УДК 517.977.1

И. М. Борковская, канд. физ.-мат. наук

ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ТИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

The article considers the problem of the stabilization of second-order time-delay systems by action of regulators of various types. The special attention is paid to the stabilization of second-order systems by action of a feedback in the form of difference regulators. In the case the question of existence of a difference regulator is open a linear integral feedback is constructed by using the Wiener – Paley theorem concerning entire functions of exponential type. The article also proposes to apply difference regulators to the stabilization of second-order systems which are not solved over derivative.

Введение. Одной из основных проблем качественной теории управления динамическими системами является задача стабилизации таких систем. В результате воздействия на исходную систему регулятором, построенным по принципу обратной связи, необходимо обеспечить устойчивость полученной замкнутой системы.

В статье рассматривается возможность стабилизации двумерных динамических систем с запаздывающим аргументом с помощью регуляторов разностного типа, реализация которых существенно проще регуляторов интегрального типа. Представлены конструктивные алгоритмы построения регуляторов разностного типа, не требующие знания характеристических значений. В случае, когда вопрос о существовании разностного регулятора, стабилизирующего исходную систему, остается открытым, предлагается метод построения интегрального регулятора, основанный на теореме Винера – Пэли из теории целых функций конечной степени.

Представляет также определенный интерес задача стабилизации такого класса систем управления, как дескрипторные системы. Эти системы достаточно достоверно описывают в физически реальных переменных работу систем автоматического управления и технологические процессы. Теория дескрипторных систем является интенсивно развивающимся разделом качественной теории управления.

В работе рассматривается проблема стабилизации разностными регуляторами двумерных дескрипторных систем с запаздыванием.

Основная часть. Рассмотрим систему с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(\cdot) \in R,\, x(\cdot) \in R^n,\, b \in R^n,\, A_i \in R^{n\times n},\, i = 0, 1,$$

где h – постоянное запаздывание. Присоединим к системе (1) регулятор типа обратной связи вида

$$u(t) = q_0'x(t) + q_1'x(t-h), \tag{2}$$

$$q_0, q_1 \in R^n,$$

не выводящий систему за пределы заданного класса.

Систему (1), (2) назовем стабилизируемой, если существует регулятор вида (2) такой, что корни характеристического уравнения замкнутой системы имеют отрицательные действительные части.

Рассмотрим систему (1) при $n = 2$. Обратную связь (2) запишем в операторной форме:

$$u(t) = [\beta_1(e^{-ph}),\ \beta_2(e^{-ph})]x(t),$$

$$\beta_1(e^{-ph}) = \beta_{10} + \beta_{11}e^{-ph},$$

$$\beta_2(e^{-ph}) = \beta_{20} + \beta_{21}e^{-ph},$$

$$[\beta_{10}, \beta_{20}] = q_0',\ [\beta_{11}, \beta_{21}] = q_1',$$

$$\beta_{ij} \in R,\ i = 1, 2,\ j = 0, 1;$$

где e^{-ph} – оператор запаздывания ($e^{-ph}x(t) = x(t-h),\ p = d/dt$).

Поскольку условие

$$\operatorname{rank}[\lambda I - A_0 - e^{-\lambda h}A_1, b] = n,$$

$$\forall \lambda \in C, \operatorname{Re}\lambda \geq 0$$

является необходимым для стабилизации системы (1), будем предполагать его выполненным.

Существуют две возможности:

1) $\det[b, A_1b] = 0$,

2) $\det[b, A_1b] \neq 0$.

В первом случае преобразование $x = Ty$, $T = [d, b]$ с произвольным вектором d таким, что $\det T \neq 0$, приводит систему к виду

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} y(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{3}$$

где α_{11}, α_{21}, α_{22}, α_{11}^1, α_{21}^1, α_{22}^1 – некоторые действительные числа.

Лемма. Пусть α, β – действительные числа. Тогда корни уравнения

$$\lambda + \alpha + \beta e^{-\lambda h} = 0$$

имеют только отрицательные действительные части в том и только в том случае, если точка (α, β) принадлежит области устойчивости Ω, граница которой описывается линиями [1]

$$\beta = -\alpha \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha + \beta\cos(hg) = 0, \\ g - \beta\sin(hg) = 0, \end{cases} \quad 0 < g < \frac{\pi}{h}.$$

Теорема 1. Если $\det[b, A_0 b] = 0$, $\det[b, A_1 b] = 0$, то система (1) стабилизируема регулятором (2) тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{11},\ -\alpha_{11}^1)$ из (3) принадлежит области Ω.

В случае $\det[b, A_1 b] = 0$, $\det[b, A_0 b] \neq 0$ возможно приведение системы (1) к виду

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Теорема 2. Если $\det[b, A_0 b] \neq 0$, $\det[b, A_1 b] = 0$, то система (1) стабилизируема обратной связью (2) при любом запаздывании $h, h > 0$.

Рассмотрим второй случай, когда $\det[b, A_1 b] \neq 0$. После ее преобразования и выбора соответствующего управления получим:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Теорема 3. Пусть $\det[b, A_1 b] \neq 0$. Тогда система (1) стабилизируема регулятором (2), если точка $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$ принадлежит области Ω_2, которая ограничена линиями $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{12} = -1$, $\alpha_{12} = \alpha_{11} h - 1$.

В случае $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \notin \Omega_2$ вопрос о стабилизируемости системы остается открытым. Но если $e^{-\alpha_{11} h} + \alpha_{12} \neq 0$ для $\alpha_{11} > 0$, то существует интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации. В силу теоремы Винера – Пэли с учетом вида регулятора его коэффициенты в операторной форме достаточно искать в классе линейных комбинаций многочленов первой степени по отношению к e^{-ph} и целых функций, квадратично интегрируемых вдоль мнимой оси. Тогда, возвращаясь к оригиналам, получим искомый регулятор.

Стабилизирующий регулятор имеет следующий вид:

$$v(t) = \frac{-\alpha_{11} r_1 - \alpha_{11} - r_2}{\alpha_{12} + e^{-\alpha_{11} h}} y_1(t) - (r_1 + \alpha_{11}) y_2(t) + \int_{-h}^{0} q_2(-\mu) y_2(t+\mu) d\mu.$$

Далее рассмотрим построение стабилизирующих регуляторов в применении к такому важному классу систем управления, как дескрипторные системы с запаздывающим аргументом вида

$$S\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + bu(t),\ t > 0, \tag{4}$$

$$u(\cdot) \in R,\ x(\cdot) \in R^n,\ S,\ A_i \in R^{n \times n},\ i = 0,\ 1,$$

при воздействии линейной обратной связи

$$u(t) = q_0' x(t) + q_1' x(t-h),\ \ q_0, q_1 \in R^n. \tag{5}$$

Выше показано, что в случае разрешимости системы (4) относительно производной для $n = 2$ и при условии выполнения представленных достаточных условий стабилизируемости можно осуществить стабилизацию системы регуляторами разностного типа. Предложен также интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации.

Проведем анализ возможности стабилизации системы (4), не разрешенной относительно производной.

Систему (4), где $\det S = 0$, но S – ненулевая, назовем $Sx(t)$-стабилизируемой регулятором вида (5), если существует регулятор (5) такой, что замкнутая система (4) является $Sx(t)$-асимптотически устойчивой [2].

Используя канонические формы для систем с запаздывающим аргументом, получим достаточные условия $Sx(t)$-стабилизируемости системы (4), (5) в двумерном случае.

Пусть $\det\left[b, Sb\right] \neq 0$.

Тогда найдется такая матрица $D, \det D \neq 0$, что преобразование $x = Dy$ приведет исходную систему (4) к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t). \tag{6}$$

Дальнейшее преобразование системы (6) в случае $\alpha_{11} \neq 0$ приводит ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = z_1(t) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} z_1(t) + \beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \\ + \beta_{21} z_2(t-h). \end{cases} \tag{7}$$

Из второго уравнения системы (7) получаем:

$$z_1(t) = -\frac{1}{\beta_{10}} \left(\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h) \right),$$

тогда

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{1}{\beta_{10}} \left(\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h) \right) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h).$$

Выбирая β_{11}, β_{10} таким образом, чтобы $\beta_{11} = \beta_{10} \alpha_1$, имеем:

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} z_2(t) + \left(-\frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} + \alpha_2 \right) z_2(t-h). \tag{8}$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости последнего уравнения определим условия, при которых отрицательны действительные части корней характеристического уравнения

$$\lambda + \frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} - \left(\alpha_2 - \frac{\beta_{21}}{\beta_{10}}\right) e^{-\lambda h} = 0. \qquad (9)$$

В случае, когда точка с координатами $(\beta_{20} / \beta_{10},\ \beta_{21} / \beta_{10} - \alpha_2)$ принадлежит области устойчивости Ω, описанной выше, корни уравнения (9) будут иметь отрицательные действительные части. При соответствующем выборе коэффициентов регулятора всегда можно обеспечить попадание точки в требуемую область, а следовательно, и система (4) в этом случае является $Sx(t)$-стабилизируемой.

Пусть в (6) $\alpha_{11} = 0$. Тогда система имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),$$

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = \alpha_{12} y_2(t) + \alpha_{11}^1 y_1(t-h) + \alpha_{12}^1 y_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} y_1(t) + \beta_{11} y_1(t-h) + \\ + \beta_{20} y_2(t) + \beta_{21} y_2(t-h). \end{cases}$$

При $\alpha_{11}^1 = 0$ первое уравнение системы устойчиво тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1)$ принадлежит вышеуказанной области устойчивости Ω.

Если $\alpha_{11}^1 \neq 0$, то перейдем при помощи невырожденного преобразования к системе вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),$$

из которой получим:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = \alpha_{12} z_2(t) + z_1(t-h), \\ 0 = \beta_{10} z_1(t) + \beta_{11} z_1(t-h) + \\ + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h). \end{cases}$$

Пусть $\beta_{10} = 0, \beta_{11} = 1,$ тогда

$$0 = z_1(t-h) + \beta_{21} z_2(t-h) + \beta_{20} z_2(t).$$

Имеем:

$$\dot{z}_2(t) = (\alpha_{12} - \beta_{20}) z_2(t) - \beta_{21} z_2(t-h). \qquad (10)$$

Выбирая β_{20}, β_{21} так, чтобы точка $(-\alpha_{12} + \beta_{20},\ \beta_{21})$ попадала в область устойчивости Ω, обеспечим асимптотическую устойчивость уравнения (10). Таким образом, исходная система является $Sx(t)$-стабилизируемой.

Обобщим рассмотренные случаи.

Утверждение. Для $Sx(t)$-стабилизируемости системы (4) регулятором вида (5) достаточно, чтобы выполнялось условие $\det[b, Sb] \neq 0$ и при этом α_{11} из (6) было отлично от нуля. В случае $\det[b, Sb] \neq 0$, $\alpha_{11} = 0$ систему можно стабилизировать, либо если $\alpha_{11}^1 = 0$ и точка $(-\alpha_{12},\ -\alpha_{12}^1) \in \Omega$, либо если $\alpha_{11}^1 \neq 0$.

Заключение. В статье обобщаются результаты по стабилизации двумерных динамических систем с запаздыванием, разрешенных относительно производной, а также дескрипторных систем с запаздыванием при воздействии регуляторов различных типов.

На основании полученных данных по параметрам исходной системы проводится построение линейной обратной связи в виде разностных регуляторов вида (5), обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Литература

1. Борковская, И. М. О стабилизации линейных двумерных систем с запаздывающим аргументом / И. М. Борковская, В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 1995. – Вып. II. – С. 23–33.

2. Борковская, И. М. Стабилизация двумерных дескрипторных систем с запаздыванием / И. М. Борковская // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2008. – Ч. 3. – С. 89.