}{}^{(i)}=\begin{cases}t_0, & i=1,\\ t_i^{\prime(i-1)}, & i>1,\end{cases}$$

где $t_i^{\prime(i-1)}$ – момент окончания формирования *i*-го импульса; $\tau_{\text{п}}{}^{(i)}$ и $\tau_{\text{и}}{}^{(i)}$ – заданная длительность *i*-й паузы и *i*-го импульса соответственно; $\tau_{\text{п}b}{}^{(i)}$ и $\tau_{\text{и}b}{}^{(i)}$ – случайная составляющая длительности *i*-й паузы и *i*-го импульса соответственно.

Применение рассмотренных функций при представлении математических моделей полипараметрических процессов облегчает ввод исходных данных при автоматизации проектирования, упрощает алгоритмы проектирования, снижает их трудоемкость, позволяет синтезировать вычислительные структуры с использованием простых функциональных устройств, а в ряде случаев представляет собой единственную возможность представления математических моделей (например, математическая модель формирования вектора временной развертки).

Вторая проблема при представлении математических моделей связана с потребностью в больших объемах памяти для сохранения промежуточных результатов и исходных данных при обработке графов, соответствующих моделям процессов, заданных дискретными отсчетами временных параметров. Рассмотрим два положения, позволяющие решить эти проблемы.

Утверждение 1. Над любым количеством вершин, которые могут быть реализованы одним и тем же функциональным устройством

(ФУ) на взаимно непересекающихся интервалах времени, может быть выполнена операция элементарного гомоморфизма.

Вероятно, что условием возможности начала выполнения произвольным ФУ очередной *j*-й операции является окончание выполнения этим ФУ предыдущей *i*-й операции, или

$$t_j^k \geq t_i^k + \tau_i^k, \qquad (13)$$

где t_i^k и t_j^k – моменты начала выполнения *k*-м ФУ *i*-й и *j*-й операций соответственно; τ_i^k – время выполнения *k*-м ФУ *i*-й операции.

Тогда некоторое количество вершин графа исходного алгоритма, каждая из которых может быть реализована одним и тем же ФУ, в соответствии с определением графа вычислительной структуры может являться прообразом одной вершины из множества вершин графа вычислительной структуры, если выполняется соотношение (13).

Утверждение 2. Граф вычислительной структуры, синтезированной на базе исходной математической модели, представленной аналитическим выражением общего вида

$$y = F_1\Bigg(x_1, x_2, ..., x_n \sum_{i=1}^{I}\sum_{J=1}^{j_I}...$$
$$... \sum_{L=1}^{l_{I,J,...,L}} \sum_{m=1}^{M_{i,j,...,l}} F_2\Big(Z_1^{(i,j,...,l,m)},$$
$$Z_2^{(i,j,...,l,m)}, ..., Z_k^{(i,j,...,l,m)}, t\Big)\Bigg), \qquad (14)$$

изоморфен графу вычислительной структуры, полученному из исходной математической модели

$$y' = F_1\big(x_1, x_2, ..., x_n, F_2\left(Z_1, Z_2, ..., Z_k, t\right)\big), \quad (15)$$

где $i, j, ..., l, m$ – последовательные отсчеты времени; $x_1, x_2, ..., x_n$ – независимые от времени параметры; $Z_1^{(i,j,...,l,m)}$, $Z_2^{(i,j,...,l,m)}$, ..., $Z_k^{(i,j,...,l,m)}$ – отсчеты временно зависимых параметров в дискретные моменты времени; F_1 (.) и F_2 (.) – аналитические выражения, связывающие параметры $\{X\}$ и $\{Z\}$.

Доказательство данного утверждения не приводится ввиду его громоздкости.

Следствие. При синтезе вычислительных структур вместо математических моделей вида (14) может быть применена математическая модель вида (15).

Третья особенность представления математических моделей для синтеза вычислительных структур связана с тем, что в ряде случаев цель использования вычислительной структуры может быть достигнута с применением более простых и дешевых технических средств, чем вычислительная структура, реализующая обобщенную (базовую) математическую модель соответствующего процесса. Примером являются исследования, в частности испытания технических подсистем или контроль их отдельных функций, не требующих наличия данных обо всей системе, в состав которой входит данная подсистема. Решение проблемы создания технических средств для задач такого типа связано с формированием математических моделей с требуемыми свойствами.

Под задачей синтеза математических моделей вычислительных процессов с требуемыми свойствами будем понимать задачу, заключающуюся в формировании множества усеченных моделей, полученных из базовой модели вычислительного процесса путем выделения ее параметров, которые могут обеспечить требуемые свойства.

Для решения данной задачи предлагается метод, основанный на использовании характеристических логических функций (ХЛФ), связывающих булевы переменные, отождествленные с параметрами модели, и элементов логико-комбинаторного подхода. Наличие набора параметров математической модели, гарантирующих соответствие модели требуемым свойствам, дает основание получить искомую модель путем преобразования графа вычислительного алгоритма реализации базовой модели. Данные преобразования базируются на следующих положениях.

Утверждение 3. Для формирования графа алгоритма реализации математической модели $F(\vec{x})$ с требуемыми свойствами над вершинами *u* и ν графа алгоритма реализации базовой математической модели

$$G = \left(V, E\right): e_0 = \left(u, \nu\right), \ u \leftrightarrow \text{Ввод } x,$$
$$x_u \notin X_r\left(N_r\right),$$

где $X_r\left(N_r\right)$ – множество элементов вектора параметров требуемых свойств $\overrightarrow{X_r}\left(N_r\right)$, необходимо над парой вершин *u* и *v* выполнить операцию простого элементарного гомоморфизма. Доказательство данного положения приведено в [1].

Заключение. Использование предложенных автором единичных функций (8)–(12) для представления математических моделей вычислительных процессов позволяет:

– представлять единым аналитическим выражением модели, содержащие временные параметры или операции временных преобразований (задержка, сжатие, растяжение и т. д.), что упрощает процедуры синтеза вычислительных структур и средств их управления, а также позволяет экономить память для хранения исходных данных и промежуточных результатов;

– описывать аналитическими выражениями формирование управляющих сигналов в требуемые моменты времени;

– автоматизировать синтез вычислительных структур для моделей с временными параметрами и преобразованиями и блоков управления вычислительных систем реального времени;

– реализовывать операции временных преобразований на наборе известных функциональных устройств [2, 3].

Способ представления математических моделей процессов, заданных дискретными отсчетами параметров времени (утверждения 1 и 2, следствие), при автоматизации проектирования вычислительных систем позволит облегчить ввод исходных данных, упростить проектируемые вычислительные системы, уменьшить их аппаратурные затраты, снизить временные затраты на синтез вычислительных структур, а также потребность в памяти и трудоемкость алгоритмов автоматизации синтеза приблизительно в N раз, где

$$N = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \ldots \sum_{l=1}^{L_{i,j,\ldots}} M_{i,j,\ldots,l}.$$

Метод синтеза математических моделей с требуемыми свойствами дает возможность уменьшить стоимость и сократить сроки проектирования и изготовления вычислительных структур, создавать вычислительные устройства, отличающиеся от структур, построенных на основе базовой модели, меньшими аппаратными затратами, стоимостью, габаритами, энергопотреблением при обеспечении требуемых функциональных возможностей, на начальной стадии проектирования сделать вывод о принципиальной возможности обеспечения требуемых свойств.

Литература

1. Кобайло, А. С. Основы теории синтеза вычислительных структур реального времени / А. С. Кобайло. – Минск: БГУИР, 2001. – 236 с.

2. Устройство задержки импульсов: а. с. 1154733 СССР, МКИ^3 Н 03 К 5/13 / А. С. Кобайло, С. Ф. Костюк, А. И. Кузьмич, А. Г. Якубенко. – № 3349297/18-21; заявл. 23.10.81; опубл. 28.02.83 // Афіцыйны бюл. – № 8. – 6 с.

3. Преобразователь двоичного кода во временной интервал: а. с. 1154733 СССР, МКИ^3 Н 03 К 13/03 / А. С. Кобайло, А. И. Кузьмич, А. Г. Якубенко, А. И. Волошаненко. – № 10355793/18-21; заявл. 25.12.82; опубл. 15.08.83 // Афіцыйны бюл. – № 30. – 12 с.