УДК 664.02

ГИДРОДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОНУСНОЙ НАСАДКЕ

Волк А.М., Вилькоцкий А.И., Сакович А.А.
Белорусский государственный технологический университет
г. Минск, Беларусь

Известно [1], что в достаточно широком диапазоне изменения числа Рейнольдса (до 2100) стационарное пленочное течение является автомодельным, и модели ламинарного пленочного движения достаточно точны при определении средних характеристик.

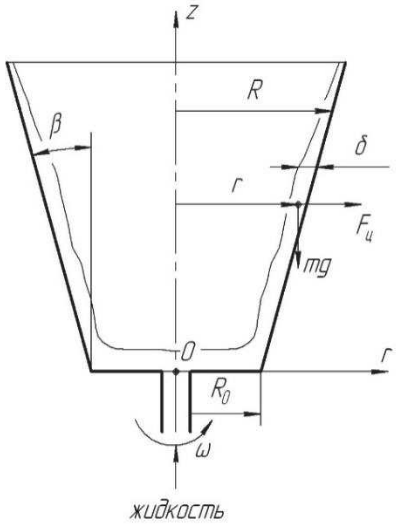

Рис. 1 – Схема течения вязкой жидкости

Исследуем стационарное осесимметричное ламинарное движение пленки вязкой жидкости по внутренней стенке вертикального конуса, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω. Ось z цилиндрической системы координат направим вверх по оси конуса (рис. 1). При малых углах β наклона образующей конуса к его оси элементарные участки поверхности рассматриваем как цилиндры.

Рассмотрим автомодельное решение $U = U(r)$ уравнений Навье – Стокса в цилиндрической системе координат. В этом случае уравнения Навье Стокса для касательной и продольной составляющих скорости принимают вид:

$$\mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU\varphi\right)\right) = 0, \tag{1}$$

$$\mu\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_l}{dr}\right)\right) + \rho(a_l - g_l) = 0. \tag{2}$$

Из внешних действующих сил рассматриваем проекции на образующую конуса центробежной силы и силы тяжести, которые обуславливаются центробежным ускорением и ускорением свободного падения (рис. 1):

$a_l = a_r \sin\beta$; $g_l = g\cos\beta$.

Считаем, что выполняется условие прилипания на стенке цилиндра и отсутствуют касательные напряжения на поверхности пленки. Тогда граничными условиями будут:

$$U_\varphi\big|_{r=R} = \omega R, \quad U_z\big|_{r=R} = 0; \quad \frac{dU_\varphi}{dr}\bigg|_{r=R-\delta} = 0, \quad \frac{dU_l}{dr}\bigg|_{r=R-\delta} = 0. \tag{3}$$

Решение уравнений (1) - (2) при заданных граничных условиях (3) дает распределение касательной и осевой составляющих скорости пленки жидкости соответственно:

$$U_\varphi = \frac{\omega R^2}{R^2 + (R-\delta)^2}\left(r + \frac{(R-\delta)^2}{r}\right); \tag{4}$$

$$U_l = \frac{a_l - g_l}{4\nu}\left[R^2 - r^2 + 2\,(R-\delta)^2 \ln\frac{r}{R}\right]. \qquad (5)$$

В зависимости от длины образующей l находим радиус в сечении конуса $R = R_0 + l\sin\beta$

Перейдем к безразмерным переменным: $\tilde{r} = \dfrac{r}{R}, \quad \tilde{\delta} = \dfrac{\delta}{R}$. Тогда

$$U_\varphi(\tilde{r}) = \frac{\omega R}{1+(1-\delta)^2}\left(\tilde{r} + \frac{\left(1-\tilde{\delta}\right)^2}{\tilde{r}}\right); \qquad (6)$$

$$U_l(\tilde{r}) = \frac{(a_l - g_l)R^2}{4\nu}\left[1 - \tilde{r}^2 + 2\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 \ln\tilde{r}\right]. \qquad (7)$$

Находим средние значения составляющих скорости:

$$\bar{U}_\varphi = \frac{1}{\tilde{\delta}}\int_{1-\tilde{\delta}}^{1} U_\varphi(\tilde{r})d\tilde{r} = \frac{\omega R}{1+\left(1-\tilde{\delta}\right)^2}\frac{1}{\tilde{\delta}}\left(\frac{1-\left(1-\tilde{\delta}\right)^2}{2} + \left(1-\tilde{\delta}\right)^2 \ln\left(1-\tilde{\delta}\right)\right); \qquad (8)$$

$$\bar{U}_l = \frac{1}{\tilde{\delta}}\int_{1-\tilde{\delta}}^{1} U_l(\tilde{r})d\tilde{r} = \frac{(a_l - g_l)R^2}{4\nu}\frac{1}{\tilde{\delta}}\times\left(\tilde{\delta}^2 - \frac{\tilde{\delta}^3}{3} - 2\left(1-\tilde{\delta}\right)^3 \ln\left(1-\tilde{\delta}\right) - 2\tilde{\delta}\left(1-\tilde{\delta}\right)^2\right). \qquad (9)$$

Относительная толщина пленки $\tilde{\delta}$ величина достаточно малая по сравнению с 1, поэтому для дальнейшего анализа можем ограничиться первыми слагаемыми разложения (8) и (9) в степенные ряды. В этом случае получаем:

$$\bar{U}_\varphi = \omega R, \quad \bar{U}_l = \frac{(a_l - g_l)\delta^2}{3\nu}.$$

Данная зависимость показывает, что средняя скорость касательной составляющей скорости пленки равна соответствующей скорости конической поверхности. Центростремительное ускорение в пленке можно принять равным

$$a_r = \frac{\bar{U}_\varphi^2}{R} = \omega^2 R.$$

Отсюда получаем зависимость для средней скорости пленки по направляющей цилиндрической поверхности:

$$\bar{U}_l = \frac{(\omega^2 R\sin\beta - g\cos\beta)\delta^2}{3\nu}.$$

При заданном удельном расходе q жидкости на единицу периметра конуса получаем соотношение:

$$q = \bar{U}_l\delta = \frac{(\omega^2 R\sin\beta - g\cos\beta)\delta^3}{3\nu}.$$

Отсюда вычисляем толщину пленки жидкости:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3q\nu}{\omega^2 R\sin\beta - g\cos\beta}}.$$

Таким образом, восходящее течение пленки по конической поверхности будет наблюдаться при выполнении условия: $\omega^2 R\sin\beta - g\cos\beta > 0$.

Данное условие соответствует физическим законам вращательного движения.

Литература

1. Уоллис, Г.Б. Одномерные двухфазные течения / Г.Б. Уоллис. – М.: Мир, 1972. – 440 с.

2. Соколов, В.И. Газожидкостные реакторы / В.И. Соколов, И.В. Доманский. – Л.: Машиностроение, 1976. – 216 с.