УДК 678.023.3:519.711.2

Ю. А. Байда, ассистент

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РЕЗИНОСМЕШЕНИЯ

In the article discuss nonlinear dynamic model of a rubber mixer process. Several articles describe different mathematical model of the process have been analyzed. Compound moving in a gap between rotor and wall is viewed. Resistant moment which is created by deformation in the gap is analyzed. Total resistant moment model of a rubber mixer are assessed. One-dimensional mathematical model of the process is offered. This model links averaged resistant moment with the speed of rotation of rotors. Dynamic models of important process parameters described. These parameters are homogeneity of compound and degree of dispersion of additives. Temperatures of a rubber mixture, rotors, wall and cooling water are analyzed thought heat balance equations. Rubber mixer process is offered to divide into several different stages, thus the model has variable structure. To use different equation and parameter values for every stage of mixing is offered.

Введение. Анализ процесса резиносмешения как объекта управления показывает необходимость разработки комплексной математической модели [1]. Данная модель должна отражать взаимосвязь между основными параметрами процесса во время смешения. К ним следует отнести скорость вращения ротора, момент сопротивления на валу, температуру смеси, ее вязкость, степень диспергирования компонент. Важной особенностью этой модели должно быть описание процесса смешения с точки зрения его нестационарности.

Для системы электропривода резиносмеситель выступает источником момента сопротивления на валу двигателя. Зависимость данного момента от скорости вращения ротора, а также от других параметров процесса является основной зависимостью рассматриваемой математической модели.

Анализ поведения материала в камере смесителя. Существующие модели, которые описывают процессы, происходящие в резиносмесителе, отражены в [2–4]. В этих работах решается локальная задача: поведение резиновой смеси в серповидном зазоре между ротором и стенкой камеры как области наиболее интенсивного воздействия на материал. В работах [2, 3] рассматривается обращенная задача: ротор считается неподвижным, а стенка камеры движется навстречу ротору. Причем для упрощения моделирования серповидный зазор разворачивают, при этом используют прямоугольную систему координат. Решение прямой задачи без развертки серповидного зазора и при условии вращения ротора, а не стенки камеры проводится в цилиндрической системе координат. Такой подход предложен в [4]. Преимуществом данной работы является также обширный анализ подобных моделей. В статье учтена неизотермичность процесса смешения.

Рассмотрим движение материала в серповидном зазоре между стенкой камеры и ротором. Для описания выберем цилиндрическую систему координат ($r\varphi z$). Движение материала можно описать следующими уравнениями [4]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\varphi}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz}\right)=\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad (2)$$

где $\tau_{r\varphi}$, τ_{rz} – компоненты напряжений сдвига; p – давление в материале.

При написании данных уравнений был сделан ряд стандартных допущений [4].

Для описания зависимости напряжения от скорости деформации воспользуемся равенствами

$$\tau_{r\varphi}=\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right), \qquad (3)$$

$$\tau_{rz}=\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}, \qquad (4)$$

где μ – эффективная вязкость; v_φ, v_r – компоненты скорости.

Резиновая смесь является аномально вязкой жидкостью. Ее вязкость подчиняется степенному закону:

$$\mu=K(T,G)\left\{\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right)\right]^2+\left[\frac{\partial v_z}{\partial r}\right]^2\right\}^{\frac{n-1}{2}}, \qquad (5)$$

где $K(T,G)$ – консистентность смеси; T – температура смеси; G – степень диспергирования углерода; n – индекс течения материала.

Консистентность смеси является функцией температуры и степени диспергирования наполнителя – технического углерода. Уравнение, описывающее данную зависимость, является эмпирическим и имеет следующий вид:

$$K(T,G)=K_0e^{\left[b_1(T_0-T)\right]}\left(1+b_2(100-G)^{b_3}\right), \qquad (6)$$

где K_0 – значение консистентности при температуре T_0 и степени диспергирования 100%; b_1, b_2, b_3 – эмпирические константы.

Предположим, что степень диспергирования однозначно определяется удельными затратами энергии. Тогда уравнение кинетики диспергирования примем в следующем виде:

$$\frac{100-G}{100-G_0}=\exp\left[-\frac{g}{\rho}\int_0^t \tau\dot{\gamma}dt\right], \tag{7}$$

где g – эмпирическая константа; ρ – плотность смеси; τ – напряжение сдвига; $\dot{\gamma}$ – скорость деформации.

Систему можно дополнить уравнением неразрывности:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{8}$$

В уравнении энергии можно пренебречь переносом тепла теплопроводностью вдоль потока. Уравнение энергии для нестационарного температурного поля можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{K}{\rho c}\left\{\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right)\right]^2+\left[\frac{\partial v_z}{\partial r}\right]^2\right\}^{\frac{n+1}{2}}, \tag{9}$$

где T – температура смеси; a – коэффициент температуропроводности; c – удельная теплоемкость смеси.

Систему уравнений следует дополнить граничными и начальными условиями [4].

Приведенная выше система уравнений представляет собой математическую модель неизотермического диспергирующего течения аномально вязкой жидкости в серповидном пространстве резиносмесителя. Точное решение системы (1)–(9) получить невозможно, поэтому используются приближенные численные способы, основанные на методе конечных разностей. Результаты решения системы приведены в [4].

Оценка момента, вызванного деформированием смеси в зазоре. Изучаемая модель описывает процессы, происходящие только в зазоре между ротором и стенкой камеры, в то время как нас интересует суммарный момент, создаваемый на валу. Первоначально можно определить силу, с которой смесь давит на лопасть ротора. Для чего рассмотрим элементарную силу (силу, действующую на элементарную площадь поверхности ротора). Эта сила равна произведению давления в рассматриваемой точке на элементарную площадь:

$$dF=p(\varphi,z)dA. \tag{10}$$

Указанная сила складывается из двух проекций. Проекция силы на ось z не создает противодействующего вращению момента, следовательно, ее влиянием можно пренебречь. Проекция силы на ось φ:

$$dF_\varphi=p(\varphi,z)drdz. \tag{11}$$

Проекция силы на ось r:

$$dF_r=p(\varphi,z)rd\varphi dz. \tag{12}$$

Проинтегрируем каждое выражение по поверхности ротора, которая находится под действием сил:

$$F_\varphi=\int_0^L\int_{r_1}^{r_2}p(\varphi,z)drdz, \tag{13}$$

$$F_r=\int_0^L\int_0^{\varphi_k}p(\varphi,z)rd\varphi dz, \tag{14}$$

где L, r_1, r_2, φ_k – пределы интегрирования, задаваемые поверхностью ротора.

Распределение давления является достаточно сложным и может быть найдено решением системы (1)–(9) численным методом [4]. Суммарная сила давления на поверхность лопасти ротора может быть получена из выражения

$$F=\sqrt{F_\varphi^{\,2}+F_r^{\,2}}. \tag{15}$$

Момент вращения, который создает сила, равен произведению силы на плече. Величину плеча можно найти численными методами и представить как некоторый условный радиус R^*, тогда момент будет равен:

$$M=FR^*. \tag{16}$$

Предложенный способ позволяет оценить величину момента, который возникает на валу в результате деформирования материала в зазоре между одной лопастью ротора и стенкой камеры. Полученные результаты можно применить для оценочных расчетов момента сопротивления. Однако данная модель не позволяет описать момент сопротивления в динамике изменения скорости вращения ротора. Кроме того, рассматриваемый момент учитывает только величину смесительного воздействия, обусловленного деформацией в зазоре между одной лопастью ротора и стенкой камеры. Момент, вызванный деформированием в остальном объеме камеры с учетом воздействия двух роторов, оставлен без внимания.

Анализ суммарного момента сопротивления. Резиновая смесь в камере роторного смесителя в основном подвержена деформации сдвига. Напряжение, возникающее при деформации сдвига, может быть выражено через уравнения (3), (4) т. е. пропорционально скорости деформации. В то же время эффективная вязкость μ для аномально вязких жидкостей является функцией скорости и подчиняется степенному закону (5). Используя уравнения (13)–(16), можно оценить момент, вызванный деформированием в зазоре между ротором и стенкой камеры, однако подобным образом учесть напряжения, возникающие в остальном объеме смесителя, не представляется возможным.

Для получения зависимости момента сопротивления от частоты вращения будем рассматривать сложное деформирование в смесителе как одномерную деформацию сдвига на поверхности ротора. Скорость деформации есть произведение угловой скорости на усредненный радиус ротора:

$$v = \omega r. \tag{17}$$

Напряжение сдвига на поверхности ротора можно выразить следующим образом:

$$\tau = \mu \frac{v}{h} = \mu \frac{\omega r}{h}, \tag{18}$$

где h – усредненное расстояние между поверхностью ротора и поверхностью с нулевой скоростью сдвига (в частном случае – стенкой камеры).

Сила, которую вызывает данное напряжение на поверхности ротора, есть произведение напряжения на некоторую площадь (поверхность ротора, участвующую в деформации):

$$F = \tau S. \tag{19}$$

Момент силы можно выразить:

$$M = Fr = \tau S r. \tag{20}$$

Подставив (18) в (20), получим окончательную зависимость:

$$M = \mu\omega \frac{Sr^2}{h}. \tag{21}$$

Очевидно, что величины S, r, h являются условными. Нет необходимости устанавливать их значения, что аналитически не представляется возможным. Введем следующие замены:

$$\varepsilon = \frac{r}{h}, \tag{22}$$

$$V_S = Sr, \tag{23}$$

где ε – безразмерный коэффициент; V_S – некоторый условный объем.

Полученная зависимость позволяет оценить взаимосвязь между моментом и угловой скоростью через эффективную вязкость, которая в свою очередь подчиняется степенному закону:

$$\mu = K(T, G)(\omega\varepsilon)^{n-1}. \tag{24}$$

Тогда момент сопротивления можно выразить, подставив (24) в (21). С учетом замен (22) и (23) получим:

$$M = K^*(T, G)\omega^n. \tag{25}$$

Изменение консистентности смеси в зависимости от температуры и степени диспергирования описывается уравнением (6). С учетом принятых замен оно преобразуется к виду

$$K^*(T, G) = \\ = K_0^* e^{[b_1(T_0 - T)]}\left(1 + b_2(100 - G)^{b_3}\right), \tag{26}$$

$$K_0^* = K_0 \varepsilon^n V_S, \tag{27}$$

где K^* – скорректированная консистентность; K_0^* – скорректированное значение K_0.

Степень диспергирования определяется удельными энергозатратами в соответствии с уравнением (7). Аналогичную зависимость используем для всего процесса. Механическая мощность может быть выражена как произведение момента на угловую скорость, тогда уравнение (7) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{100 - G}{100 - G_0} = \exp\left[-\frac{g_M}{m}\int_0^t M\omega dt\right], \tag{28}$$

где g_M – эмпирическая константа; m – масса смеси.

Моделирование температуры смеси. Для моделирования температуры смеси воспользуемся допущением об однородности температуры по всему объему смеси. С учетом этого составим уравнения теплового баланса без учета пространственной координаты. Нагревание смеси происходит за счет энергии, затрачиваемой на смешение. Уравнение теплового баланса для смеси:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{M\omega}{cm} - \frac{\alpha_1 s_1}{cm}(T - T_{\text{Р}}) - \\ - \frac{\alpha_2 s_2}{cm}(T - T_{\text{К}}), \tag{29}$$

где T – температура смеси; α_1 – коэффициент теплоотдачи между смесью и ротором; s_1 – площадь поверхности ротора; $T_{\text{Р}}$ – температура ротора; α_2 – коэффициент теплоотдачи между смесью и камерой; s_2 – площадь поверхности камеры, находящаяся в контакте со смесью; $T_{\text{К}}$ – температура камеры.

Для ротора уравнение теплового баланса учитывает его нагревание от смеси:

$$\frac{\partial T_{\text{Р}}}{\partial t} = \frac{\alpha_1 s_1}{c_{\text{Р}} m_{\text{Р}}}(T - T_{\text{Р}}), \tag{30}$$

где $c_{\text{Р}}$ – удельная теплоемкость материала ротора; $m_{\text{Р}}$ – масса ротора.

Камера смесителя с одной стороны нагревается смесью, с другой – охлаждается водой:

$$\frac{\partial T_{\text{К}}}{\partial t} = \frac{\alpha_2 s_2}{c_{\text{К}} m_{\text{К}}}(T - T_{\text{К}}) - \frac{\alpha_3 s_3}{c_{\text{К}} m_{\text{К}}}(T_{\text{К}} - T_{\text{В}}), \tag{31}$$

где $c_К$ – удельная теплоемкость материала камеры; $m_К$ – масса камеры; $T_В$ – средняя температура охлаждающей воды; α_3 – коэффициент теплоотдачи между камерой и охлаждающей водой; s_3 – площадь поверхности камеры, находящаяся в контакте с водой.

Последнее слагаемое в уравнении (31) учитывает тепловой поток, отводимый водой. Этот поток может быть выражен через расход воды:

$$\alpha_3 s_3 \left(T_К - T_В\right) = c_В G_В \left(T_{В_2} - T_{В_1}\right), \quad (32)$$

где $c_В$ – удельная теплоемкость воды; $G_В$ – массовый расход воды; $T_{В_1}$, $T_{В_2}$ – температуры охлаждающей воды соответственно во входном и выходном трубопроводе.

Моделирование стадий смешения. При анализе процесса резиносмешения был сделан вывод о необходимости применения модели с переменной структурой [1]. Это связано с последовательным добавлением в смесь различных компонент (особенно технического углерода). Выделим условно 4 стадии, которые могут существенно отличаться друг от друга в процессе моделирования.

1. Пластификация каучука. В смешении участвует каучук (каучуки). В математической модели отсутствует уравнение изменения степени диспергирования (28). Температура растет незначительно.

2. Диспергирование технического углерода. Процесс сопровождается сильным потреблением энергии. Затраты энергии вызывают рост температуры смеси.

3. Смешение с участием мягчителей и других добавок. Различные добавки подают в камеру смесителя в процессе диспергирования углерода. Введение добавок можно учесть, незначительно изменив константы.

4. Пластификация резиновой смеси. Данная стадия приходится на конец процесса смешения, при этом степень диспергирования достигает предельного значения и практически не изменяется. Вязкость смеси снижается.

Заключение. В результате анализа существующих моделей процесса резиносмешения пришли к выводу, что они описывают процессы, происходящие в камере смесителя, в небольшом пространстве. Данные модели характеризуются сложными системами уравнений, которые не предусматривают возможности их применения для динамического моделирования. На основании этих моделей был разработан метод расчета момента сопротивления, вызываемого деформацией сдвига в зазоре между ротором и стенкой камеры (16).

Учитывая невозможность использования данных моделей для динамического моделирования момента сопротивления, была предложена одномерная модель процесса резиносмешения. Данная модель выражает зависимость между усредненным моментом сопротивления на валу и частотой вращения ротора (25). Уравнение было дополнено рядом зависимостей (26)–(28) для моделирования консистентности и степени диспергирования.

Процесс резиносмешения сопровождается сильным тепловыделением. Для моделирования изменения температуры воспользовались уравнениями энергетического баланса (29)–(32).

Литература

1. Байда, Ю. А. Анализ резиносмесителя как объекта управления / Ю. А. Байда // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 95–98.

2. Моделирование неизотермического течения резиновой смеси в камере роторного смесителя / А. В. Баранов [и др.] // Каучук и резина. – 1993. – № 2. – С. 38–40.

3. Неизотермическое диспергирующее течение резиновой смеси в камере смесителя / А. В. Баранов [и др.] // Каучук и резина. – 1994. – № 4. – С. 33–36.

4. Баранов, А. В. Моделирование теплообмена и диспергирующего течения резиновой смеси в камере роторного смесителя / А. В. Баранов, А. И. Балинов // Каучук и резина. – 1998. – № 4. – С. 38–45.