УДК 514.144

Н. П. Можей, доцент

ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

This work is devoted to classifying homogeneous space with an invariant non-degenerate almost symplectic structure such that the isotropic representation is faithful. It is known that the problem of classification of homogeneous spaces ($\bar{G}$, M) is equivalent to the classification (up to equivalence) of pairs of Lie groups ($\bar{G}$, G). By linearization, the problem can be reduced to the problem of classification of pairs of Lie algebras ($\bar{g}$, g) viewed up to equivalence of pairs. It is sufficiend to consider only the effective action of the group $\bar{G}$ on the manifold M. This problem is solved in the following way: classify all subalgebras g of the Lie algebra $sp(n, \mathrm{C})$; for each subalgebra g describe all complex isotropically-faithful pairs such that their isotropic representation are conjugate to g; for each complex pair find all its real forms; for each real form comstruct all corresponding pairs of Lie groups and the homogeneous spaces.

Введение. Проблема описания подмногообразий была поставлена еще в начале прошлого века, в дальнейшем были классифицированы различные специальные классы подмногообразий. Наиболее интересным случаем как с математической, так и с физической точки зрения является однородный случай. Большинство физических моделей являются однородными, и это условие часто бывает априорным, большинство пространств, появляющихся в различных разделах математики, тесно связанных с приложениями, также считаются однородными. Условие однородности является принципиальным и с математической точки зрения, оно позволяет свести задачу к чисто алгебраической, применить технику теории групп и алгебр Ли. Настоящая работа посвящена классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой.

Основная часть. Пусть ($\bar{G}$, M) – однородное пространство и $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Паре ($\bar{G}$, G) поставим в соответствие пару ($\bar{g}$, g), где $\bar{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$ и g – подалгебра в $\bar{g}$, соответствующая подгруппе Ли G.

Две пары групп Ли ($\bar{G}_1$, G_1) и ($\bar{G}_2$, G_2) *эквивалентны*, если существует изоморфизм групп Ли

$$\pi\colon \bar{G}_1 \to \bar{G}_2, \text{ такой что } \pi(G_1) = G_2.$$

Проблема классификации однородных пространств ($\bar{G}$, M) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G). Используя линеализацию, эту проблему можно свести к классификации пар алгебр Ли ($\bar{g}$, g) с точностью до эквивалентности пар.

Пары ($\bar{g}_1$, g_1) и ($\bar{g}_2$, g_2) называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм алгебр Ли

$$\pi\colon \bar{g}_1 \to \bar{g}_2, \text{ такой что } \pi(g_1) = g_2.$$

Назовем пару ($\bar{g}$, g) *эффективной*, если подалгебра g не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли $\bar{g}$.

Строение пар групп Ли ($\bar{G}$, G), соответствующих данной эффективной паре алгебр Ли ($\bar{g}$, g), было описано в [1]. Поэтому проблема классификации однородных пространств сводится к классификации пар.

Отображение

$$\rho\colon \bar{g} \to gl(\bar{g}/g), \qquad x \mapsto \mathrm{ad}|_{\bar{g}/g}\, x$$

называется *изотропным представлением* подалгебры g. Пара ($\bar{g}$, g) называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры g. В дальнейшем рассматриваются только такие пары.

Пусть $V = \bar{g}/g$ – g-модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $\mathrm{B}(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится g-модулем, если положить

$$x.b(v_1, v_2) = -b(x.\, v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2),$$

где $x \in g$, $v_1, v_2 \in V$, $b \in \mathrm{B}(V)$.

Почти симплектической структурой на g-модуле V называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b \in \mathrm{B}(V)$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in g$. Другими словами, $b \in \mathrm{B}_g(V)$. Пусть B – матрица симплектической структуры в некотором базисе пространства V, а A_x – матрица элемента $x \in \rho(g)$ в том же базисе.

Пара ($\bar{g}$, g) допускает почти симплектическую структуру, если выполняется следующее свойство: $A_x^t B + B\, A_x = 0$, $\forall\ x \in \rho(g)$.

Для изотропно-точной пары ($\bar{g}$, g) отождествим алгебры g и $\rho(g)$.

Существует единственная (с точностью до сопряженности) невырожденная кососимметрическая билинейная форма b [2]. Множество всех эндоморфизмов пространства V, сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму b, является алгеброй Ли.

Зафиксируем базис $\{u_1, \ldots, u_4\}$ пространства V, в котором матрица B имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная алгебра Ли обозначается $sp(4, \mathrm{R})$. Она представима в виде

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & u & w \\ z & t & w & v \\ s & p & -x & -z \\ p & r & -y & -t \end{pmatrix} \right| x, y, z, t, \right.$$

$$\left. u, v, s, w, p, r \in \mathrm{R} \right\}.$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли g является подалгеброй в линейной алгебре Ли $sp(4, \mathrm{R})$.

Рассмотрим сначала комплексификации пар $(\bar{g},\ g)$. Решение задачи разбивается на следующие этапы:

1. Классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр g^{C}, допускающих почти симплектическую структуру, что равносильно классификации (с точностью до сопряженности) подалгебр алгебры Ли $sp(4, \mathrm{C})$.

2. Для каждой подалгебры g^{C} из пункта 1 производим классификацию (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{g}^{\mathrm{C}}, g^{\mathrm{C}})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре g^{C}.

3. Для каждой пары $(\bar{g}^{\mathrm{C}},\ g^{\mathrm{C}})$ находим (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы $(\bar{g},\ g)$.

1 этап. Для обозначения

$$g = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \alpha z & x & y & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha z & 0 \\ 0 & 0 & -x & -z \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathrm{C} \right\},$$

где $\alpha \in \mathrm{C}$ – параметр (т. е. это, вообще говоря, целый класс алгебр), будем использовать запись вида

αz	x	y	
	z		
		$-\alpha z$	
		$-x$	$-z$

Однако две алгебры g_1 и g_2 этого класса, определенные параметрами α_1 и α_2 соответственно, могут быть сопряжены при некоторых значениях параметров. Очевидно, что отношение сопряженности подалгебр задает отношение эквивалентности на множестве параметров: два набора параметров эквивалентны тогда и только тогда, когда сопряжены соответствующие подалгебры. Чтобы отметить возможную эквивалентность наборов параметров, используем два способа: указываем фундаментальную область данного отоношения эквивалентности или выписываем образующие некоторой конечной группы преобразований множества параметров, орбиты которой в точности совпадают с классами эквивалентности. Например, $|\alpha| \le 1$ или $\alpha \mapsto 1/\alpha$.

Теорема. Пусть g – подалгебра в алгебре Ли $sp(4, \mathrm{C})$. Тогда g сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$\dim g = 1.$

1.

		x	
	x		
			$-x$

2.

			x
		x	

3.

			x

4.

	x		
			x
		$-x$	

5.

λx			
	x		
		$-\lambda x$	
			$-x$

$\lambda \mapsto 1/\lambda,\ \lambda \mapsto -\lambda$

$\dim g = 2.$

1.

$3y$	x		
	y		x
		$-3y$	
		$-x$	$-y$

2.

		y	
	y		x
			$-y$

3.

y		x	
		$-y$	

4.

αy		x	
	y		
		αy	
			$-y$

$\alpha \mapsto -\alpha;$

5.

y			x
		x	y
		$-y$	

6.

αy			x
	y	x	
		$-\alpha y$	
			$-y$

$\alpha \mapsto 1/\alpha;$

7.

		x	
			y

8.

			x
		x	y

9.

x			
	y		
		$-x$	
			$-y$

10.

	y	x	
			y
		$-y$	

$\dim g = 3.$

1.

		x	y
		y	z

2.

x		z	
	y		
		$-x$	
			$-y$

3.

x			z
	y	z	
		$-x$	
			$-y$

4.

	z	x	y
		y	z
		$-z$	

5.

	x	y	z
		z	
		$-x$	

6.

		z	x
	z	x	y
			$-z$

7.

$3y$	x	z	
	y		x
		$-3y$	
		$-x$	$-y$

8.

x	y	z	
		$-x$	
		$-y$	

9.

αz	x	y	
	z		
		$-\alpha z$	
		$-x$	$-z$

10.

αz		y	
	z		x
		$-\alpha z$	
			$-z$

$\alpha \mapsto 1/\alpha$;

11.

x		y	
z		$-x$	

12.

x		y	
	x		y
z		$-x$	
	z		$-x$

13.

$3x$	y		
$3z$	x		$-2y$
		$-3x$	$-3z$
	$-2z$	$-y$	$-x$

dim g = 4.

1.

	x	y	z
		z	t
		$-x$	

2.

x		z	
	y		t
		$-x$	
			$-y$

3.

αz		x	y
	z	y	t
		$-\alpha z$	
			$-z$

$\alpha \mapsto 1/\alpha$;

4.

x	z		
t	y		
		$-x$	$-t$
		$-z$	$-y$

5.

$3t$	z	x	y
	t	y	z
		$-3t$	
		$-z$	$-t$

6.

t	x	y	z
		z	t
		$-t$	
		$-x$	

7.

x	y	z	t
		t	
		$-x$	
		$-y$	

8.

αt	x	y	t
	t	z	
		$-\alpha t$	
		$-x$	$-t$

$\alpha \mapsto -\alpha$;

9.

x		t	z
	y	z	
		$-x$	
			$-y$

10.

x		u	
			w
z		$-x$	

11.

x		u	
	y		
z		$-x$	
			$-y$

dim g = 5.

1.

αu	x	y	z
	u	z	t
		$-\alpha u$	
		$-x$	$-u$

2.

x	y	z	t
		t	u
		$-x$	
		$-y$	

3.

x		z	t
	y	t	u
		$-x$	
			$-y$

4.

x	y	u	t
	z	t	
		$-x$	
		$-y$	$-z$

5.

x		u	
	y		w
z		$-x$	
			$-y$

dim g = 6.

1.

x	y	t	u
	z	u	v
		$-x$	
		$-y$	$-z$

2.

x		y	
	t		u
z		$-x$	
	v		$-t$

3.

x		u	v
t		v	w
s		$-x$	$-t$

4.

x	y	u	v
z	$-x$	v	w
		$-x$	$-z$
		$-y$	x

dim g = 7.

1.

x		u	v
t	y	v	w
s		$-x$	$-t$
			$-y$

2.

x	z	u	v
t	y	v	w
		$-x$	$-t$
		$-z$	$-y$

dim g = 10.

x	y	u	w
z	t	w	v
s	p	$-x$	$-z$
p	r	$-y$	$-t$

= $sp(4, C)$.

Доказательство. Поскольку любая разрешимая подалгебра в $sp(4, C)$ сопряжена (относительно группы $GL(4, C)$) подалгебре максимальной разрешимой алгебры r, классифицируем сначала подалгебры в r с точностью до сопряженности относительно группы R матриц, сохраняющих r. Среди найденных алгебр будут сопряженные в группе $GL(4, C)$, поэтому разобъем полученные подалгебры на классы сопряженных (относительно группы $GL(4, C)$) и выберем из каждого класса по одному представителю. Получим искомую классификацию разрешимых подалгебр в $sp(4, C)$.

Из теории полупростых алгебр Ли следует, что все полупростые подалгебры в $sp(4, C)$ (с точностью до сопряженности) имеют вид

x	0	y	0
0	0	0	0
z	0	$-x$	0
0	0	0	0

$3x$	y	0	0
$3z$	x	0	$-2y$
0	0	$-3x$	$-3z$
0	$-2z$	$-y$	$-x$

x	0	y	0
0	x	0	y
z	0	$-x$	0
0	z	0	$-x$

x	0	y	0
0	t	0	u
z	0	$-x$	0
0	v	0	$-t$

и сама $sp(4, C)$. Для каждой полупростой подалгебры $a \in sp(4, C)$ найдем (с точностью до сопряженности) все алгебры g, такие что a является ее подалгеброй Леви.

Подалгебра $sp(4, C)$ является a-модулем (относительно присоединенного представления) и разлагается в прямую сумму изотипных компонент

$$sp(4, \mathrm{C}) = a \oplus S_1 \oplus \ldots \oplus S_n.$$

Если g – неразрешимая подалгебра, то она является прямой суммой своих пересечений с изотипными компонентами, поэтому находим в S_i все подмодули α-модуля S_i, составляем их суммы и проверяем, получается ли подалгебра.

2 этап. Рассмотрим теперь задачу классификации для заданной подалгебры g с точностью до эквивалентности изотропно-точных пар ($\bar{g}$, g), у которых изотропное представление сопряжено подалгебре g.

Обобщенным модулем называется пара (g, U), где g – алгебра Ли, а U – g-модуль.

Назовем обобщенные модули (g_1, U_1) и (g_2, U_2) *изоморфными*, если существует такая пара отображений (f, F), что f: $g_1 \to g_2$ – изоморфизм алгебр Ли, F: $U_1 \to U_2$ – изоморфизм векторных пространств, и для всех x, g_1, U_1 выполняется следующее условие:

$$F(x.u) = f(x).F(u).$$

Пусть V – векторное пространство, а g – подпространство в нем. Пара (V, g), снабженная билинейным отображением

$$B{:}G \times V \to V, \quad (x, v) = x.v,$$

называется *виртуальной парой*, если выполняются следующие условия:

1) $g.g \in g$;

2) ограничение B на $g \times g$ задает на g структуру алгебры Ли ($[x, y] = x.y$);

3) V – g-модуль относительно B.

Любой виртуальной паре (V, g) естественным образом соответствует обобщенный модуль (g, V / g), который называется *ассоциированным с виртуальной парой*.

Пусть (V_1, g_1) и (V_2, g_2) – две виртуальные пары и H: $V_1 \to V_2$ – изоморфизм векторных пространств. Назовем H *изоморфизмом виртуальных пар*, если

– $H(g_1) = g_2$;

– $H(x.v) = H(x).H(v)$ для всех $x \in g_1$, $v \in V_1$.

Пусть H: $V_1 \to V_2$ – изоморфизм виртуальных пар (V_1, g_1) и (V_2, g_2). Пусть f: $g_1 \to g_1$ – ограничение H на g_1 и пусть F: $V_1 / g_1 \to V_2 / g_2$ – отображение, определяемое $F(v + g_1) = H(v) + g_2$ для всех $v \in V_1$. Тогда (f, F) – изоморфизм обобщенных модулей (g_1, V_1 / g_1) и (g_2, V_2 / g_2), ассоциированный с H.

Классификация (с точностью до изоморфизма) изотропно-точных g-модулей U эквивалентна классификации подалгебр в $sp(4, \mathrm{C})$ с точностью до сопряженности. Для каждого найденного g-модуля U классифицируем (с точностью до эквивалентности) все пары ($\bar{g}$, g), такие что g-модули U и $\bar{g}/g$ изоморфны.

3 этап. Имея классификацию пар над полем C, получим классификацию над полем R.

Пространство V^{C} называется *комплексификацией* вещественного векторного пространства V. Если на V задана структура вещественной алгебры Ли g, то она продолжается до структуры комплексной алгебры g^{C}.

Пусть теперь g – алгебра Ли над C, a – вещественная подалгебра в g (алгебру над C можно рассматривать как алгебру над R вдвое большей размерности).

Подалгебра a называется *вещественной формой* алгебры Ли g, если

$$a \oplus \mathrm{i}\, a = g, \qquad a \cap \mathrm{i}\, a = 0.$$

Пусть a – вещественная форма алгебры g. *Сопряжением* относительно a называется отображение ς: $g \to g$, $\varsigma(x + \mathrm{i}\, y) = x - \mathrm{i}y$, $\forall\, x, y \in a$. Отображение называется *антиинволюцией*, если

$$\varsigma^2 = \mathrm{id}\, g,\ [\varsigma(x), \varsigma(y)] = \varsigma([x, y]),$$

$$\varsigma(\lambda\, x + \mu\, y) = \bar{\lambda}\ \varsigma(x) + \bar{\mu}\ \varsigma(y)$$

$\forall\, x, y \in g$, λ, $\mu \in \mathrm{C}$. Вещественные формы алгебры Ли – неподвижные точки антиинволюций. Две вещественные формы переводятся друг в друга автоморфизмом тогда и только тогда, когда соответствующие антиинволюции сопряжены. Чтобы классифицировать вещественные формы абстрактной алгебры Ли, нужно классифицировать с точностью до группы автоморфизмов все антиинволюции.

Рассмотрим теперь пару ($\bar{g}$, g). Множество всех вещественных форм пары ($\bar{g}$, g) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких антиинволюций ς алгебры $\bar{g}$, что $\varsigma(g) = g$. Для каждой пары ($\bar{g}^{\mathrm{C}}$, g^{C}) определяем (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы ($\bar{g}$, g).

Заключение. Классифицированы подалгебры алгебры Ли $sp(4, P)$, P = R и C. Проведено полное описание изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой (над полями R и C). Предложенная методика может быть использована для произвольной размерности.

Литература

1. Mostow, G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces / G. D. Mostow. – Ann. Of Math. 32. – 1950. – № 3.

2. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.