

## МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПОТЕРЬ ОТ НЕСВОЕВРЕМЕННОГО ПОСТУПЛЕНИЯ ДРЕВОСТОЕВ В РУБКУ

The technique of an evaluation of losses from ill-timed receipt stands in cuttings based on use of the stands growth tables and timber quality tables is circumscribed. The considered technique oriented on managerial section in which technical maturity is target. In the indicated algorithm of loss are calculated as a product of age at the moment of stand cuttings on a residual between an mean increment target assortments in the age of technical maturity and mean increment target assortments in the age in which stand has cutting. The technique of an evaluation of losses from ill-timed receipt stands in cuttings can be used for want of calculation of criterion functions based on the given magnitude and for a comparison of various variants for want of designing of principal harvesting.

**Введение.** Максимальный эффект от лесовыращивания наблюдается в том случае, когда насаждения поступают в рубку в возрасте той спелости, которая в данной хозсекции является целевой. Отклонения в ту или иную сторону неизбежно приводят к потерям. Данные потери использовались в качестве минимизируемой целевой функции для хозяйства, где техническая спелость является целевой [1, 2]. В данном случае оптимизация размера главного пользования лесом выполнялась на период, равный обороту рубки. Задача линейного программирования формулировалась следующим образом. Наибольший выход ведущих сортиментов наблюдается тогда, когда древесиной поступает в рубку в возрасте технической спелости, то есть в момент, когда среднее изменение запаса ведущих сортиментов максимально. Если древесиной поступает в рубку в другом возрасте, выход ведущих сортиментов будет ниже на величину

$$t \left( \frac{M(t_0)}{t_0} - \frac{M(t_1)}{t_1} \right), \quad (1)$$

где  $t$  – период ведения хозяйства;  $M(t)$  – выход ведущих сортиментов с 1 га насаждения в возрасте  $t$  лет;  $t_0$  – возраст технической спелости;  $t_1$  – возраст рубки насаждения.

Основываясь на выражении (1), авторы получают величину потерь, которые будут иметь место в результате того, что при реализации какого-либо плана главного пользования лесом на оборот рубки, древесиной могут быть вырублены в возрасте, отличающемся от возраста технической спелости:

$$F = \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{i=1}^n ((M_{m_0} - M_i) S_{ij} + 10(i - m_0) Z_0 S_{ij}), \quad (2)$$

где  $m_0$  – номер класса возраста технической спелости;  $n$  – число 10-летних классов возраста в хозсекции;  $M_i$  – выход ведущих сортиментов с 1 га в  $i$ -том классе возраста;  $S_{ij}$  – площадь насаждений  $i$ -того класса возраста, назначаемая в рубку в  $j$ -том десятилетии оборота рубки;  $Z_0$  –

среднее изменение запаса ведущих сортиментов в возрасте технической спелости.

Минимизация функции (2) позволяет получить наибольший выход ведущих сортиментов. В качестве эквивалента минимизации выражения (2) при условии, что каждый участок насаждения поступает в рубку один раз за оборот рубки, авторы в формулировке задачи линейного программирования используют максимизацию функции:

$$G = \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{i=1}^n M_i S_{ij} + \sum_{j=1}^{m_0} 10j Z_0 Y_j, \quad (3)$$

где  $Y_j$  – площадь насаждений  $j$ -того класса возраста к концу оборота рубки.

На базе выражения (3) авторы строят целевую функцию для задачи линейного программирования, оптимизирующей размер рубки главного пользования на период, равный обороту рубки:

$$G = \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{i=1}^n M_i X_{ij} + \sum_{i=1}^{m_0} 10i Z_0 Y_{im_0} \rightarrow \max, \quad (4)$$

где  $X_{ij}$  – площадь насаждений  $i$ -того класса возраста, назначаемая в рубку в  $j$ -том десятилетии;  $Y_{ij}$  – площадь насаждений  $i$ -того класса возраста, имеющаяся к началу  $(j + 1)$ -того десятилетия.

Заложенный в целевой функции критерий оптимальности заключается в том, чтобы во все десятилетия оборота хозяйства в главное пользование поступали древесиной с минимальным отклонением от объема крупной и средней деловой древесины в возрасте технической спелости.

В рассматриваемой задаче линейного программирования используются следующие ограничения:

$$Y_{ij} = Y_{i-1, j-1} - X_{i-1, j}, \quad (5)$$

$$Y_{i0} = S_i, \quad (6)$$

$$X_{ij} \leq Y_{i, j-1}, \quad (7)$$

$$Y_{1j} = \sum_{i=1}^n X_{i, j}, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} - \sum_{i=1}^n X_{i,j+1} \leq \alpha \sum_{i=1}^n X_{ij},$$

$$j = 1, \dots, m_0 - 1, \quad (9)$$

где  $S_i$  – площади 10-летних классов возраста;  $\alpha$  – коэффициент, называемый показателем равномерности.

Ограничения (5)–(8) отражают динамику величин  $X_{ij}$ ,  $Y_{ij}$  и связь между ними. Ограничение (9) диктуется требованием относительной равномерности главного пользования лесом.

В процессе исследования данная модель была реализована на ЭВМ ЕС-1020 по алгоритму, изложенному в работе Б. Г. Поляна, В. Н. Третьякова [4].

Рассмотренная выше модель предполагает оптимизацию главного пользования на протяжении длительного периода времени, превышающего оборот рубки. Если речь идет об оптимизации главного пользования при краткосрочном планировании задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} X_{i,j} \left( Z_i^{\text{сп, max}} - \frac{V_{i,j}}{A_{i,j}} \right) \rightarrow \min, \quad (10)$$

где  $X_{i,j}$  – площадь  $i$ -того выдела, который будет вырублен в год  $j$ , га;  $Z_i^{\text{сп, max}}$  – максимально возможное значение среднего изменения запаса древостоя или ведущих сортиментов в  $i$ -том выделе, м<sup>3</sup>/га;  $V_{i,j}$  – запас древесины или отдельных целевых сортиментов в  $i$ -том выделе в  $j$ -том году, м<sup>3</sup>/га;  $A_{i,j}$  – возраст древостоя в  $i$ -том выделе в  $j$ -том году, лет [3].

Минимизируемая целевая функция (10) выражает потери, которые может понести лесное хозяйство из-за несвоевременной рубки древостоев. В данной функции используется  $(n + 1)$  год, выходящий за расчетный период. Это сделано для того, чтобы оценить возможные потери в среднем изменении запаса древостоя или среднем изменении запаса ведущих сортиментов, которые могут произойти из-за того, что некоторые насаждения не будут вырублены в течение периода оптимизации, в то время как максимальный средний прирост в них наступит до окончания этого периода.

Ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n+1} X_{i,j} = S_i, \quad i=1, \dots, m; \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{i,p;n} \geq L - \Delta, \quad j=1, \dots, n \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{i,p;n} \leq L + \Delta, \quad j=1, \dots, n, \quad (13)$$

где  $L_{p,n}$  – лесосека равномерного пользования по площади;  $\Delta$  – максимально допустимые отклонения расчетной лесосеки от лесосеки равномерного пользования.

Ограничения (11) позволяют исключить из области допустимых решения точку, соответствующую полному отсутствию пользования путем вовлечения в расчет всех древостоев.

Ограничения (12), (13) устанавливают максимально допустимые отклонения  $\Delta$  расчетной лесосеки от лесосеки равномерного пользования, что будет приводить к улучшению возрастной структуры лесов. Причем чем меньше будут установлены допустимые отклонения, тем интенсивнее будет выравниваться распределение лесов по классам возраста.

В рассмотренных выше задачах линейного программирования, сформулированных для оптимизации главного пользования, целевые функции выражают потери, вызванные несовпадением момента наступления целевой спелости и момента рубки древостоя. В связи с этим разработка методики оценки таких потерь, основанная на использовании существующих справочно-нормативных материалов, является актуальной задачей.

**Методика оценки потерь от несвоевременного поступления древостоев в рубку.** Методика оценки потерь от несвоевременного поступления древостоев в рубку в основном обуславливается целевой спелостью хозсекции. В данной работе рассматривается методика, ориентированная на хозсекции, в которых в качестве целевой используется техническая спелость леса.

Для того чтобы определить потери от несвоевременного поступления древостоев в рубку, необходимо знать момент наступления технической спелости для каждого конкретного выдела, а также общий запас древесины и запасы целевых сортиментов в момент рубки и в момент наступления технической спелости.

Общий запас можно получить с помощью таблиц хода роста, а запас сортиментов с помощью товарных таблиц. Таблицы хода роста понадобятся также для определения в указанные моменты времени высот и диаметров древостоев. Они будут необходимы при использовании товарных таблиц.

Таблицы хода роста для каждого выдела подбираются в зависимости от породы, класса бонитета или типа леса (в зависимости от того, какие имеются нормативные материалы). Товарные таблицы подбираются в зависимости от породы и класса товарности.

С помощью таблиц хода роста можно получить основные таксационные показатели: высота, диаметр и запас, в различные моменты времени. Однако в подавляющем большинстве случаев таксационные характеристики кон-

кретного древостоя не будут в точности соответствовать значениям, приводимым в таблицах хода роста для соответствующего возраста. В связи с этим целесообразно вычислить поправочные коэффициенты, характеризующие отмеченные выше несоответствия между конкретным древостоем и таблицами хода роста.

Для высоты:

$$K_H = \frac{H}{H_T}; \quad (14)$$

для диаметра:

$$K_D = \frac{D}{D_T}; \quad (15)$$

для запаса:

$$K_M = \frac{M}{M_T}, \quad (16)$$

где  $K_H, K_D, K_M$  – коэффициенты несоответствия таксационных показателей древостоя таблицам хода роста по высоте, диаметру и запасу соответственно;  $H, D, M$  – высота, диаметр и запас древостоя;  $H_T, D_T, M_T$  – высота, диаметр и запас из таблиц хода роста для возраста, соответствующего возрасту древостоя.

Зная коэффициенты несоответствия таксационных показателей древостоя таблицам хода роста (14)–(16) можно без труда определить высоты, диаметры и запасы данного насаждения в различных возрастах, умножая табличные значения показателей на соответствующие коэффициенты:

$$H_A = K_H H_{T, A}, \quad (17)$$

$$D_A = K_D D_{T, A}, \quad (18)$$

$$M_A = K_M M_{T, A}. \quad (19)$$

где  $H_A, D_A, M_A$  – высота, диаметр и запас древостоя в возрасте  $A$ ;  $H_{T, A}, D_{T, A}, M_{T, A}$  – высота, диаметр и запас древостоя из таблиц хода роста для возраста  $A$ .

С помощью формул (17)–(19) можно найти высоты, диаметры и запасы насаждения для всех возрастов, представленных в таблицах хода роста. Воспользовавшись интерполяцией, нетрудно вычислить перечисленные выше таксационные показатели и для возраста, в котором древостой вырубается  $A_p$ .

Зная основные таксационные показатели древостоя, можно определить выход древесины различных категорий крупности с помощью товарных таблиц для всех возрастов, представленных в таблицах хода роста. Далее на основе полученных данных следует вычислить средний прирост ведущих сортиментов или стоимости древесины, получаемой с выдела. Полу-

ченные результаты позволят нам определить, какому возрасту  $A_m$  представленному в таблицах хода роста, соответствует самое большое значение среднего прироста. Однако скорее всего средний прирост будет иметь максимум не в указанной выше точке  $A_m$ , а где-то рядом. Для определения возраста  $A_{max}$ , соответствующего максимуму среднего прироста, построим модель его связи с возрастом. Чтобы построить модель, воспользуемся значениями среднего прироста в точке  $A_m$  и двух соседних  $A_{m-1}$  и  $A_{m+1}$ . Модель будем строить в виде параболы второго порядка:

$$Z = b'_0 + b'_1 A + b'_2 A^2, \quad (20)$$

где  $b'_0, b'_1$  и  $b'_2$  – постоянные коэффициенты;  $Z$  – средний прирост;  $A$  – возраст древостоя.

Для того чтобы упростить дальнейшие выкладки, сделаем замену переменной:

$$x = \frac{A - A_m}{\Delta A}, \quad A = A_m + \Delta A x, \quad (21)$$

где  $\Delta A$  – величина возрастного интервала, с которым представлены данные в таблицах хода роста.

С учетом (21) выражение (20) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} Z &= b'_0 + b'_1(A_m + \Delta A x) + b'_2(A_m + \Delta A x)^2 = \\ &= b'_0 + b'_1(A_m + \Delta A x) + \\ &+ b'_2(A_m^2 + 2A_m \Delta A x + \Delta A^2 x^2) = \\ &= b'_0 + b'_1 A_m + b'_1 \Delta A x + b'_2 A_m^2 + \\ &+ 2b'_2 A_m \Delta A x + b'_2 \Delta A^2 x^2 = \\ &= b'_0 + b'_1 A_m + b'_2 A_m^2 + \\ &+ (b'_1 \Delta A + 2b'_2 A_m \Delta A)x + b'_2 \Delta A^2 x^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} b_0 &= b'_0 + b'_1 A_m + b'_2 A_m^2, \\ b_1 &= b'_1 \Delta A + 2b'_2 A_m \Delta A, \\ b_2 &= b'_2 \Delta A^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как  $A_m$  и  $\Delta A$  – константы, то  $b_0, b_1$  и  $b_2$  так же являются константами. С учетом (23) выражение (22) можно переписать следующим образом:

$$Z = b_0 + b_1 x + b_2 x^2. \quad (24)$$

Теперь для определения момента наступления максимального значения среднего прироста нам осталось найти местоположение локально-

го максимума функции (24). Для этого надо определить значение  $x_{\max}$ , для которого производная функции (24) будет равна нулю. Найдем производную этой функции:

$$Z' = b_1 + 2b_2x.$$

Затем, приравняв ее к нулю, найдем местоположение локального экстремума:

$$b_1 + 2b_2x_{\max} = 0,$$

откуда

$$x_{\max} = -\frac{b_1}{2b_2}. \quad (25)$$

Теперь нам надо оценить значение констант  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$ . Для этого воспользуемся значениями среднего прироста для возраста, в котором эта величина самая большая ( $A_m$ ) и для двух соседних возрастов ( $A_{m-1}$  и  $A_{m+1}$ ). Подставив эти значения в формулу (24), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} Z_{m-1} = b_0 + b_1x_{m-1} + b_2x_{m-1}^2, \\ Z_m = b_0 + b_1x_m + b_2x_m^2, \\ Z_{m+1} = b_0 + b_1x_{m+1} + b_2x_{m+1}^2, \end{cases} \quad (26)$$

где  $Z_{m-1}$  – средний прирост целевых сортиментов в возрасте  $A_{m-1}$ , м<sup>3</sup>/га в год;  $Z_m$  – средний прирост целевых сортиментов в возрасте  $A_m$ , м<sup>3</sup>/га в год;  $Z_{m+1}$  – средний прирост целевых сортиментов в возрасте  $A_{m+1}$ , м<sup>3</sup>/га в год;  $x_{m-1}$ ,  $x_m$ ,  $x_{m+1}$  – значения переменной  $x$ , соответствующие возрастам  $A_{m-1}$ ,  $A_m$  и  $A_{m+1}$ . С учетом (21) получим:

$$\begin{aligned} x_{m-1} &= \frac{A_{m-1} - A_m}{\Delta A} = -1; \\ x_m &= \frac{A_m - A_m}{\Delta A} = 0; \\ x_{m+1} &= \frac{A_{m+1} - A_m}{\Delta A} = 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя значения переменной  $x$  из (27) в систему уравнений (26), получим:

$$\begin{cases} Z_{m-1} = b_0 - b_1 + b_2, \\ Z_m = b_0, \\ Z_{m+1} = b_0 + b_1 + b_2. \end{cases} \quad (28)$$

Вычитая второе уравнение системы (28) из первого и третьего уравнений и перенося  $Z_m$  в их правые части, получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} Z_{m-1} = Z_m - b_1 + b_2, \\ Z_{m+1} = Z_m + b_1 + b_2. \end{cases} \quad (29)$$

Далее найдем сумму и разность уравнений системы (29):

$$\begin{cases} Z_{m+1} + Z_{m-1} = 2Z_m + 2b_2, \\ Z_{m+1} - Z_{m-1} = 2b_1. \end{cases} \quad (30)$$

Преобразуем уравнения системы (30) следующим образом:

$$\begin{cases} 2b_2 = Z_{m+1} - 2Z_m + Z_{m-1}, \\ b_1 = \frac{Z_{m+1} - Z_{m-1}}{2}. \end{cases} \quad (31)$$

Используя уравнения системы (31), мы можем преобразовать выражение (25), как показано ниже:

$$x_{\max} = -\frac{b_1}{2b_2} = -\frac{Z_{m-1} - Z_{m+1}}{2(Z_{m-1} - 2Z_m + Z_{m+1})}. \quad (32)$$

Таким образом, мы выразили значение переменной  $z$ , соответствующее локальному экстремуму, через значения средних приростов в возрасте  $A_{m-1}$ ,  $A_m$  и  $A_{m+1}$ .

Теперь нам надо убедиться, что этот локальный экстремум является локальным максимумом. Для этого найдем вторую производную функции (24):

$$Z'' = 2b_2.$$

С учетом первого уравнения системы (31) получим:

$$Z'' = Z_{m+1} - Z_m + Z_{m-1} - Z_m.$$

Так как мы выбирали возраст  $A_m$  таким образом, что бы средний прирост  $Z_m$  в этом возрасте был самым большим, то вторая производная функции (24) в точке  $x_{\max}$ , как, впрочем, и в любой другой точке, будет отрицательной. Это говорит нам о том, что в точке  $x_{\max}$  функция (24) имеет локальный максимум.

Теперь используя (21), сделаем обратную подстановку и преобразуем выражение (32) к виду:

$$x_{\max} = \frac{A_{\max} - A_m}{\Delta A} = \frac{Z_{m-1} - Z_{m+1}}{2(Z_{m+1} - 2Z_m + Z_{m-1})},$$

откуда момент наступления максимального значения среднего прироста целевых сортиментов  $A_{\max}$  будет равен

$$A_{\max} = A_m + \Delta A \frac{Z_{m-1} - Z_{m+1}}{2(Z_{m+1} - 2Z_m + Z_{m-1})}. \quad (33)$$

Теперь преобразуем уравнение (24) таким образом, чтобы, зная значение  $A_{\max}$ , с его помощью можно было вычислить максимально-возможное значение среднего изменения запаса древостоя или ведущих сортиментов  $Z_i^{\text{сп, max}}$ . Для этого подставим в него значения коэффициентов  $b_0$  из

второго уравнения системы (28),  $b_1$  из второго уравнения системы (31) и  $b_2$  из первого уравнения системы (31), деленного на 2:

$$Z = Z_m + \frac{Z_{m+1} - Z_{m-1}}{2}x + \frac{Z_{m+1} - 2Z_m + Z_{m-1}}{2}x^2$$

и сделав обратную подстановку, используя (21), получим

$$Z = Z_m + \frac{Z_{m+1} - Z_{m-1}}{2} \frac{A - A_m}{\Delta A} + \frac{Z_{m+1} - 2Z_m + Z_{m-1}}{2} \left( \frac{A - A_m}{\Delta A} \right)^2. \quad (34)$$

Далее, подставляя значение  $A_{\max}$  в уравнение (34), можно вычислить величину  $Z^{\text{cp. max}}$ :

$$Z^{\text{cp. max}} = Z_m + \frac{Z_{m+1} - Z_{m-1}}{2} \frac{A_{\max} - A_m}{\Delta A} + \frac{Z_{m+1} - 2Z_m + Z_{m-1}}{2} \left( \frac{A_{\max} - A_m}{\Delta A} \right)^2. \quad (35)$$

Зная величину максимального среднего прироста  $Z^{\text{cp. max}}$ , можно определить величину потерь, вызванных отклонением возраста рубки древостоя  $A_p$  от возраста  $A_{\max}$ , в котором средний прирост достигает максимума:

$$A_p \left( Z^{\text{cp. max}} - Z^{\text{cp. } A_p} \right), \quad (36)$$

где  $Z^{\text{cp. } A_p}$  – средний прирост в возрасте рубки древостоя.

Таким образом, основываясь на приведенных выше соображениях, алгоритм оценки потерь от несвоевременного поступления древостоев в рубку можно сформулировать следующим образом.

1. Подобрать нормативные материалы (таблицы хода роста, товарные таблицы).

2. Вычислить коэффициенты несоответствия таксационных показателей древостоя таблицам хода роста по формулам (14)–(16).

3. Определить таксационные показатели древостоя для всех возрастов, представленных в таблицах хода роста по формулам (17)–(19).

4. Определить выход древесины по категориям крупности для всех возрастов, представленных в таблицах хода роста, где это воз-

можно, и для возраста  $A_p$ , в котором он вырубается.

5. Вычислить средний прирост ведущих сортиментов или их стоимость для всех возрастов, перечисленных в п. 4.

6. Найти возраст  $A_m$ , где средний прирост имеет самое большое значение из вычисленных.

7. Вычислить на основании среднего прироста в возрасте  $A_m$  и двух соседних  $A_{m-1}$  и  $A_{m+1}$  возраст  $A_{\max}$ , в котором средний прирост достигает максимума по формуле (33).

8. Определить величину максимального среднего прироста  $Z_i^{\text{cp. max}}$  в возрасте  $A_{\max}$  по формуле (35).

9. Вычислить величину потерь по формуле (36).

10. Выполнить шаги 1–9 для каждого элемента леса в древостое.

11. Выполнить шаги 1–10 для каждого выдела, поступающего в рубку.

12. Найти общую сумму потерь.

**Заключение.** Рассмотренная в данной работе методика оценки потерь от несвоевременной рубки древостоев может быть использована для сравнения различных вариантов при проектировании главного пользования лесом. Кроме того, она может использоваться для вычисления целевых функций, в основе которых лежат потери от несвоевременной рубки древостоев.

## Литература

1. Бочков, И. М. ЭВМ в лесоустройстве / И. М. Бочков, А. Г. Костенко, Ю. И. Бурневский. – М.: Лесная промышленность, 1979. – 136 с.
2. Бочков, И. М. Определение размера главного пользования лесом с применением линейного программирования и ЕС ЭВМ в лесоустройстве / И. М. Бочков, С. Г. Сеницын, В. Е. Плиско. – М.: ЦБНТИ, 1978. – 32 с.
3. Машковский, В. П. Оптимизация главного пользования лесом при краткосрочном планировании / В. П. Машковский // Труды БГТУ. Сер I, Лесн. хоз-во. – 2006. – Вып. XIV. – С. 48–51.
4. Поляк, Б. Т. Об одном итерационном методе линейного программирования и его экономической интерпретации / Б. Т. Поляк, Н. В. Третьяков // Экономика и математические методы. – 1972. – Т. 8, вып. 5. – С. 740–751.