УДК 519.624

# О ПОСТРОЕНИИ И РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ОГРАНИЧЕНИЯ СТОЛБА ПЛАЗМЫ

**И. Ф. Соловьева**

Белорусский государственный технологический университет,
г. Минск

Нелинейные двухточечные краевые задачи с пограничными слоями в настоящее время привлекают к себе большое внимание математиков и программистов. Эти задачи являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов и родственных физических явлений [1].

Решение этих задач быстро меняется вблизи краевых точек, что ведет к появлению пограничного слоя. А его наличие еще больше усложняет задачи, т. к. численный процесс их решения становится неустойчивым.

Часто бывает, что решение характеризуется внутренними переходными слоями, резкими перепадами и даже разрывами первого рода. В таких случаях нужно гибко использовать свойства решений, полученных в ходе эксперимента.

В настоящей работе для решения нелинейных жестких задач предлагается метод множественной двусторонней пристрелки, обладающий такими качествами, как выбор точек пристрелки и точек сшива решений; выбор параметров пристрелки; длин положительных и отрицательных подинтервалов пристрелки; регулировка свойств замыкающей системы уравнений и ее оптимизация по числу уравнений; сведение исходной граничной задачи к совокупности задач Коши.

Рассмотрим решение краевой задачи, лежащей в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы [1], осуществляемое методом множественной двухсторонней пристрелки [2].

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &y_1' = y_2 \\ &y_2' = \lambda sh\lambda y_1,\ 0 \le t \le 1,\ \lambda > 0 \end{aligned}.$$

с краевыми условиями

$$y_1(0) = 0,\ y_1(1) = 1.$$

Данную задачу можно рассматривать в качестве теста для проверки методов решения неустойчивых нелинейных краевых задач.

Составим для этой задачи матрицу Якоби вида

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^2 ch\,\lambda y_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При фиксированном времени матрица Якоби характеризуется собственными значениями

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm\lambda\sqrt{ch\,\lambda y_1(t)}.$$

Из которых следует:

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm\lambda,\ \ \lambda_{1,2}(1) = \pm\sqrt{ch\,\lambda}.$$

Если значения $\lambda$ небольшие, то небольшими будут и значения $\lambda_{1,2}(1)$. Если значение $\lambda$ увеличивать, то решение $y_1(t)$ и особенно его градиент $y_2(t)$.будут неограниченно расти.

Выбираем точки пристрелки:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2m\ 1} < t_{2m} = b.$$

Пристрелочные задачи Коши строим в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases} u' = f(t,u),\ t \in J^{(+)}_{2j-1} = \left\{ t_{2j-1} \le t \le t_{2j} \right\}, \\ u(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n, \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = f(t,v), \quad t \in J^{(-)}_{2j-1} = \{ t_{2j-1} \ge t \ge t_{2j-2} \}, \\ v(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1},\ \ y_{2j-1} \in R^n,\ j = \overline{1,m}, \end{cases}$$

где $t_{2j-1}$ – точки пристрелки; $t_{2j}$ – точки сшива решений; $y_{2j-1}$ – параметры пристрелки. Задачи Коши решались с применением метода Рунге – Кутта четвертого порядка точности. [3].

Замыкающую систему можно представить в виде уравнений:

$$\begin{aligned} &u_1(t^{(0)}, y_1^{(k)}) = 0, \\ &v_1(t^{(2)}, y_1^{(k)}) - u_1(t^{(2)}, y_3^{(k)}) = 0, \\ &v_2(t^{(2)}, y_1^{(k)}) - u_2(t^{(2)}, y_3^{(k)}) = 0, \\ &u_1(t^{(4)}, y_3^{(k)}) - 1 = 0. \end{aligned}$$

где $y_1^{(k)} = \begin{vmatrix} y_{11}^{(k)} \\ y_{21}^{(k)} \end{vmatrix},\ y_3^{(k)} = \begin{vmatrix} y_{13}^{(k)} \\ y_{23}^{(k)} \end{vmatrix}.$

Для решения замыкающей системы уравнений применяем модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби.

Искомое решение $y(t)$ исходной краевой задачи представляем формулой

$$y(t) = \begin{cases} v(t), y^*_{2j-1}), \quad t \in J^{(-)}_{2j-1}, \\ u(t, y^*_{2j-1}), \quad t \in J^{(+)}_{2j-1}, \quad j = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Чем больше увеличивать $\lambda$, тем более сложным будет становиться поведение решения $y_1(t)$ и особенно его производной $y_2(t)$. Легко заметить, что решение $y_1(t)$ является гладкой функцией на [0; 1], однако, в области t=1+0 оно будет содержать особую точку и $y_1(t+0) = +\infty$. На отрезке [0; 1] вблизи правого конца картина решения приобретает форму пограничного слоя.

Численное решение данной задачи предлагается в виде таблиц. При этом решение краевой задачи, лежащей в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы, представлено для значений $\lambda = 5$ и $\lambda = 6$. Процесс реализации задачи осуществлялся с помощью системы Mathcad [4].

Таблица1. $\lambda = 5$

| t | $y_1(t)$ | $y_2(t)$ |
|---|---|---|
| 0.5 | 0.575124E-01 | 0.292428 |

| | | |
|---|---|---|
| 0.899999 | 0.459541 | 2.830261 |
| 0.999999 | 0.999995 | 12.039485 |

Таблица1. $\lambda = 6$

| t | $y_1(t)$ | $y_2(t)$ |
|---|---|---|
| 0.5 | 0.029994 | 0.181098 |
| 0.899999 | 0.363370 | 2.63848 |
| 0.999999 | 1.000000 | 20.0807 |

**Заключение.** Предложенная методика позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем и при этом уменьшает те вычислительные трудности, которые присущи традиционным методикам. Система уравнений вида не будет изменяться также в случае неравномерности выбранной сетки. На систему не окажет особого влияния и перемена методов решения задач Коши. А для решения задач Коши в настоящее время существует достаточно большой арсенал хорошо разработанных методик [2].

## Список литературы


1. Холл, Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /Д. Холл, Д. Уатт; пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
2. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 200 с.
3. Соловьева И. Ф. Особенности решения граничных задач с пограничным слоем // Труды БГТУ. № 2(194): Физ.-мат. науки и информатика. 2017. С. 20 – 24.
4. Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В. // Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. ч.1. 2010. 282 с.