УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОДНОЙ ГИБРИДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Борковская Инна Мечиславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Белорусский государственный технологический университет,
Минск, Республика Беларусь.
borkovskaia@gmail.com

Пыжкова Ольга Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующая кафедрой высшей математики,
Белорусский государственный технологический университет,
Минск, Республика Беларусь.
olga.pyzhcova@gmail.com

Аннотация. Обеспечение устойчивости изучаемой системы управления является одной из важнейших задач при исследовании динамических систем. В статье рассматриваются вопросы построения регулятора, стабилизирующего скалярную гибридную динамическую систему, включающую непрерывную и дискретную компоненты. Результаты могут быть применены при синтезе управляющих воздействий в реальных системах управления, а также внедрены в учебный процесс для студентов соответствующих специальностей, в частности специальности «Автоматизация технологических процессов и производств».
Ключевые слова: теория управления; гибридные системы; регулятор по типу обратной связи.

ON THE CONSTRUCTION OF STABILIZING REGULATOR FOR ONE HYBRID DYNAMIC SYSTEM

Borkovskaya Inna,
candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Belarusian State Technological University,
Minsk, Belarus

Pyzhkova Olga,
candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Higher Mathematics,
Belarusian State Technological University,
Minsk, Belarus

Abstract. Ensuring the stability of control system is one of the most important tasks in the investigation of dynamic systems. The article discusses the issues of constructing a regulator that stabilizes a scalar hybrid dynamic system that includes continuous and discrete components. The results can be applied in the synthesis of control actions in real control systems, as well as introduced into the educational process for students of relevant specialties, in particular, the specialty "Automation of technological processes and production".
Keywords: control theory; hybrid systems; feedback type regulator.

Математика – наука, история развития которой неразрывно связана с историей нашей цивилизации, при этом наука развивающаяся. Пройдя путь от элементарной математики до собственно высшей математики, она в дальнейшем стала приобретать новые очертания на стыке наук. Одним из важнейших направлений современной прикладной математической науки является теория управления.

С середины XX века теория управления, ранее называвшаяся теорией регулирования, занимается вопросами управления созданными человеком объектами. При изучении математических моделей процессов, в том числе динамических, возникает вопрос построения такой обратной связи (регулятора по типу обратной связи), которая бы придавала замкнутой системе желаемые свойства.

Одним из важнейших таких свойств является свойство устойчивости системы управления. Задача построения такой обратной связи, которая бы делала замкнутую систему устойчивой (в частности, асимптотически устойчивой), называется задачей стабилизации, а регулятор, решающий эту задачу, – стабилизирующим регулятором.

В зависимости от вида систем вводят регуляторы соответствующего типа. Некоторые из них проще с точки зрения практической реализации, однако не всегда дают возможность обеспечить системе желаемые свойства. С другой стороны, регуляторы, дающие замкнутой системе управления, к примеру, устойчивость, не всегда возможно реализовать на практике. Возникает потребность в анализе соответствующей обратной связи, в сравнении регуляторов друг с другом.

В настоящее время особую актуальность приобрело исследование математических моделей динамических процессов, в природе которых есть некая «неоднородность». Получаемые при этом динамические системы часто называют гибридными. Это могут быть дискретно-непрерывные системы, часть переменных в которых являются непрерывными, а часть – дискретными. Рассматривают также дифференциально-разностные системы, в которых наряду с дифференциальными присутствуют и алгебраические зависимости. Среди гибридных систем выделяют и так называемые системы с «многомерным временем», содержащие непрерывную и дискретную компоненты. Вышеперечисленные виды систем достаточно полно описывают изучаемые процессы и используются в автомобилестроении, робототехнике, авиастроении и самых разных областях техники. Управление термостатом системой нагрева и охлаждения дома является одним из примеров гибридной системы управления. Это и система коммутации, в которой несколько динамических моделей связаны сводом правил для их переключения. Таким образом, изучение гибридных систем, несмотря на их сложность, представляет актуальную проблему теории управления. И одной из наиболее интересных и актуальных является проблема синтеза регулятора, обеспечивающего замкнутой систему свойство устойчивости – задача стабилизации.

Пусть рассматривается гибридная дискретно-непрерывная система с «многомерным» (2-D-мерным) временем в скалярном случае:

$$\dot{x}_1(t,k) = a_{11}x_1(t,k) + a_{12}x_2(t,k) + b_1u(t,k),\ t \in [0,+\infty), \quad (1)$$
$$x_2(t,k+1) = a_{21}x_1(t,k) + a_{22}x_2(t,k) + b_2u(t,k),\ k = 0,1,2,\ldots \quad (2).$$

Введем регулятор вида

$$u(t,k) = q_1x_1(t,k) + q_2x_2(t,k). \quad (3)$$

не выводящий систему за пределы рассматриваемого класса.

Для дальнейшего исследования будем использовать характеристическое уравнение системы (1), (2):

$$\det\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \mu I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Необходимым и достаточным требованием для обеспечения сильной асимптотической устойчивости системы (1), (2) является выполнение следующих условий, налагаемых на корни характеристического уравнения [1]:

$$\mathrm{Re}\lambda < 0 \text{ и } |\mu| < 1.$$

Переходя непосредственно к параметрам исходной системы, получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Для обеспечения сильной асимптотической устойчивости системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1)\ a_{12}a_{21} = 0;\ 2)\ |a_{22}| < 1,\ a_{11} < 0.$$

Используем сформулированное утверждение для изучения возможности стабилизации. Замкнутая система уравнений (1) – (3) принимает вид:

$$\dot{x}_1(t,k) = (a_{11} + b_1 q_1)x_1(t,k) + (a_{12} + b_1 q_2)x_2(t,k),$$
$$x_2(t,k+1) = (a_{21} + b_2 q_1)x_1(t,k) + (a_{22} + b_2 q_2)x_2(t,k).$$

Для выполнения условий утверждения 1 коэффициенты регулятора (3) выбираем следующими:

$$q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1} \text{ или } q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}.$$

Тогда в первом случае при $\left|a_{22} - \dfrac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < 1$ коэффициент q_1 можно выбрать следующим образом:

$$\text{при } b_1 > 0:\quad q_1 < -\frac{a_{11}}{b_1}, \text{ при } b_1 < 0:\quad q_1 > -\frac{a_{11}}{b_1}.$$

Во втором случае при условии $a_{11} - \dfrac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0$ коэффициент q_2 будем выбирать так, чтобы $|a_{22} + b_2 q_2| < 1$.

Полученный регулятор обеспечит согласно утверждению 1 сильную асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1) – (3). Можно обобщить вышеизложенное в виде утверждения.

Утверждение 2. Система (1), (2) стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (3), если выполняется хотя бы одно из условий:

$$1)\left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < 1;\quad 2)\ a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Аналогичным образом можно найти стабилизирующий регулятор, решающий задачу обеспечения слабой асимптотической устойчивости системы и (α,γ)-устойчивости системы.

Список литературы

1. Борковская, И. М. Построение регуляторов по типу обратной связи для решения задач стабилизации и управляемости динамических систем / И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова // Труды Белорусского государственного технологического университета. Сер. 3. Физико-математические науки и информатика. – 2019. – № 2 (224). – С. 5 – 11.