УДК 517.929

Т. Б. Копейкина, доцент

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

The controllability problem of time-invariant singularly perturbed dynamic systems with constant delay (SPSD)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}x(t-h) + C_{11}y(t) + C_{12}y(t-h) + B_1u(t) \\ \mu\dot{y}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}x(t-h) + C_{21}y(t) + C_{22}y(t-h) + B_2u(t) \end{cases}$$

is considered in this paper with the help of state space method. Some criteria as well as algebraic necessary, sufficient conditions of relative controllability, x-controllability, y-controllability without traditional condition $\det(C_{21} + mC_{22}) \neq 0$ are obtained. These criteria are obtained in terms of the solutions of the defining equations which are recurrence matrix algebraic equations. Defining equations are constructed according to the SPSD by introducing a special correspondences between vector-functions and matrix-functions with two indexes.

Введение. В работе [1] предложен один подход к исследованию управляемости сингулярно возмущенных систем (СВС) с запаздыванием (СВСЗ), основанный на декомпозиции свойства управляемости систем большой размерности. Динамика многих управляемых объектов содержит элементы временных задержек, запаздываний по управлению, по состоянию. Поэтому проблема управляемости в современной теории управления является особенно актуальной при исследовании управляемости таких систем, как функционально-дифференциальные системы, СВС, СВСЗ.

Во многих задачах динамики полета, химической кинетики, автоматического управления и регулирования условие управляемости является необходимым условием существования решения исследуемых задач. Проблеме управляемости стационарных и нестационарных СВС с различными видами запаздываний (малыми, постоянными, зависящими от времени) и без запаздываний в последние годы посвящен ряд работ как отечественных, так и зарубежных ученых [1–6]. Возросшее внимание к СВС объясняется широким спектром их приложения. Достаточно хорошо изучена управляемость стационарных СВС. Очевидно, однако, что СВСЗ наиболее адекватно отражают наличие задержек в работе исследуемых объектов. Такие объекты описываются, например, линейными стационарными СВС с запаздыванием (ЛССВСЗ) вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}x(t-h) + \\ &+ C_{11}y(t) + C_{12}y(t-h) + B_1u(t), \\ \mu\dot{y}(t) &= A_{21}x(t) + A_{22}x(t-h) + \\ &+ C_{21}y(t) + C_{22}y(t-h) + B_2u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

как в медленных x, так и в быстрых y переменных. В (1) $\{x(t), y(t)\} - (n_1 + n_2)$-вектор состояния системы в момент времени t; $t \in [0, T]$, $x(t) \in R^{n_1}$, $y(t) \in R^{n_2}$, u − управляющее воздействие ($u \in PC([0, T], R^r)$ из класса кусочно-непрерывных r-вектор-функций, называемое далее *допустимым*; A_{ij}, C_{ij}, B_j, $i, j = 1, 2$ – заданные постоянные матрицы соответствующих размеров; μ − малый положительный параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 << 1$; h − запаздывание, $h = \text{const} > 0$.

В данной работе для ЛССВСЗ (1) с помощью *метода пространства состояний* получен ряд условий (критериев, необходимых, достаточных условий) относительной управляемости, x-управляемости, y-управляемости без традиционного предположения относительно матриц C_{21}, C_{22}: $\det(C_{21} + mC_{22}) \neq 0$. Все полученные результаты носят эффективный характер, поскольку выражены через решения матричных рекуррентных *определяющих уравнений*, впервые введенные автором в работе [6].

Вспомогательные результаты. Рассмотрим ЛССВСЗ (1), решение которой определяется начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0, \mu) &= \{\varphi(\theta), x(0) = x_0\}, \\ y(0, \mu) &= \{\psi(\theta), y(0) = y_0\}, \quad \theta \in [-h, 0), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi \in PC([-h, 0), R^{n_1})$, $\psi \in PC([-h, 0), R^{n_2})$ − кусочно-непрерывные n_1- и n_2-вектор-функции на $[-h, 0)$, $x_0 \in R^{n_1}$, $y_0 \in R^{n_2}$.

Определение. ЛССВСЗ (1), (2) при заданном μ называется относительно управляемой (x-управляемой, y-управляемой) на отрезке $[0, T]$, если для любых векторов $c_1 \in R^{n_1}$, $c_2 \in R^{n_2}$ (любого вектора $c_1 \in R^{n_1}$, любого вектора $c_2 \in R^{n_2}$) и любых начальных условий (2) существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, такое, что соответствующее решение $\{x(t, \mu), \ y(t, \mu)\}$, $t > 0$, ЛССВСЗ (1), (2) (компонента $x(t, \mu) = x(t, \mu; x, \varphi; y, \psi; u)$, $t > 0$; компонента $y(t, \mu) = y(t, \mu; x, \varphi; y, \psi; u)$, $t > 0$ решения $\{x(t, \mu), \ y(t, \mu)\}$, $t > 0$) удовлетворяет условиям $x(T,\mu)=c_1$, $y(T,\mu)=c_2$ (условию $x(T,\mu)=c_1$; условию $y(T,\mu)=c_2$).

Для вывода эффективных условий относительной управляемости ЛССВСЗ (1), (2) введем (n_1+n_2)-вектор $z(t)=col\{x(t),\, y(t)\}$, $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$-матрицы $A(\mu)$ и $A_1(\mu)$, $(n_1+n_2)\times r$-матрицу $B(\mu)$ вида

$$A(\mu)=\begin{pmatrix} A_{11} & C_{11} \\ \dfrac{A_{21}}{\mu} & \dfrac{C_{21}}{\mu}\end{pmatrix},\ A_1(\mu)=\begin{pmatrix} A_{12} & C_{12} \\ \dfrac{A_{22}}{\mu} & \dfrac{C_{22}}{\mu}\end{pmatrix},$$
$$B(\mu)=\begin{pmatrix} B_1 \\ \dfrac{B_2}{\mu}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

В силу обозначений (3) ЛССВСЗ (1), (2) примет вид

$$\dot z(t)=A(\mu)z(t)+A_1(\mu)z(t-h)+B(\mu)u(t),$$
$$z(0,\mu)=\{\xi(\theta), z(0)=z_0\},\quad \theta\in[-h,0). \tag{4}$$

Согласно [7], критерий (т. е. необходимое и достаточное условие) относительной управляемости (ОУ) системы (4) на отрезке $[0,T]$ имеет следующий вид:

$$\operatorname{rank}\left\{Z_k(s), k=\overline{1,\, n_1+n_2}, s=\overline{0,\,\alpha h}\right\}=n_1+n_2, \tag{5}$$

где $\alpha=\left[\dfrac{T}{h}\right]$, символ $[m]$ означает целую часть (антье) числа m. В (5) $Z_k(s)\in R^{(n_1+n_2)\times r}$ – для любых $k=0,1,2,\ldots$, $s=lh$, $l=0,1,2,\ldots$, матричные решения алгебраического *определяющего уравнения*

$$Z_{k+1}(s)=A(\mu)Z_k(s)+A_1(\mu)Z_k(s-h)+B(\mu)U_k(s), \tag{6}$$

системы (4) с начальными условиями

$$U_0(s)=\begin{cases}E_r, & s=0,\\ 0_r, & s\neq 0,\end{cases}\ U_k(s)=0_r,\ k=1,2,\ldots. \tag{7}$$

$$Z_0(s)=0_{(n_1+n_2)\times r}\,\forall s,\ Z_k(s)=0_{(n_1+n_2)\times r},\forall s<0. \tag{8}$$

Критерий (6) содержит в знаменателе большие степени (до $\mu^{n_1+n_2}$) малого параметра μ и является труднопроверяемым. Цель работы – получить эффективные необходимые и достаточные условия ОУ ЛССВСЗ (1), (2) только в терминах ее параметров A_{ij}, C_{ij}, B_j, $i,j=1,2$.

Для решения задачи ОУ ЛССВСЗ (1) представим ее в операторной форме

$$px(t)=(A_{11}+A_{12}e^{-ph})x(t)+$$
$$+(C_{11}+C_{12}e^{-ph})y(t)+B_1u(t),$$

$$\mu py(t)=(A_{21}+A_{22}e^{-ph})x(t)+$$
$$+(C_{21}+C_{22}e^{-ph})y(t)+B_2u(t), \tag{9}$$

где p – оператор дифференцирования, $p\equiv d/dt$; e^{-ph} – оператор сдвига аргумента функции на величину h: $e^{-ph}z(t)\equiv z(t-h)$.

Каждой вектор-функции $x(t), y(t), u(t)$, входящей в ЛССВСЗ (1), поставим в соответствие постоянные матрицы $X_k^i(s)\in M^{n_1\times r}$, $Y_k^i(s)\in M^{n_2\times r}$, $U_k^i(s)\in M^{r\times r}$ с двумя индексами k,i и аргументом s, а оператору p и малому параметру μ – операторы сдвига Δ_+, Δ^+ соответственно нижнего и верхнего индекса матричной функции на единицу вправо:

$$x(t)\to X_k^i(s),\quad y(t)\to Y_k^i(s),\quad u(t)\to U_k^i(s),$$
$$p\to\Delta_+,\quad \mu\to\Delta^+. \tag{10}$$

Таким образом, согласно (10), для любой матричной функции $Q_k^i(s)$ действие на нее операторов Δ_+, Δ^+ означает: $\Delta_+Q_k^i(s)=Q_{k+1}^i(s)$, $\Delta^+Q_k^i(s)=Q_k^{i+1}(s)$. В силу соответствий (10) ЛССВСЗ (1) может быть представлена в виде

$$\Delta_+X_k^i(s)=A_{11}X_k^i(s)+A_{12}X_k^i(s-h)+$$
$$+C_{11}Y_k^i(s)+C_{12}Y_k^i(s-h)+B_1U_k^i(s),$$
$$\Delta^+\Delta_+Y_k^i(s)=A_{21}X_k^i(s)+A_{22}X_k^i(s-h)+$$
$$+C_{21}Y_k^i(s)+C_{22}Y_k^i(s-h)+B_2U_k^i(s),$$

или с учетом определения операторов Δ_+, Δ^+ в виде алгебраической системы рекуррентных по k, i матричных уравнений

$$X_{k+1}^i(s)=A_{11}X_k^i(s)+A_{12}X_k^i(s-h)+$$
$$+C_{11}Y_k^i(s)+C_{12}Y_k^i(s-h)+B_1U_k^i(s),$$
$$Y_{k+1}^{i+1}(s)=A_{21}X_k^i(s)+A_{22}X_k^i(s-h)+$$
$$+C_{21}Y_k^i(s)+C_{22}Y_k^i(s-h)+B_2U_k^i(s), \tag{11}$$

которую будем решать с начальными условиями

$$U_0^0(0)=E_r, U_k^i(s)=0_r,$$
$$k\neq 0\vee i\neq 0\vee s\neq 0,$$
$$X_0^i(s)=0_{n_1\times r}\ \forall s, Y_0^i(s)=0_{n_2\times r}\ \forall s. \tag{12}$$

Для каждого индекса k, i, $k,i=0,1,2,\ldots$, и аргумента s пара матриц $\{X_k^i(s),\, Y_k^{i+1}(s)\}$ определяет решение уравнений (11), (12). Уравнения (11) назовем *определяющими уравнениями* ЛССВСЗ (1). Матричную пару $\{X_k^i(s),\, Y_k^{i+1}(s)\}$, вычисленную в силу начальных условий (12), назовем *решением определяющих уравнений* (11); каждую из матриц $X_k^i(s)$, $Y_k^{i+1}(s)$ – компонентой решения $\{X_k^i(s),\, Y_k^{i+1}(s)\}$. Заметим, что в (5) решения $Z_k(s)$ определяющего уравнения (6) рассчитываются в точках, кратных запаздыванию h: $s=lh$, $l=0,1,2,\ldots$. В этих же точках будем вычислять и решения $\{X_k^i(s),\ Y_k^{i+1}(s)\}$ определяющих уравнений (11) с начальными условиями (12). Заметим, что в силу вида (11) определяющих уравнений и начальных условий (12) компоненты $X_k^i(s)$, $Y_k^{i+1}(s)$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &X_k^i(sh) = 0_{n_1\times r},\ \forall s \ge k,\ \forall i \ge 0, \\ &Y_k^i(sh) = 0_{n_2\times r},\ \forall s \ge k,\ \forall i \ge 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

Установим связь между решениями $Z_k(s)$ определяющего уравнения (6) и решением определяющих уравнений (11).

Решение задачи относительной управляемости. Для решения поставленной задачи введем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для любого натурального числа k справедливо равенство

$$Z_k(0) = A^{k-1}(\mu)B(\mu).$$

Доказательство леммы легко проводится методом математической индукции по k.

Лемма 2. Для любых натуральных чисел k, l справедливо равенство

$$Z_k(lh) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{X_k^j(lh)}{\mu^j} \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{Y_k^{j+1}(lh)}{\mu^{j+1}} \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Доказательство леммы также проводится методом математической индукции по двум переменным k, l с учетом свойств (13) определяющего уравнения (11), но в силу громоздкости здесь доказательство не приводится.

Представление (14) с учетом критерия (5) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1 [**1**]. Для относительной управляемости ЛССВСЗ (1) на отрезке $[0, T]$ при любом $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank} \left\{ \begin{matrix} \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{X_k^j(lh)}{\mu^j} \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{Y_k^{j+1}(lh)}{\mu^{j+1}} \end{matrix},\ k = \overline{1,\ n_1 + n_2},\ s = \overline{0,\ \alpha} \right\} = n_1 + n_2.$$

Очевидна связь относительной управляемости ЛССВСЗ (1) на отрезке $[0, T]$ с x-управляемостью и y-управляемостью ЛССВСЗ (1).

Теорема 2. Если ЛССВСЗ (1) относительно управляема на отрезке $[0, T]$ для любого $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, то она x-управляема и y-управляема для этих же значений малого параметра, т. е. выполняются условия

$$\operatorname{rank} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{X_k^j(lh)}{\mu^j}\ k = \overline{1,\ n_1 + n_2},\ s = \overline{0,\ \alpha} \right\} = n_1,$$

$$\operatorname{rank} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{Y_k^{j+1}(lh)}{\mu^{j+1}},\ k = \overline{1,\ n_1 + n_2},\ s = \overline{0,\ \alpha} \right\} = n_2.$$

Заключение. С помощью метода пространства состояний исследована относительная управляемость, x-управляемость, y-управляемость линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием без традиционного предположения относительно матриц C_{21}, C_{22} этой системы: $\det(C_{21} + mC_{22}) \ne 0$. Доказан критерий, необходимые достаточные условия всех видов управляемости. Все полученные результаты носят эффективный характер, поскольку выражены через решения матричных рекуррентных *определяющих уравнений*.

Литература

1. Копейкина, Т. Б. Управляемость стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина, А. С. Гусейнова // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. − С. 9−14.
2. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 9. – С. 1508–1518.
3. Kopeikina, T. B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems / T. B. Kopeikina // Systems Science. – 1995. – Vol. 21, № 1. – P. 17−36.
4. Glizer, V. Y. Controllability of nonstandard singularly perturbed systems with small state delay / V. Y. Glizer // IEEE Trans. Automat. Control. – 2003. – Vol. 48, № 34. – P. 1280−1285.
5. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с малым запаздыванием / Т. Б. Копейкина, А. С. Гусейнова // Вестник БНТУ. – 2006. – № 4. − С. 54−58.
6. Копейкина, Т. Б. О критериях управляемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем / Т. Б. Копейкина // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 4. − С. 54−65.
7. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.