УДК 517.925.6

В. И. Маматов, доцент (БГУ); Е. Я. Кричавец, ассистент (БГТУ);
Т. А. Любецкая, ассистент (БГТУ); Н. В. Рабчун, ассистент (БГЭУ)

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

This article is about fourth degree Hamilton's autonomous systems, as $\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \end{cases}$ where

$H = F(\varphi_1, \varphi_2)$, F – holomorphic function of φ_1, φ_2, $\varphi_1 = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0}$, $\varphi_2 = \dfrac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0}$.

It was shown if even one determination $\Delta_1 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ or $\Delta_2 = \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2$ differ from zero solution of the system has the second degree branching points as moving critical points. If all of the foregoing determinations are equal to zero, the solution has no critical points.

Введение. Многие задачи естествознания и техники моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений Гамильтона [1–7]. Часто они оказываются автономными, т. е. их гамильтонианы явно не зависят от времени. Исследование характера подвижных особых точек решений нелинейных однородных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений является одной из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений [8–17].

В статьях [13, 14] исследованы системы двух дифференциальных уравнений «перекрестного типа». Найдены условия однозначности подвижных особых точек решений указанных систем. В работе [15] изучены автономные системы Гамильтона вида

$$x' = H'_y(x, y),\ y' = -H'_x(x, y),$$

$$H(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P, Q – взаимно простые полиномы.

Показано, что решения таких систем могут иметь в плоскости независимой переменной C только алгебраические подвижные особые точки.

Статья [16] посвящена исследованию подвижных особенностей системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{P(z, x, y)}{Q(z, x, y)} = F, \\ \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{R(z, x, y)}{S(z, x, y)} = G, \end{cases}$$

где P, Q, R, S – полиномы не выше второй степени относительно x, y с голоморфными по z коэффициентами. Правые части системы удовлетворяют условию

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

В работе [17] исследованы подвижные особые точки решений неавтономной системы Гамильтона вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = P_3(z, x, y), \\ \dfrac{dy}{dz} = Q_3(z, x, y), \end{cases}$$

где P_3, Q_3 – полиномы третьей степени относительно x, y с голоморфными по z коэффициентами.

Основная часть. Предположим, что гамильтониан $H = F(\varphi_1, \varphi_2)$, где

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0},\ \varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0},$$

F – голоморфная функция относительно $\varphi_1, \varphi_2, t \in C, x_1, x_2, y_1, y_2 \in C \cup \{\infty\}$. Соответствующая система Гамильтона будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, & (1) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial y_2} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}, & (2) \\ \dot{y}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & (3) \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}. & (4) \end{cases}$$

Теорема 1. Если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \gamma_1 \gamma_2 \\ \delta_1 \delta_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю, то решения системы (1)–(4) в качестве подвижных особых точек имеют точки ветвления второго порядка.

Доказательство. Систему (1)–(4) можно записать так

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \dfrac{-\Delta_1 x_1 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2}{(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0)^2}, & (5) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2} \dfrac{-\Delta_2 x_2 + \delta_0\gamma_2 - \gamma_0\delta_2}{(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0)^2}, & (6) \\ \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \dfrac{\Delta_1 y_1 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0)^2}, & (7) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2} \dfrac{\Delta_2 y_2 + \gamma_0\delta_1 - \delta_0\gamma_1}{(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0)^2}, & (8) \end{cases}$$

где $\Delta_1 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$, $\Delta_2 = \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \ \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix} \neq 0;$

2) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix} \neq 0;$

3) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \ \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix} = 0.$

Пусть имеет место первый случай, а именно: $\Delta_1 = \beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 \neq 0$, $\Delta_2 = \delta_1\gamma_2 - \gamma_1\delta_2 \neq 0$.

Сделаем в системе (5)–(8) замену

$$x_1 = X_1 + a, \ x_2 = X_2 + b, \ \ y_1 = Y_1 + c, \ y_2 = Y_2 + d,$$

где a, b, c, d удовлетворяют следующим системам:

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \alpha_2 c + \alpha_0 = 0, \\ \beta_1 a + \beta_2 c + \beta_0 = 0; \end{cases} \begin{cases} \gamma_1 d + \gamma_2 b + \gamma_0 = 0, \\ \delta_1 d + \delta_2 b + \delta_0 = 0. \end{cases}$$

Тогда получим:

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1}{\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1}, \ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 X_2 + \gamma_2 Y_2}{\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2}.$$

А система (5)–(8) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \dfrac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial Y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \dfrac{\Delta_1 X_1}{(\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1)^2}, & (9) \\ \dot{X}_2 = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \dfrac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial Y_2} = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \dfrac{\Delta_2 X_2}{(\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2)^2}, & (10) \\ \dot{Y}_1 = -\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \dfrac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial X_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \dfrac{\Delta_1 Y_1}{(\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1)^2}, & (11) \\ \dot{Y}_2 = -\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \dfrac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial Y_2} = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \dfrac{\Delta_2 Y_2}{(\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2)^2}. & (12) \end{cases}$$

Из уравнений (9) и (11) имеем, что $\dfrac{dY_1}{dX_1} = \dfrac{Y_1}{X_1}$. Откуда $\dfrac{X_1}{Y_1} = C_1$, где C_1 – произвольная постоянная.

Используя дифференциальное уравнение (ДУ) (9), будем иметь

$$\frac{dX_1}{dt} = \Phi_1(C_1, C_2) \frac{\Delta_1}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2 X_1},$$

где $\Phi_1(C_1, C_2) = \left.\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\right|_{\substack{\tilde{\varphi}_1 = \frac{\alpha_1 C_1 + \alpha_2}{\beta_1 C_1 + \beta_2} \\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 C_2 + \gamma_2}{\delta_1 C_2 + \delta_2}}}$.

Это позволяет записать ДУ (9) так:

$$X_1 dX_1 = \frac{\Delta_1 \Phi_1(C_1, C_2)}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2} dt.$$

После интегрирования последнего уравнения получим:

$$\frac{X_1^2}{2} = \frac{\Delta_1 \Phi_1(C_1, C_2)}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2}(t - C_3),$$

где C_3 – произвольная постоянная.

Откуда

$$X_1 = \sqrt{2\frac{\Delta_1 \Phi_1(C_1, C_2)}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2}(t - C_3)}, \text{ а } Y_1 = \frac{1}{C_1} X_1.$$

Аналогично из (10) и (12) следует $\dfrac{X_2}{Y_2} = C_2$, где C_2 – произвольная постоянная.

Имеем:

$$\frac{dX_2}{dt} = \Phi_2(C_1, C_2) \frac{\Delta_2}{(\delta_1 + \delta_2 C_2)^2 X_2},$$

где $\Phi_2(C_1, C_2) = \left.\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2}\right|_{\substack{\tilde{\varphi}_1 = \frac{\alpha_1 C_1 + \alpha_2}{\beta_1 C_1 + \beta_2} \\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 C_2 + \gamma_2}{\delta_1 C_2 + \delta_2}}}$.

Тогда решения системы (9)–(12) примут следующий вид:

$$X_2 = \sqrt{2\frac{\Delta_2 \Phi_2(C_1, C_2)}{(\delta_1 + \delta_2 C_2)^2}(t - C_4)}; \ Y_2 = \frac{1}{C_2} X_2,$$

где C_4 – произвольная постоянная.

Рассмотрим второй случай (третий случай исследуется аналогично):

$$\Delta_1 = \beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 = 0, \ \Delta_2 = \delta_1\gamma_2 - \gamma_1\delta_2 \neq 0.$$

Решения X_2, Y_2 системы (5)–(8) в качестве подвижных особых точек имеют точки ветвления второго порядка (очевидно из доказательства, проведенного выше).

Поскольку $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$, то $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = k$. Тогда $\tilde{\varphi}_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1$ и уравнения (5), (7) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\dfrac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\beta_2, & (13) \\ \dot{y}_1 = -\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\dfrac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\beta_1. & (14) \end{cases}$$

Из уравнений (13) и (14) имеем следующее: $\dfrac{dy_1}{dx_1} = -\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$, т. е.

$$\beta_2 y_1 + \beta_1 x_1 = C_1, \qquad (15)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Используя уравнение (13), получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1\left(C_1,\ C_2\right)\beta_2,$$

где $\Phi_1(C_1,\ C_2) = \left.\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\right|_{\substack{\tilde{\varphi}_1 = C_1 \\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 C_2 + \gamma_2}{\delta_1 C_2 + \delta_2}}}$.

Интегрируя данное ДУ и пользуясь равенством (15), имеем:

$$x_1 = \Phi_1\left(C_1,\ C_2\right)\beta_2\left(t - C_3\right),$$

$$y_1 = -\frac{\beta_1}{\beta_2}\Phi_1\left(C_1,\ C_2\right)\beta_2\left(t - C_3\right) + \frac{C_1}{\beta_2}.$$

Следовательно, x_1 и y_1 не имеют в C никаких подвижных особых точек.

Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Если все определители $\begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \gamma_1 \gamma_2 \\ \delta_1 \delta_2 \end{vmatrix}$ равны нулю, то решения системы (5)–(8) не имеют в C никаких подвижных особых точек.

Заключение. В статье рассмотрены автономные системы Гамильтона четвертого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i},\ i = 1,\ 2, \end{cases}$$

где $H = F\left(\varphi_1, \varphi_2\right)$, F – голоморфная функция относительно φ_1, φ_2, где

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0},\ \varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0}.$$

Показано, что если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \gamma_1 \gamma_2 \\ \delta_1 \delta_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю, то решения рассматриваемой системы в качестве подвижных особых точек имеют точки ветвления второго порядка. Если же каждый из вышеуказанных определителей равен нулю, то ее решения не имеют никаких подвижных особых точек.

Литература

1. Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – С. 543.
2. Мышкис, А. Д. Математика. Специальные курсы / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – С. 632.
3. Айзерман, М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман. – М.: Наука, 1974. – С. 367.
4. Дубошин, Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы / Г. Н. Дубошин. – М.: Наука, 1968. – С. 799.
5. Гребеников, Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е. А. Гребеников. – М.: Наука, 1986. – С. 255.
6. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский. – М.: Высшая школа, 1971. – Т. 2. – С. 487.
7. Петкевич, В. В. Теоретическая механика / В. В. Петкевич. – М.: Наука, 1981. – С. 496.
8. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – С. 718.
9. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – С. 436.
10. Еругин, Н. П. Проблема Римана / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – С. 336.
11. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1972. – С. 664.
12. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – С. 480.
13. Яблонский, А. И. Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических особых точек / А. И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2, № 6. – С. 752–762.
14. Яблонский, А. И. Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны / А. И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 3. – С. 468–478.
15. Мататов, В. И. О характере подвижных особых точек некоторых систем Гамильтона / В. И. Мататов // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 8. – С. 1502–1503.
16. Мататов, В. И. Об условиях однозначности подвижных особых точек у одной системы дифференциальных уравнений / В. И. Мататов // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 11. – С. 2092–2094.
17. Мататов, В. И. Исследование подвижных особенностей неавтономных систем Гамильтона с кубическими нелинейностями / В. И. Мататов, Л. В. Сабынич // Вестник БГУ. Сер. 1. – 1993. – № 2. – С. 59–63.