УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, доцент

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРОЕША

In job for the decision of nonlinear regional problems the method of plural bilateral shooting is offered. Practical realisation of a method is considered on an example of the decision of known regional problem Troesh. For the decision of problem Troesh computing schemes of a method of plural bilateral shooting are under construction. They comprise procedure of the decision of problems Cauchy in direct and return directions on shooting subintervals. On an example of problem Troesh it is shown, that the choice of number and lengths of subintervals of shooting provides necessary properties and qualities of problems Cauchy. During the decision of the given problem come to light and properties of matrixes Jakoby for closing systems of the equations are studied. These systems of the equations turn out enough a low order. Borders of a spectrum of matrix Jakoby are defined and their numbers of conditionality are calculated. The offered technique allows to solve wide classes of regional problems with an interface, and thus reduces computing difficulties of boundary problems.

Введение. Проблеме численного решения нелинейных двухточечных граничных задач с пограничными слоями уделяется в настоящее время все большее внимание. Эти задачи являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов или родственных физических явлений [1].

Решения такого рода задач обычно не могут быть представлены в виде рядов по возрастающим степеням коэффициента диффузии. Они называются сингулярно-возмущенными задачами. Поскольку в предельном случае при нулевом коэффициенте диффузии дифференциальные уравнения имеют более низкий порядок, некоторые из граничных условий станут лишними. Решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы буем иметь здесь пограничный слой. Получение решения граничной задачи при наличии пограничного слоя осложняется и требует специальных методов.

При решении указанного выше типа задач стандартными численными методами возникают большие трудности. Причина этих трудностей чаще всего заключается в неустойчивости численного процесса. В качестве специальных методов будем рассматривать методы пристрелки.

Методы пристрелки для граничных задач в случае нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в смысле общности и универсальности сопоставимы только с методами сеток.

Имеют место самые сложные случаи, когда решение характеризуется внутренними переходными слоями, осцилляциями, резкими перепадами, в частности, наблюдаются и разрывы первого рода. В таких случаях нужно гибко использовать свойства решений, полученных в ходе эксперимента.

Для этих целей предлагается метод множественной двусторонней пристрелки, обладающий необходимой гибкостью.

Практическая реализация метода множественной двусторонней пристрелки и его качества зависят главным образом от того, какие имеются возможности на следующих его основных этапах:

1) выбор точек пристрелки;
2) выбор точек сшива решений;
3) выбор параметров пристрелки и их локализация;
4) выбор длин положительных и отрицательных подынтервалов пристрелки;
5) регулировка свойств замыкающей системы уравнений и ее оптимизация по числу уравнений;
6) организация итерационных процессов и их оптимизация, сведение исходной граничной задачи к совокупности задач Коши. Для решения задач Коши существует много хорошо разработанных методик [2].

Постановка задачи. Проследить за имеющимися закономерностями и возможностями метода множественной двусторонней пристрелки можно на примере решения граничной задачи, которая лежит в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы [1].

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= k\, sh\, k y_1, \quad 0 \le t \le 1, \quad k > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 1. \tag{2}$$

В математической литературе эта задача подробно изучалась. В вычислительном отношении ее оценивают как достаточно сложную и трудную. Впервые она была поставлена Вейбелом и Троешем и первоначально была связана с исследованием обжатия плазменного шнура давлением излучения. Из-за жестких ограничений ее решение не представляло особого интереса. Однако в последние годы специалисты по численным методам к ней стали проявлять значительный интерес. Это объясняется тем, что данная задача является хорошим тестом для проверки методов решения неустойчивых нелинейных граничных задач. Задача вида (1), (2) получила название задачи Троеша [1].

Решение задачи Троеша. Проведем анализ задачи Троеша.

Матрица Якоби для системы полученных уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ k^2 ch\, ky_1 & 0\end{bmatrix}.$$

При фиксированном времени матрица Якоби характеризуется собственными значениями

$$\lambda_{1,2}(0)=\pm k\sqrt{ch\, ky_1(t)}.$$

Из последнего выражения следует, что

$$\lambda_{1,2}(0)=\pm k,\quad \lambda_{1,2}(1)=\pm\sqrt{ch\, k}.$$

Если значения k небольшие, то небольшими будут и значения $\lambda_{1,2}(1)$. Однако, чем больше значение k, тем более сложным является характер поведения решения $y_1(t)$ и его производной $y_2(t)$.

Предлагаемый метод множественной двусторонней пристрелки состоит в следующем.

1. Выбираем точки пристрелки:

$$a=t_0<t_1<t_2<...<t_{2m\ 1}<t_{2m}=b.$$

Множественную пристрелку организовываем таким образом, чтобы вычислительный процесс развивался в обоих направлениях.

2. Строим пристрелочные задачи Коши в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases}u'=f(t,u),\ t\in J^{(+)}_{2j-1}=\left\{t_{2j-1}\le t\le t_{2j}\right\},\\ u(t,y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}}=y_{2j-1},\quad y_{2j-1}\in R^n,\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}v'=f(t,v),\quad t\in J^{(-)}_{2j-1}=\left\{t_{2j-1}\ge t\ge t_{2j-2}\right\},\\ v(t,y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}}=y_{2j-1},\ y_{2j-1}\in R^n,\ j=\overline{1,m},\end{cases}\tag{4}$$

где t_{2j-1} – точки пристрелки; t_{2j} – точки сшива решений; y_{2j-1} – параметры пристрелки.

3. Для полученных пристрелочных задач Коши составляем замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases}u(t_{2j},y_{2j-1})-v(t_{2j},y_{2j+1})=0,\quad j=\overline{1,m},\\ g(v(t_0,y_1),u(t_{2m},y_{2m-1}))=0.\end{cases}\tag{5}$$

4. Переписываем замыкающую систему вида (5) в операторной форме

$$H(z)=0,\tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}H:R^N\to R^N,\quad N=mn,\\ z=(y_1^T,y_2^T,...,\ y_{2m-1}^T)^T.\end{gathered}\tag{7}$$

Свойства замыкающих систем уравнений (5), (6) зависят от правой части f, исходного уравнения, формы граничных условий, области интегрирования $[a, b]$, точек пристрелки $u(t,\ y_{2j-1})$ и траекторий пристрелки $u(t,y_{2j-1}),\ v(t,y_{2j-1})$. Эти свойства наиболее полно характеризуются матрицами Якоби для соответствующих отображений H.

Пусть $y(t)$ – искомое решение исходной граничной задачи. Введем обозначения

$$y^*_{2j\ 1}=y(t_{2j-1}),\ z^*=(y_1^{*T},...,y_{2m-1}^{*T})^T.\tag{8}$$

Пусть известны приближения k-го номера к истинным значениям параметров пристрелки

$$y_1^{(k)}=\begin{vmatrix}y_{11}^{(k)}\\ y_{21}^{(k)}\end{vmatrix},\quad y_3^{(k)}=\begin{vmatrix}y_{13}^{(k)}\\ y_{23}^{(k)}\end{vmatrix}.$$

Тогда будет выполняться замыкающая система вида

$$\begin{aligned}&u_1(t^{(0)},y_1^{(k)})=0,\\ &v_1(t^{(2)},y_1^{(k)})-u_1(t^{(2)},y_3^{(k)})=0,\\ &v_2(t^{(2)},y_1^{(k)})-u_2(t^{(2)},y_3^{(k)})=0,\\ &u_1(t^{(4)},y_3^{(k)})-1=0.\end{aligned}$$

Или в операторной форме она примет следующий вид:

$$H(z^{(k)})=0,$$

где

$$z^{(k)}=(y_{11}^{(k)},\ y_{21}^{(k)},\ y_{13}^{(k)},\ y_{21}^{(k)})^T.$$

5. Теперь искомое решение $y(t)$ исходной граничной задачи представляем формулой

$$y(t)=\begin{cases}v(t),y^*_{2j-1}),\quad t\in J^{(-)}_{2j-1},\\ u(t,y^*_{2j-1}),\quad t\in J^{(+)}_{2j-1},\quad j=\overline{1,m}.\end{cases}\tag{9}$$

В случае прямого направления матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши будут иметь вид

$$\begin{cases}U'_{2j-1}(t)=\Phi_{2j-1}(u)U_{2j-1}(t),\\ U_{2j-1}(t_{2j-1})=I,\quad t\in J^{(+)}_{2j-1},\end{cases}\tag{10}$$

$$\begin{cases}\Phi_{2j-1}(u)=\dfrac{\partial f(t,\ u(t,\ y_{2j-1}))}{\partial u},\\ U_{2j-1}(t)=\dfrac{\partial u(t,\ y_{2j-1})}{\partial u}.\end{cases}\tag{11}$$

Аналогичным образом получаем матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши, решаемых в обратном направлении:

$$\begin{cases}V'_{2j-1}(t)=\Phi_{2j-1}(v)V_{2j-1}(t),\\ V_{2j-1}(t_{2j-1})=I,\ t\in J^{(-)}_{2j-1},\end{cases}\tag{12}$$

где

$$\Phi_{2j-1}(v) = \frac{\partial f(t,\ v(t,\ y_{2j-1}))}{\partial v},$$
$$V_{2j-1}(t) = \frac{\partial v(t,\ y_{2j-1})}{\partial y_{2j-1}}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{13}$$

причем

$$\begin{cases} U_{2j-1}^{(2j)} = U_{2j-1}(t_{2j}), \\ V_{2j-1}^{(2j-2)} = V_{2j-1}(t_{2j-2}). \end{cases} \tag{14}$$

Будем считать, что для решения замыкающей системы уравнений используется модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби. Кратко изложим его алгоритм.

1. $$\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \Delta z^{(k)} = (-H(z^{(k)}). \tag{15}$$

2. Построим последовательные приближения

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

3. Найдем поправки $\Delta z^{(k)}$ в методе Ньютона:

$$\Delta z^{(k)} = (\Delta z_1^{(k)T}, \Delta z_3^{(k)T},\ \ldots,\ \Delta z_{2m-1}^{(k)T})^T, \tag{17}$$

где

$$H = (h_1^{(k)},\ h_3^{(k)}, \ldots,\ h_m^{(k)})^T, \quad h_i^{(k)} = h_i(z^{(k)}).$$

Для замыкающей системы уравнений в задаче Троеша конкретизируем матрицу Якоби и запишем ее в следующем виде:

$$\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} = \begin{bmatrix} \Phi_2^{(k)} & -\Omega_2^{(k)} \\ G_1^{(k)} & G_3^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Введем обозначения $H_0 = (\partial H(z^{(0)}))/\partial z$ и образуем матрицу $B = H_0^T H_0$.

Вычислим числа обусловленности матрицы H_0. Для этого определим с начала верхнюю и нижнюю грани матрицы B:

$$z^{(k+1)} = B\left(\frac{z^{(k)}}{\left\|z^{(k)}\right\|}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, z^{(k)} \in R^4.$$

Верхнюю границу $\beta(B)$ матрицы B найдем по правилу

$$\beta(B) = \lim_{k\to\infty}\left\|z^{(k)}\right\|, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Введем обозначения

$$C = \beta(B)E - B,\ \omega^{(k)} \in R^4,$$
$$\beta(C) = \lim_{k\to\infty}\left\|\omega^{(k)}\right\|. \tag{18}$$

Определим нижнюю границу $\alpha(B)$ матрицы B

$$\alpha(B) = \beta(B) - \beta(C).$$

Итерации векторов $z^{(k)}$ и $w^{(k)}$ проводились до тех пор, пока не достигалась точность:

$$\left\|\left\|z^{(s+1)}\right\| - \left\|z^{(s)}\right\|\right\| \le \frac{1}{2}10^{-5},$$

$$\left\|\left\|\omega^{(p+1)}\right\| - \left\|\omega^{(p)}\right\|\right\| \le \frac{1}{2}10^{-5}.$$

Искомое значение чисел обусловленности вычислим по формуле

$$\nu(H_0) = \sqrt{\frac{\beta(B)}{\alpha(B)}}.$$

Методы решения задач Коши, предназначенные для определения блоков $U_{2j-1}^{(2j)}$ и $V_{2j-1}^{(2j)}$, можно видоизменять таким образом, чтобы свойства, характеризующие метод Ньютона, сохранялись.

Заключение. Предложенная методика позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем и при этом уменьшает те вычислительные трудности, которые присущи традиционным методикам. Система уравнений вида (5) не будет изменяться также в случае неравномерности выбранной сетки. На систему не окажет особого влияния и перемена методов решения задач Коши. А для решения задач Коши в настоящее время существует достаточно большой арсенал хорошо разработанных методик [2].

Литература

1. Холл, Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Д. Холл, Д. Уатт; пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

2. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 200 с.