# МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

В. М. Марченко, профессор

## ГИБРИДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ *

The paper considers a special kind of hybrid difference-differential dynamic systems, i. e. differential-algebraic systems with delays (DAD systems), with some variables being continuous the other – piecewise continuous. It is shown that several classes of dynamic systems such as neutral type time-delay systems as well as hybrid discrete-continuous ones can be reduced to DAD systems. The modern state of the qualitative control and observation DAD system theory is also discussed.

**Введение.** При построении математических моделей реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости. Такие процессы описываются дифференциально-алгебраическими (DAE) системами (отдельные уравнения которых являются дифференциальными, другие – алгебраическими). Эти системы появились в русскоязычной литературе под названием «гибридные системы». В настоящее время, особенно в англоязычной литературе, этот термин в основном используется для дискретно-непрерывных систем и систем, содержащих логические переменные. В связи с этим представляет интерес точка зрения на гибридность как на неоднородность в природе (дискретные, непрерывные, кусочно-непрерывные, детерминированные, стохастические, логические переменные и т. д.) изучаемого процесса или в его описании (дифференциальные, дискретные, разностные уравнения и т. д.).

В данной работе обсуждается современное состояние и перспектива дальнейших исследований качественной теории управления и наблюдения в гибридных дифференциально-разностных (ГДР) системах, к которым, в частности, сводятся стандартные типы систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа, а также непрерывно-дискретных систем. Историю вопроса можно проследить по работам [1–18] и приведенной в них библиографии.

**1. Мотивация: примеры ГДР-систем.** Рассмотрим уравнение с запаздывающим аргументом нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_1 x(t-h) + d\dot{x}(t-h), \; t \ge 0, \quad (1)$$

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \tau \in [-h, 0], \quad (2)$$

более общее уравнение

$$\frac{d}{dx}\big(x(t) - dx(t-h)\big) = ax(t) + a_1 x(t-h), \quad (3)$$

а также гибридную дискретно-непрерывную систему

$$\dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y[k], t \in [kh, (k+1)h), \quad (4)$$

$$y[k] = a_{21}x(kh) + a_{22}y[k-1], k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

$$x(0) = x, \; y[-1] = y. \quad (6)$$

Здесь $a, a_1, d, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, h, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $d \ne 0$, $h > 0$; символ $y[k]$ означает функцию целочисленной переменной $k$, а функция $\varphi$ берется из класса $C^1$ дифференцируемых функций.

Объекты (1)–(6) обычно рассматриваются отдельно. Ниже предлагается единый подход к исследованию указанных объектов путем сведения их к ГДР-системам.

Вводя обозначения

$$x_1(t) = x(t) - dx(t-h), \; x_2(t) = x(t)$$

и определяя числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ соотношениями $a_{22} = d, a_{11} + a_{12} = a, a_{11}a_{22} = -a_1$, уравнение (1) сведем к ГДР-системе вида

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \quad (7)$$

$$x_2(t) = a_{21}x_2(t) + a_{22}x_2(t-h), t \ge 0, \quad (8)$$

$$x_1(0) = \varphi(0) - d\varphi(-h), \; x_2(\tau) = \varphi(\tau), \tau \in [-h, 0].$$

Аналогично поступая с уравнением (3), придем к ГДР-системе (7), (8) с более общими начальными условиями.

Рассмотрим теперь систему (4), (5). Введем обозначения

$$x(t) = x_1(t), x_2(t) = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y[k] \end{bmatrix},$$

$$t \in [kh, (k+1)h), k = 0, \; 1, \; \dots$$

Тогда система (4), (5) сводится к ГДР-системе

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$

$$x_2(t) = A_{22}x_2(t-h), \; t \ge 0,$$

* Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

где

$$A_{11}=a_{11},\ A_{12}=[0\ \ a_{12}\ ],$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix} e^{a_{11}h} & a_{12}\int\limits_0^h e^{a_{11}(h-\tau)}d\tau \\ a_{21}e^{a_{11}h} & a_{22}+a_{21}a_{12}\int\limits_0^h e^{a_{11}(h-\tau)}d\tau \end{bmatrix}$$

с начальными условиями

$$x_1(0)=x_0,$$

$$x_2(\tau)=\begin{bmatrix} e^{-a_{11}h}(x_0-a_{12}y_0\int\limits_0^h e^{a_{11}(h-\tau)}d\tau) \\ y_0 \end{bmatrix},\tau\in[-h,0].$$

Представляется, что разобранные примеры дают достаточную мотивацию для дальнейшего рассмотрения и изучения ГДР-систем.

**2. Некоторые математические модели гибридных систем.** В качестве общей модели линейной гибридной системы управления и наблюдения с последействием можно взять следующую систему функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1(t)=\int\limits_{-h}^{0}d_sA_{11}(t,s)x_1(t+s)+\int\limits_{-h}^{0}d_sA_{12}(t,s)x_2(t+s)+ +\int\limits_{-h}^{0}d_sB_1(t,s)u(t+s), \qquad (9)$$

$$x_2(t)=\int\limits_{-h}^{0}d_sA_{21}(t,s)x_1(t+s)+\int\limits_{-h}^{0}d_sA_{22}(t,s)x_2(t+s)+ +\int\limits_{-h}^{0}d_sB_2(t,s)u(t+s), \qquad (10)$$

с выходом

$$y(t)=\int\limits_{-h}^{0}d_sC_1(t,s)x_1(t+s)+\int\limits_{-h}^{0}d_sC_2(t,s)x_2(t+s).$$

В литературе не существует сколь-нибудь полной качественной теории управления и наблюдения для систем вида (9), (10).

Если меры Стилтьеса в (9), (10) являются дискретными, сосредоточенными в точках

$$-h_j,\ j=0,1,...,l;\ \ 0=h_0<h_1<...<h_l=h,$$

и мера $d_sG(t,s)$ исчезает в нуле, получаем ГДР-систему с сосредоточенными запаздываниями

$$\dot{x}_1(t)=\sum_{j=0}^{l}(A_{11j}(t)x_1(t-h_j)+A_{12j}(t)\times \times x_2(t-h_j)+B_{1j}(t)u(t-h_j)),$$

$$x_2(t)=\sum_{j=0}^{l}(A_{21j}(t)x_1(t-h_j)+A_{22j}(t)\times \times x_2(t-h_j)+B_{2j}(t)u(t-h_j)),\quad t\ge t_0.$$

К настоящему моменту наиболее изученной является простейшая ГДР-система (в нормальной форме)

$$\dot{x}_1(t)=A_{11}(t)x_1(t)+A_{12}(t)x_2(t)+B_1(t)u(t), \qquad (11)$$

$$x_2(t)=A_{21}(t)x_1(t)+A_{22}(t)x_2(t-h)+B_2(t)u(t),\quad t\ge t_0 \qquad (12)$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0)=x_{10},\ \ x_2(\tau)=\varphi(\tau),\tau\in[t_0-h,\ t_0), \qquad (13)$$

где

$$A_{11}(t)\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1},\ A_{12}(t)\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2},\ \ A_{21}(t)\in\mathbb{R}^{n_2\times n_1},$$
$$A_{22}(t)\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2},\ \ B_1(t)\in\mathbb{R}^{n_1\times r},\ \ B_2(t)\in\mathbb{R}^{n_2\times r},$$

$x_{10}\in\mathbb{R}^{n_1}$, $\varphi(\cdot)$ – кусочно-непрерывная $n_2$-вектор-функция.

Принимая во внимание 2-D-системный подход, простейшую ГДР-систему можно рассмотреть в симметрической форме, заменив $x_2(t)$ в левой части (12) на $x_2(t+h)$.

***Замечание.*** ГДР-систему (11), (12) можно интерпретировать как обыкновенную динамическую систему, управляемую разностным (или дискретным, ср. с (4), (5)) регулятором. Такие системы возникают также при исследовании квантованных систем.

**3. Представление решений ГДР-систем.** Под решением $x_i(t)=x_i\left(t,t_0,x_{10},\varphi,\ u\right)$, $t\ge 0$, $i=1,2$, системы (11)–(13) понимаются абсолютно непрерывная $x_1(\cdot)$ и кусочно-непрерывная $x_2(\cdot)$ вектор-функции, которые удовлетворяют начальным условиям (13) и уравнению (12) для $t\ge 0$, а также почти всюду при $t\ge 0$ формуле (11). Если при этом выражение (11) удовлетворяется для всех $t\ge 0$, то соответствующее решение считается строгим. Имеет место утверждение [7, 14, 15].

***Утверждение 1.*** Решение $x_i(t)=$ $=x_i\left(t,\ t_0,\ x_{10},\ \varphi,\ u\right)$, $t\ge 0$, $i=1,2$, системы (11)–(13) существует единственно и может быть вычислено по следующей формуле (обобщенная формула Коши):

$$x_i(t)=x_i\left(t,\ t_0,\ x_{10},\ \varphi,\ u\right)=$$
$$=X_{i1}^*(t,\ t_0-0)x_{10}+\int\limits_{t_0-h}^{t_0}X_{i2}^*(t,\ \tau+h)\times$$
$$\times A_{22}(\tau+h)\varphi(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left(X_{i1}^*(t,\ \tau)B_1(\tau)+X_{i2}^*(t,\ \tau)B_2(\tau)\right)u(\tau)d\tau+$$
$$+Z_i^*(t,\ t-T_th)A_{22}(t-T_th)\varphi(t-T_th-h),$$
$$t\ge t_0,\ \ i=1,2, \qquad (14)$$

где $X_{ij}^*(\cdot,\cdot),i=1,2;\ j=1,2$ – решение сопряженной системы

$$\frac{\partial X_{i1}^*(t,\tau)}{\partial\tau}+X_{i1}^*(t,\tau)A_{11}(\tau)+X_{i2}^*(t,\tau)A_{21}(\tau)=0,$$
$$\tau\le t,\quad \tau\ne t-kh;$$

$$X_{i2}^*(t,\tau)=X_{i1}^*(t,\tau)A_{12}(\tau)+X_{i2}^*(t,\tau+h)A_{22}(\tau+h),$$
$$\tau\le t;$$
$$X_{i2}^*(t,\tau)=0,\ \tau>t;$$
$$X_{i1}^*(t,t-kh-0)-X_{i1}^*(t,t-kh+0)=$$
$$=Z_i^*(t,t-kh)A_{21}(t-kh);$$
$$Z_i^*(t,t-kh)=Z_i^*(t,t-kh+h)A_{22}(t-kh+h),$$
$$k=1,2,...,T_t,$$

с граничными условиями вида

$$X_{11}^*(t,t-0)=I_{n_1},\ Z_1^*(t,t)=0\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2},$$
$$X_{21}^*(t,t-0)=A_{21}(t),\quad Z_2^*(t,t)=I_{n_2}.$$

***Замечание 1.*** Формула Коши допускает обобщение на случай многих соизмеримых запаздываний [14], а также для импульсных систем вида (11)–(13), когда у функции $x_1(t)$ допускаются скачки [18] при $t\ge 0$.

В стационарном случае: коэффициенты системы (11), (12) – постоянные матрицы,

$$A_{ij}(t)=A_{ij},\ B_i(t)=B_i,\ i=1,2;\ j=1,2,\ t_0=0;\quad (15)$$

формула (14) упрощается, так как можно положить,что

$$X_{ij}^*(t,\tau)=X_{ij}^*(t-\tau),\ Z_i^*(t,t-kh)=Z_i^*(kh),$$

$i=1,2;\ j=1,2.$ Более того, в этом случае решения системы (11), (12), (15) раскладываются в ряды по решениям ее определяющих уравнений [14, 15].

***Утверждение 2.*** Решение $x_\nu(t),\ \ \nu=1,2,$ (11)–(13), (15) существует единственно и может быть вычислено по формуле

$$x_\nu(t)=x_\nu\left(t,\ 0,\ x_{10},\ \varphi,\ u\right)=x_\nu(t,\ x_{10},\ \varphi,\ 0)+$$
$$+\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i\\(t-ih>0)}}X_{k+1}^\nu(ih)\int_0^{t-ih}\frac{\left(t-\tau-ih\right)^k}{k!}u(\tau)d\tau+$$
$$+\sum_{\substack{i\\(t-ih\ge 0)}}X_0^\nu(ih)u(t-ih),\qquad (16)$$

где $x_\nu(t,x_{10},\varphi,0),\nu=1,2$ – решение системы (11)–(13), (15), представленное формулой (14) в случае нулевого управляющего воздействия: $u(t)\equiv 0,t>0;$ матричные функции $X_k^\nu(t),$ $\nu=1,2,$ являются решением определяющих уравнений вида

$$\begin{aligned}X_{k+1}^1(t)&=A_{11}X_k^1(t)+A_{12}X_k^2(t)(t)+B_1U_k(t),\\ X_k^2(t)&=A_{21}X_k^1(t)+A_{22}X_k^2(t-h)+B_2U_k(t),\end{aligned}\quad (17)$$
$$k=-1,0,1,...;\ t\ge 0;$$

с начальными условиями

$$X_k(t)=0,\ Y_k(t)=0,$$

если

$$k<0,\ \text{или}\ t<0;\qquad (18)$$
$$U_0(0)=I_r,\ U_k(t)=0,$$

если

$$k^2+\ t^2\ne 0.\qquad (19)$$

***Замечание 2.*** Нетрудно видеть, что

$$X_k(t)=0,\ Y_k(t)=0$$

для $t\ne jh,\ j=0,1,...;\ k=0,1,...$

Кроме того, $X_0(t)\equiv 0,\ t\ge 0$.

При исследовании свойств ГДР-систем, а также различных вопросов качественной теории управления и наблюдения для таких систем важное значение имеют алгебраические свойства решений их определяющих уравнений. Приведем некоторые из них.

***Лемма 1.*** Имеют место следующие тождества:

$$\left(A_{11}+A_{12}\left(I_m-A_{22}\,\omega\right)^{-1}A_{21}\right)^k(B_1+$$
$$+A_{12}\left(I_m-A_{22}\,\omega\right)^{-1}B_2)\equiv\sum_{j=0}^{+\infty}X_{k+1}(jh)\omega^j;$$
$$\left(I_m-A_{22}\,\omega\right)^{-1}A_{21}\left(A_{11}+A_{12}\left(I_m-A_{22}\,\omega\right)^{-1}A_{21}\right)^k\times$$
$$\times\left(B_1+A_{12}\left(I_m-A_{22}\,\omega\right)^{-1}B_2\right)\equiv\sum_{j=0}^{+\infty}X_{k+1}^2(jh)\omega^j,$$
$$k=0,1,...;$$
$$\left(I_m-A_{22}\,\omega\right)^{-1}B_2\equiv\sum_{j=0}^{+\infty}X_0^2(jh)\omega^j,$$

откуда $\left|\omega\right|\le\omega_1$, где $\omega_1$ – достаточно малое положительное число.

***Лемма 2*** (Обобщенная теорема Гамильтона – Кэли) [14]. Найдутся действительные числа $r_{ij}$, ..., такие, что решения определяющего уравнения (17) удовлетворяют соотношениям

$$X_\gamma^\nu(kh)=-\sum_{j=1}^{\min\{k,nm\}}r_{0j}X_\gamma^\nu((k-j)h)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\min\{k,nm\}}r_{ij}X_{\gamma-i}^\nu((k-j)h),\ \nu=1,2,$$
$$\gamma=n+1,n+2,...$$

***Замечание 3.*** Можно показать, что решения стационарных ГДР-систем вида (11)–(13), (15) имеют рост не выше, чем экспоненциальный, при аналогичном росте управляющих воздействий, что позволяет применять к таким системам преобразование Лапласа.

Дальнейшие результаты по представлению решений более общих ГДР-систем можно найти в работах [14, 15, 18].

**4. Элементы качественной теории управления в ГДР-системах.** К качественной теории управления относятся такие важные проблемы математической теории управления, как управляемость, наблюдаемость, двойственность, стабилизация, модальное управление, реконструкция, реализация переходных отображений, построение канонических представлений ГДР-систем и др.

***Определение 1.*** Система (11), (12) называется относительно $(H-t_1)$- управляемой при $t_1 > t_0$, если для любых векторов $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ и любых допустимых начальных данных $x_{10}$, $\varphi(\cdot)$ существует кусочно-непрерывное управление $u(\cdot)$ такое, что соответствующее решение системы обладает свойством

$$H\begin{bmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Если в этом определении $H=[I_{n_1}\ 0]$, то система считается относительно $t_1$-управляемой по $x_1$; аналогично относительно $t_1$-управляемой по $x_2$, если $H=[0\ I_{n_2}]$.

***Определение 2.*** Система (11), (12) называется полностью $(H-t_1)$- управляемой при $t_1 > t_0 + h$, если требование (20) заменить следующим условием:

$$H\begin{bmatrix} x(t_1+t) \\ y(t_1+t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \ge 0.$$

Имеют место следующие утверждения.

***Теорема 1.*** Для того чтобы стационарная система (11), (12), (15) была относительно $t_1$-управляемой по $x_1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{rank}\left[X_k^1(t),\ k=1,2,...,n_1;\ t\in[0,t_1)\right]=n_1.$$

Аналогично рассматриваются [14, 15] другие типы относительной управляемости.

***Теорема 2.*** Для того чтобы стационарная система (11), (12), (15) была полностью $(H-t_1)$- управляемой при $H=I_{n_1+n_2}$, необходимо, чтобы

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & 1-A_{22}e^{-\lambda h} & B_2 \end{bmatrix} = n_1+n_2,\ \lambda\in\mathbb{C},$$

где $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Обобщением сформулированных задач управляемости являются задачи $\mathbb{R}^n-(s,t)$- и $(s,t)$-управляемости, которые можно рассматривать как игровые задачи преследования однотипных объектов, когда начала движения преследующего и преследуемого объектов не совпадают: при заданных $s,t\ (s\ge t\ge 0)$ система (11), (12), (15) считается $(s,t)$-$t_+$-управляемой по $x_i$, если для любых начальных данных $x_{10}$, $\tilde{x}_{10}$, $\varphi$, $\tilde{\varphi}$ системы (11), (12) и любого допустимого управления $v(\cdot)$ существует допустимое управление $u(\cdot)$ такое, что

$$x_i\left(t_+ +\tau, t_+ - s, x_{10}, \varphi, u\right) = x_i\left(t_+ + \tau, t_+ - t, \tilde{x}_{10}, \tilde{\varphi}, v\right)$$

для $\tau\ge 0$; если же последнее соотношение выполняется только при $\tau = 0$, то приходим к задаче $\mathbb{R}^n-(s,t)$-$t_+$- управляемости (см. рисунок).

Для сформулированных игровых задач управляемости можно построить и сформулировать двойственные задачи линейной наблюдаемости. Некоторые результаты в этом направлении имеются в [9].

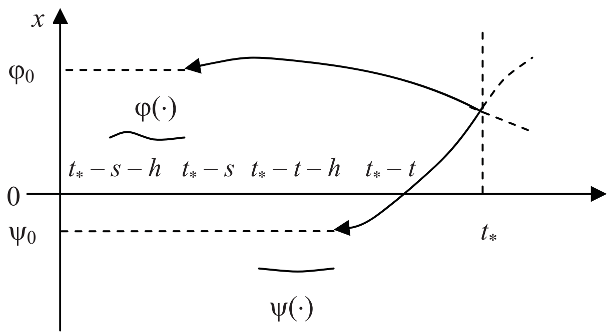

Рисунок. $\mathbb{R}^n-(s,t)$-управляемость

Классической в теории регулирования и теории динамических систем является проблема их устойчивости. Рассмотрим, например, невозмущенную ГДР-систему (11) , (12), (15):

$$u(t)=0 \text{ при } t\ge 0. \qquad (21)$$

Определение ее асимптотической и экспоненциальной устойчивости аналогично соответствующим понятиям для систем запаздывающего типа.

Имеет место следующая теорема.

***Теорема 3.*** Следующие утверждения эквивалентны:

1) система (11), (12), (15), (21) экспоненциально устойчива;

2) система (11), (12), (15), (21) асимптотически устойчива;

3) система (11), (12), (15), (21) асимптотически устойчива по $x_2$;

4) спектральный радиус матрицы $A_{22}$ строго меньше 1 и все корни характеристического уравнения

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & 1-A_{22}e^{-\lambda h} \end{bmatrix} = \Delta(\lambda)=0,\ \lambda\in\mathbb{C} \quad (22)$$

имеют отрицательные действительные части.

В скалярном случае коэффициентов системы условие отрицательности действительных частей корней уравнения (22) можно выразить непосредственно через коэффициенты.

**Заключение.** Предложен унифицированный подход к изучению таких важных в приложениях и различных по природе классов динамических систем, как систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа, а также дискретно-непрерывных систем. Подход основан на сведении указанных систем к ГДР-системам.

дении указанных систем к ГДР-системам. Проанализировано современное состояние качественной теории управления и наблюдения (КТУН) в ГДР-системах. Более полное рассмотрение КТУН, а также некоторых нерешенных задач этой теории для ГДР-систем можно найти в работах [9, 11–15, 17, 18].

### Литература


1. Кириллова, Ф. М. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах / Ф. М. Кириллова, С. В. Стрельцов // Управляемые системы: сб. тр. / Ин-т математики Сибир. отд. АН СССР. – 1975. – Вып. 14. – С. 24–33.
2. Ахундов, А. А. Управляемость линейных гибридных систем / А. А. Ахундов // Управляемые системы: сб. тр. / Ин-т математики Сибир. отд. АН СССР. – 1975. – Вып. 14. – С. 4–10.
3. Трофимчук, Т. С. Управляемость систем, неразрешенных относительно старшей производной / Т. С. Трофимчук // Управляемые системы: сб. тр. / Ин-т математики Сибир. отд. АН СССР. – 1980. – Вып. 20. – С. 75–82.
4. De la Sen, M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems / M. De la Sen // Computers Math. Applic. – 1996. – Vol. 31, № 1. – P. 109–122.
5. Hybrid Systems / J. J. Gertler [et al.] // Prepr. 13th World Congr. IFAC. – 1996. – Vol. J. – P. 473–476.
6. Марченко, В. М. Вполне регулярные системы с последействием / В. М. Марченко // Труды Ин-та математики. – 2001. – Т. 7. – С. 97–104.
7. Марченко, В. М. Представление решений управляемых гибридных систем / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 6. – С. 17–25.
8. Observability of linear hybrid systems / R. Vidal [et al.] // Hybrid systems: Computation and Control. – 2003. – Vol. 2623. – P. 526–539.
9. Марченко, В. М. О двойственности в задачах управления и наблюдения для гибридных систем / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2003. – Вып. XI. – С. 3–7.
10. Hybrid Systems: Computation and Control: IEEE conf. «MMAR’2004». Vol. 1: Control Theory, Control Engineering, Modelling and Simulation / Eds. S. Domek, R. Kaszynski. – Blazejewko, Poland, 2004
11. Щеглова, А. А. Наблюдаемость вырожденных линейных гибридных систем с постоянными коэффициентами / А. А. Щеглова // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 86–101.
12. Marchenko, V. M. Hybrid control and observation systems in symmetric form / V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczkiewicz // IEEE conf. «RoMoCo». – Poznan, Poland, 2005. – P. 1371–43.
13. Marchenko, V. M. Observability for linear differential-algebraic systems with delay / V. M. Marchenko, Z. Zaczkiewicz // IEEE conf. «MMAR’2005». – Blazejewko, Poland, 2005. – P. 299–303.
14. Марченко В. М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Докл. РАН. – 2005. – Т. 404, № 4. – С. 465– 469.
15. Поддубная, О. Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием: дис. … канд. физ.-мат. наук / О. Н. Поддубная. – Минск, 2005.
16. Куржанский, А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению / А. Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 183–189.
17. Марченко, В. М. Некоторые нерешенные задачи в теории управляемых динамических ГДР-систем / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2006. – Вып. XIV. – С. 3–6.
18. Zaczkiewicz, Z. Obserwowalność układów różniczkowo-algebraicznych z opóźnieniem / Z. Zaczkiewicz // Rozprawa doktorska. – Warszawa: Politechnika Warszawska, 2008.