УДК 330.4

Кулак М. И., профессор; Семеняко Н. М., ассистент

# ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫПУСКА НОВОЙ ПРОДУКЦИИ НА ОСНОВЕ ПРЕЦЕДЕНТОВ ЕЕ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА

At the heart of long-term forecasting activity of producing of competitive output the conception of its life cycle is situated. When function of the life cycle is built with help of Perl's modified formula the accuracy of statistic data about the issuing of the products has a great importance. In the article the analysis of allowable deviation of the statistic data is carried out for the reason to reconstruct a reliable function of the life cycle of the product. Possibility of construction of the initial stages of the life cycle is carried out when the exact date of the beginning of production and the initial amount of production is not known.

**Введение.** В основе долгосрочного прогнозирования выпуска продукции в современном производстве лежит концепция ее жизненного цикла.

В соответствии с методом, предложенным в [1], жизненный цикл полиграфической продукции описывается *S*-образной кривой, которая определяется по модифицированной формуле Перла.

Функции жизненного цикла позволяют полиграфическому предприятию определять стратегию маркетинга, планировать процессы производства продукции, взаимосвязь издержек и доходов.

При построении функции жизненного цикла с помощью модифицированной формулы Перла важна полнота данных о выпуске продукции. В работе [2] был проведен анализ минимального набора статистических данных для восстановления функции жизненного цикла. Может возникнуть ситуация, когда статистические данные за некоторый промежуток времени отсутствуют, что может исказить функцию жизненного цикла.

**Основная часть.** Целью данной работы является исследование возможности построения функции жизненного цикла при неполном наборе исходных данных. Эта проблема имеет два аспекта:

1. Определение допустимых отклонений статистических данных для восстановления функции жизненного цикла.

2. Возможность построения начальных стадий жизненного цикла продукции в случае, когда точная дата начала выпуска и объемы выпуска продукции неизвестны.

При моделировании использованы данные о годовых тиражах журнала за 1999–2006 гг.

Решение *первой задачи* разделено на следующие этапы:

1) определение точных коэффициентов модифицированной формулы Перла и построение функции жизненного цикла по имеющимся статистическим данным;

2) рандомизация данных, рассчитанных по функции жизненного цикла (1), при различных значениях среднеквадратического отклонения;

3) определение коэффициентов модифицированной формулы Перла и построение жизненного цикла по рандомизированным данным;

4) определение отклонений значений коэффициентов модифицированной формулы Перла и анализ их изменения в зависимости от значений среднеквадратического отклонения, заложенного в процедуру рандомизации;

5) оценка сходимости результатов исследования.

В работах [2, 3] было предложено два подхода к определению неизвестных коэффициентов модифицированной формулы Перла, согласно которым асимптота $a$ и коэффициент пропорциональности $k$ могут быть найдены с помощью метода регрессионного анализа из уравнения параболы или с помощью данных о совокупном выпуске продукции. В приведенных подходах переменная $y_0$ принималась равной начальной партии (тиражу) продукции. Такой вариант допустим, если имеются точные статистические данные о выпуске продукции за каждый год, начиная с исходной партии.

Однако может возникнуть необходимость построения функции жизненного цикла для продукции, имеющей длительный жизненный цикл, когда данные о выпуске продукции в начальный период отсутствуют, а также неизвестна дата начала выпуска этой продукции. В таком случае величина $y_0$ также является неизвестной и необходимо определять все коэффициенты модифицированной формулы Перла ($y_0$, $a$, $k$) в рамках единой процедуры.

Эта задача решается с помощью метода наименьших квадратов, который для логистической функции выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{y_0 a}{y_0 - (a - y_0)e^{-kat_i}}\right)^2 \to \min, \qquad (1)$$

где $n$ — количество лет, за которые собраны статистические данные; $y_i$ — тираж в $t_i$ году.

Как известно, условием минимума функции, зависящей от нескольких параметров, является равенство нулю всех частных производных:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} y_0 a Z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} -aZ_i + \sum_{i=1}^{n} y_0 a(1-e^{-kat_i})Z_i\right) = 0, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} y_0 a Z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} -y_0 Z_i + \sum_{i=1}^{n} y_0 a(e^{-kat_i} - (a-y_0)kt_i e^{-kat_i})Z_i\right) = 0, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} y_0 a Z_i\right)\sum_{i=1}^{n} y_0 a^2 (a-y_0) t_i e^{-kat_i} Z_i = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $Z_i = Z(y_0, a, k, t_i) = \dfrac{1}{y_0 + (a - y_0)e^{-kat_i}}$.

Система (2) решается в математическом пакете, например MathCAD. Задаваемые для программы начальные приближения должны быть достаточно близки к корням уравнений. Для этого необходимо предварительно найти начальные приближения коэффициентов $a$ и $k$ с помощью метода [3].

Решением системы (2) для рассматриваемого примера являются следующие значения: $y_0 = 12\,120$, $a = 126\,000$, $k = 3{,}365 \cdot 10^{-6}$.

Рандомизация расчетных исходных данных заключается в том, что для каждого значения годового тиража, рассчитанного по функции жизненного цикла, создается массив случайных чисел, распределенных по нормальному закону.

Затем из массива случайным образом выбирается одно число, которое станет новым рандомизированным значением годового тиража продукции. Таким образом формируется массив рандомизированных данных о выпуске продукции. Эта процедура выполняется при значениях относительного среднеквадратического отклонения $\tilde{\sigma}$ от 0,05 до 0,4 с шагом 0,05.

Абсолютное среднеквадратическое отклонение (величина, которая закладывается в процедуру рандомизации) рассчитывается по формуле

$$\sigma_i = \tilde{\sigma} y_i. \quad (3)$$

Расчетные исходные и полученные рандомизированные годовые тиражи журнала сведены в табл. 1. Далее для рандомизированных значений с помощью системы уравнений (2) по методу наименьших квадратов рассчитываются новые коэффициенты модифицированной формулы Перла (табл. 2). Очевидно, что с увеличением величины $\tilde{\sigma}$ отклонения значений всех коэффициентов от исходных значений возрастают.

График нормированных отклонений коэффициентов модифицированной формулы Перла $\Delta$ при $\tilde{\sigma} = 0{,}05$–$0{,}2$ приведен на рис. 1.

Таблица 1

**Расчетные исходные и рандомизированные годовые тиражи журнала**

| Год | Расчетные исходные данные, экз. | Рандомизированные данные, экз. | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\tilde{\sigma} = 0{,}05$ | $\tilde{\sigma} = 0{,}1$ | $\tilde{\sigma} = 0{,}15$ | $\tilde{\sigma} = 0{,}2$ | $\tilde{\sigma} = 0{,}25$ | $\tilde{\sigma} = 0{,}3$ | $\tilde{\sigma} = 0{,}35$ | $\tilde{\sigma} = 0{,}4$ |
| 0 | 12 120 | 11 611 | 14 635 | 13 578 | 11 056 | 10 790 | 10 524 | 10 258 | 9 992 |
| 1 | 17 625 | 15 730 | 15 927 | 12 487 | 10 774 | 14 090 | 8 126 | 12 676 | 1 131 |
| 2 | 25 079 | 26 231 | 30 496 | 25 209 | 35 291 | 10 973 | 9 307 | 36 097 | 8 107 |
| 3 | 34 677 | 36 074 | 30 191 | 46 777 | 55 446 | 16 384 | 46 438 | 16 875 | 48 154 |
| 4 | 46 265 | 49 562 | 43 429 | 31 047 | 64 887 | 52 696 | 66 256 | 86 115 | 92 054 |
| 5 | 59 214 | 58 700 | 68 132 | 38 921 | 38 573 | 88 241 | 84 241 | 81 212 | 28 491 |
| 6 | 72 492 | 69 352 | 58 521 | 93 535 | 34 891 | 116 615 | 101 423 | 100 329 | 47 970 |
| 7 | 84 960 | 88 912 | 89 687 | 100 110 | 43 340 | 123 278 | 136 164 | 140 575 | 164 096 |
| 8 | 95 736 | 91 426 | 94 782 | 121 759 | 60 258 | 141 971 | 162 309 | 171 998 | 184 848 |

Таблица 2

**Значения коэффициентов модифицированной формулы Перла и их отклонения от исходных значений**

| $\tilde{\sigma}$ | $y_0$ | $\Delta y_0$ | $a$ | $\Delta a$ | $k$ | $\Delta k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 12 120 | 0 | 126 000 | 0 | $3{,}365 \cdot 10^{-6}$ | 0 |
| 0,05 | 12 708 | 588 | 104 072 | –21 928 | $4{,}299 \cdot 10^{-6}$ | $9{,}342 \cdot 10^{-7}$ |
| 0,1 | 15 804 | 3 684 | 124 904 | –1 096 | $2{,}785 \cdot 10^{-6}$ | $-5{,}802 \cdot 10^{-7}$ |
| 0,15 | 9 156 | –2 964 | 229 170 | 103 170 | $1{,}825 \cdot 10^{-6}$ | $-1{,}540 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,2 | 19 884 | 7 764 | 75 528 | –50 473 | $5{,}319 \cdot 10^{-6}$ | $1{,}954 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,25 | 1 319 | –10 800 | 168 226 | 42 226 | $5{,}115 \cdot 10^{-6}$ | $1{,}750 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,3 | 5 605 | –6 515 | 269 218 | 143 218 | $1{,}894 \cdot 10^{-6}$ | $-1{,}471 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,35 | 8 063 | –4 057 | 395 514 | 269 514 | $1{,}051 \cdot 10^{-6}$ | $-2{,}314 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,4 | 3 152 | –8 968 | 310 287 | 184 287 | $1{,}974 \cdot 10^{-6}$ | $-1{,}391 \cdot 10^{-6}$ |

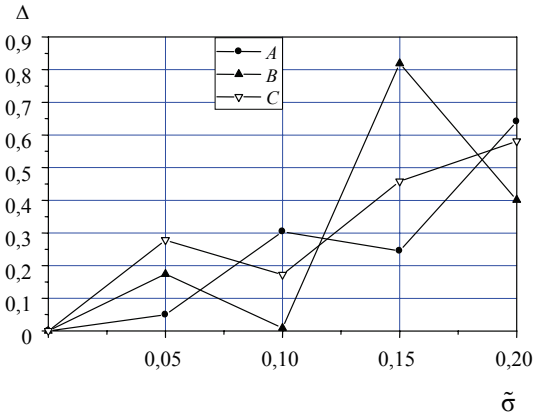


Рис. 1. Зависимости нормированных отклонений значений коэффициентов модифицированной формулы Перла от $\tilde{\sigma}$: $A$ — $\Delta y_0$; $B$ — $\Delta a$; $C$ — $\Delta k$

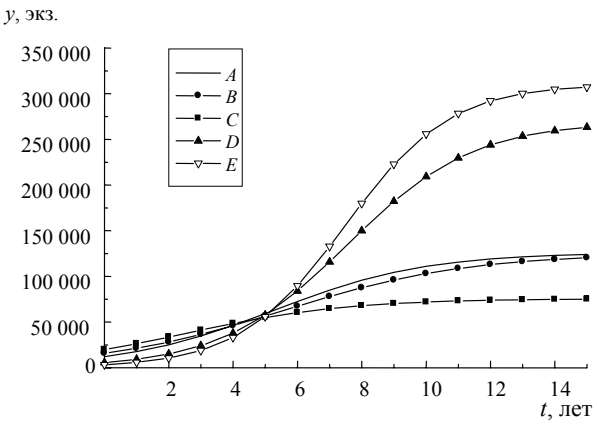


Рис. 2. Функции жизненного цикла, построенные: $A$ — по исходным данным; по рандомизированным данным: $B$ — $\tilde{\sigma} = 0{,}1$; $C$ — $\tilde{\sigma} = 0{,}2$; $D$ — $\tilde{\sigma} = 0{,}3$; $E$ — $\tilde{\sigma} = 0{,}4$

Из рисунка видно, что к моделированию могут быть приняты рандомизированные данные при $\tilde{\sigma} \le 0{,}1$, поскольку значение отклонений большее 30% приводит к значительным искажениям функции жизненного цикла.

В подтверждение на рис. 2 приведены функции жизненного цикла, построенные по исходным и рандомизированным данным. Как видно из рисунка, значительные отклонения функций жизненного цикла от исходной зависимости наблюдаются уже при значениях относительного среднеквадратического отклонения $\tilde{\sigma} > 0{,}1$.

Для количественной оценки сходимости результатов исследования рассчитаны такие показатели, как дисперсия воспроизводимости $S_{\text{воспр}}$, дисперсия адекватности $S_{\text{ад}}$, критерий Фишера $F$, коэффициент корреляции $R$, среднеквадратическое отклонение функции жизненного цикла, построенной по рандомизированным данным, от исходной функции жизненного цикла $SL$ (табл. 3).

Анализ табл. 3 показывает, что с увеличением среднеквадратического отклонения, заложенного в процедуру рандомизации, увеличиваются дисперсии воспроизводимости и адекватности, коэффициент корреляции убывает, но незначительно, что свидетельствует о сильной корреляционной зависимости, показатель $SL$ также возрастает. Рассчитанные значения критерия Фишера меньше табличного (19,25 для уровня значимости 0,05 и числа степеней свободы 2) [4], однако в целом значения критерия Фишера неустойчивы.

На рис. 3 построена регрессионная зависимость среднеквадратических отклонений функций $SL$ от среднеквадратического отклонения $\tilde{\sigma}$, заложенного в процедуру рандомизации. Линия тренда описывается уравнением

$$SL(\tilde{\sigma}) = 111\,000\tilde{\sigma} + 510\,600\tilde{\sigma}^2. \qquad (4)$$

Сходимость параболы в начале координат свидетельствует о сходимости результатов исследования и работоспособности предлагаемого метода.

*Вторая задача* (восстановление начальных стадий жизненного цикла) возникает при переходе предприятия к производству новой продукции, когда полезно использовать опыт других производителей аналогичных товаров. Информация об объемах выпуска продукции не является абсолютно открытой, и, как правило, известны данные только за последние годы, в то время как для предприятия-новичка на рынке представляет интерес именно начальные партии продукции, т. е. стратегия продвижения

Таблица 3

**Значения критериев адекватности функций жизненного цикла, построенных по рандомизированным данным**

| $\tilde{\sigma}$ | $S_{\text{воспр}}$ | $S_{\text{ад}}$ | $F$ | $R$ | $SL$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,05 | 29 764 | 31 080 | 1,090 | 0,993 | 12 494 |
| 0,1 | 30 016 | 29 404 | 0,960 | 0,967 | 5 553 |
| 0,15 | 40 731 | 46 847 | 1,323 | 0,924 | 52 881 |
| 0,2 | 19 424 | 21 609 | 1,238 | 0,651 | 31 657 |
| 0,25 | 54 174 | 66 645 | 1,513 | 0,957 | 39 510 |
| 0,3 | 56 684 | 61 514 | 1,178 | 0,977 | 83 335 |
| 0,35 | 58 567 | 59 170 | 1,021 | 0,953 | 122 304 |
| 0,4 | 68 158 | 72 929 | 1,145 | 0,836 | 115 533 |

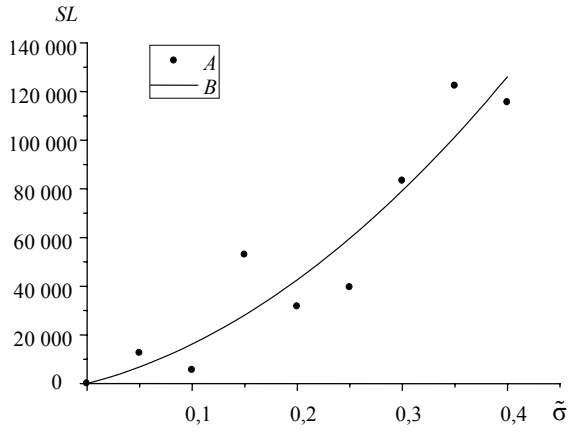


Рис. 3. Среднеквадратические отклонения функций жизненного цикла, построенных по рандомизированным данным, от исходной функции: *A* — расчетные значения; *B* — линия тренда

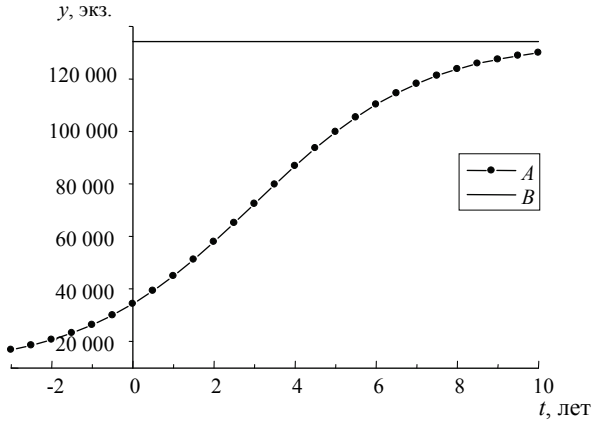


Рис. 4. Функция полного жизненного цикла журнала: *A* — функция жизненного цикла; *B* — асимптота

продукции на рынок. В данном случае с использованием имеющихся данных можно смоделировать жизненный цикл продукции, выпускаемой другими предприятиями.

Для иллюстрации решения этой задачи использовались статистические данные о выпуске указанного ранее журнала за последние 5 лет (2002–2006 гг.). По методу наименьших квадратов были определены коэффициенты модифицированной формулы Перла (1) и построена функция «неполного» жизненного цикла. С помощью данной функции можно прогнозировать выпуск продукции в будущем периоде, но невозможно определить время начала выпуска продукции.

Согласно [5], жизненный цикл продукции также может описываться дифференциальным уравнением Ферхюльста – Перла, решением которого является логистическая кривая

$$y(t) = \frac{a}{1+10^{A-Bt}}, \qquad (5)$$

где $A$ и $B$ — параметры логистической кривой, которые находятся из сопоставления формул (1) и (5).

Формулу (5) можно преобразовать к виду

$$A - Bt = \lg(a - y) - \lg(y). \qquad (6)$$

С учетом того, что в правой части равенства (6) стоит небольшая величина, ею можно пренебречь, и тогда равенство примет вид

$$A - Bt = 0. \qquad (7)$$

Если известны коэффициенты $A$ и $B$, уравнение (7) можно использовать для определения времени начала выпуска продукции: корень уравнения равен принятому ранее условному нулю.

Решением уравнения (7) для рассматриваемого примера является $t = 3$. Это свидетельствует о том, что до анализируемого периода журнал выпускался 3 года (1999–2001 гг.), и это соответствует действительности. Полная функция жизненного цикла журнала представлена на рис. 4.

С помощью формулы (1) или (5) определяются тиражи продукции за предыдущие годы, как прецедент выхода на рынок. Кроме этого, также необходимо учитывать изменение внешних условий — спроса, стоимости материалов и др.

**Заключение.** Таким образом, по работе можно сделать следующие выводы:

– функция жизненного цикла продукции может быть построена точно, если отклонения в статистических данных о выпуске продукции не превышают 10%;

– с помощью модифицированной формулы Перла возможно восстановление начальных стадий жизненного цикла продукции, если нет сведений о начальных объемах выпуска продукции.

## Литература

1. Кулак, М. И. Метод моделирования жизненного цикла полиграфического оборудования в задачах инновационного менеджмента / М. И. Кулак, З. В. Гончарова, Н. М. Семеняко // Труды БГТУ. Сер. IX, Издат. дело и полиграфия. – 2004. – Вып. XII. – С. 110–114.

2. Кулак, М. И. Анализ устойчивости статистической модели жизненного цикла печатной продукции к изменению набора данных / М. И. Кулак, Н. М. Семеняко // Труды БГТУ. Сер. IX, Издат. дело и полиграфия. – 2007. – Вып. XV. – С. 69–72.

3. Кулак, М. И. Обобщенная модель жизненного цикла печатной продукции / М. И. Кулак, Н. М. Семеняко, Н. Э. Трусевич // Труды БГТУ. Сер. IX, Издат. дело и полиграфия. – 2006. – Вып. XIV. – С. 129–132.

4. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск: Выш. шк., 1983. – 280 с.

5. Малюк, В. И. Проектирование структур производственных предприятий / В. И. Малюк. – СПб.: Бизнес-пресса, 2005. – 320 с.

*Поступила 18.12.2008.*