УДК 519.872

О. Ф. Зирко, лаборант; А. С. Кобайло, канд. техн. наук

BMAP-МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ПРИ КОМПЛЕКСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТРЕБОВАНИЙ

The idea of using BMAP-models became very popular in many-parameter structures. In this paper it is created the Queuing system with limitations to expectation time and space for complex format of querying requirement. To decision of problems the analysis suggests building model and complicates the new algorithm for work in models of BMAP systems with complex requirements. This article may be helped to prove the results of new methods of analyses model with the complex exponent requirements. The new function algorithm constructed in such way is incompletely specified. In practices it help to analyze some problems of many-parameter structures and for constructing components that are arguments of the complexion Queuing system.

Введение. Среди последних разработок моделей теории массового обслуживания (ТМО) большую популярность приобрели системы массового обслуживания (СМО) типа BMAP, которые рассматривают потоки, одновременно поступающие в систему входных требований с переменной интенсивностью, и предусматривают гибкое управление требованиями посредством управляющего процесса (УП). Эти особенности расширяют возможности BMAP-модели при использовании СМО в ряде прикладных задач.

Однако при обзоре различных методов построения и решения BMAP-моделей необходимо выделить следующие недостатки:

– как правило, все исследуемые характеристики зависят только от одной величины – времени, что исключает возможность управления требованиями по другим существенным параметрам;

– в системах, в которых требуется увеличение пространства, расширение происходит исключительно за счет счетных компонент количества требований $\eta(t) = \{1, 2, ..., N\}$ либо состояний $i, j = \{0, 1, \ldots, W\}$.

Ограничения, безусловно, упрощают расчеты, но построение реальных моделей с помощью BMAP-систем, получение оптимальной точности результатов требуют введения дополнительных переменных и анализа многопараметрических систем управления.

Стремление отойти от однопараметрических структур СМО стало основой для разработки метода построения BMAP-моделей с комплексными требованиями.

Материалом для анализа послужили:

1) расчеты и анализ характеристик известных BMAP-систем;

2) расчеты и анализ характеристик СМО типа M/M/n/m(V) с ограничением на пространство (ранее объем);

3) введение комплексного представления характеристик в СМО;

4) расчеты и анализ характеристик СМО при комплексном представлении требований типа M/M/n/m($\tau, |V|$) с ограничением на время ожидания и пространство.

На базе классических систем был составлен алгоритм формирования BMAP-модели с комплексным представлением требований, свойства которых (преимущества и недостатки) были рассмотрены в статье [1]. Введение их было связано с объединением многопараметрических структур при моделировании реальных процессов для упрощения расчета вероятностных характеристик. Сами модели СМО с комплексными требованиями стали обобщением моделей с ограниченным пространством и временем (ожидания, пребывания либо временем обслуживания), так как характеристика требования представляется в виде

$$Z_k(t) = T_k(t) \pm i\, \xi_k(t), \tag{1}$$

где $T_k = \mathrm{Re}(Z_k)$ – коэффициент, связанный с временными характеристиками (временем ожидания, обслуживания либо поступления); $\xi_k = \mathrm{Im}(Z_k)$ – коэффициент относительного размера (далее пространство), представляющий безразмерную величину, согласованный с суммарным объемом и количественными характеристиками СМО.

Необходимо отметить, что пространство ξ_k в основном отличается от ранее введенного объема относительностью размера, т. е. представленной в задаче в виде безразмерного действительного числа, определенного на всем промежутке от $-\infty$ до $+\infty$.

В данной статье изучены изменения модели BMAP/G/n/m($\tau, |V|$) с ограниченным временем ожидания и пространством $\xi_k < |V|$ при комплексном представлении требований, а также рассмотрены различные подходы для поиска стационарных характеристик системы.

Основная часть. Имеется n-линейная BMAP-СМО с ограниченным временем ожидания и пространством при фиксированных местах в очереди ожидания обслуживания. Рассматриваемая система BMAP/G/n/m($\tau, |V|$) является обобщением системы M/G/n/m($\tau, |V|$). В отличии от марковских СМО в BMAP-системах описываются потоки требований, собранные в отдельные «группы-пачки», а время обслуживания контролируется УП. Таким образом, в СМО поступает N независимых BMAP-потоков, состоящих из $\eta(t)$ запросов с интенсивностью поступления $\lambda_{KN}(t)$. На основе этих значений формируется далее матрица интенсивностей входного потока Λ. Каждое входное требование зависит от двух величин, характеризующих время ожидания в очереди и пространство. Все требования, находящиеся в СМО в произвольный момент времени t, перенумерованы в порядке поступления FIFO, поэтому в СМО в каждом N-потоке находится $\eta(t)$ требований с номерами $k = 1,\ \eta(t)$. В системе имеется n обслуживающих приборов и m мест ожиданий обслуживания, время ожидания ограничено величиной $\tau > 0$, а исследуемое пространство требований – величиной V такой, что сумма отображений $\xi(t, \xi_k) < |V|$. Каждый обслуживающий прибор имеет свою интенсивность обслуживания μ_n. На основе этих значений формируется матрица интенсивности обслуживания требований M.

Рассмотрим описанную выше СМО, в которой входное требование представимо по формуле (1), т. е. каждое входное требование характеризуется параметром $Z_k(t)$.

Для процесса BMAP/G/n/m будем считать, что $T_k(t)$ – коэффициент, характеризующий время, прошедшее от момента t до момента требования, находящегося на k-м месте из очереди в результате поступления на ОП или потери (катастрофы) ($k = n + 1, ..., \eta(t)$). Величина $T_k(t)$ имеет смысл, если $\eta(t) > 1$, тогда в СМО можно вводить процесс $(\eta(t), Z(t))$, для которого время ожидания составляет

$$\tau = \begin{cases} 0, & 0 < k < n \\ T_k(t), & n < k \le n + m \end{cases} \qquad (2)$$

Каждый из элементов параметра $Z_k(t)$ – $T_k(t)$ и ξ_k имеет свою функцию распределения $B(T)$ и $L(\xi)$ соответственно [1, 2]. Обозначим через P_k матрицу, каждый элемент которой представляет собой вероятность того, что в момент t в очереди находятся k требований размером ξ_k:

$$\begin{aligned} P_k(T_k, \xi_k) &= P_k(Z_k) = \\ = P_1(T_k, \xi_k) &+ P_2(T_k, \xi_k) = \\ &= A_k \exp(i\varphi). \end{aligned} \qquad (3)$$

Причем $A_k = [A_{ij}]$ является безусловной вероятностью матрицы состояний, в которых в СМО находятся k требований. Каждый элемент матрицы представляет состояние A_{ij}, в которое перешла система (состоянии j) при условии, что в предыдущий момент времени t УП находился в состоянии $i \ne j,\ i, j = \overline{0, W}$. Поскольку $i, j \in \overline{0, W}$, то в целом размерность матрицы A_k равна $W \times W$.

Если $k \le n$, то все требования поступают в СМО и начинают обслуживаться, т. е. нет потерь, связанных с ограничением времени ожидания. Обслуживание процесса изменяется в следующие моменты: при окончании обслуживания; при появлении новых требований; при уходе требований вследствие катастрофы.

Требование теряется при следующих ситуациях:

– при поступлении в СМО $\eta(t - 0) = n + m$;

– при условии $-V > \xi(t - 0) + \xi_k > V$;

– при достижении в очереди максимального значения времени ожидания τ_{max}.

Количество элементов в каждом векторе равно количеству требований, поступивших в систему в k-й поток.

Найдем вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ очередь свободна. Введем следующие матрицы:

1) для $(n + 1) \le k \le m$ прежде всего введем матрицу $F'_k(t, T_k)$, каждый элемент которой равен вероятности того, что в момент t в СМО поступило $\eta(t) = k$ требований и от момента t до момента выхода из очереди k-го требования пройдет $dT_{n+1}, dT_{n+2}, \ldots, dT_k$ время;

2) для выражения УП очередью введем матрицу $\Gamma(t)$, в которой каждый элемент $\gamma_{ij}(k, t)$ адекватен времени, прошедшему от момента t до момента выхода k-го требования из системы; УП находится в момент выхода в состоянии j при условии, что в момент t УП находился в состоянии $i \ne j,\ i, j = \overline{0, W}$;

3) для определенного пространства введем матрицу $G(t, \xi_k)$, каждый элемент которой равен функции $g_k(t, \xi_k)d\xi_k$, означающей вероятность того, что в момент t в СМО поступило k требований, а само пространство заключено в границы $\xi_k - \xi_0 = d\xi_k$:

$$g^{(k)}(t, \xi_k)d\xi_k = P\{\eta(t) = k, \xi(t) \in [\xi_k, \xi_k + d\xi_k]\}.$$

Очевидно, что для вещественного параметра существует вероятность $P_k(t)$ такая, что

$$P_k(Z_k) = \int_{-V}^{V} G^{(k)}(t, \xi_k)\, d\xi_k \qquad (4)$$

Учитывая специфику исследуемой СМО, а именно наложенные на нее ограничения (2), состояние системы в некоторый момент времени t_k определяется:

– УП – $A(t)$, регулирующим переходы из состояния i в состояние $j,\ i \ne j,\ i, j = \overline{0, W}$;

– числом, находящихся в момент времени t запросов $\eta(k)$;

– суммарным пространством $\xi(t)$;

– матрицей времени ожидания $\Gamma(t)$.

Тогда можно считать, что система BMAP/G/n/m с ограниченным суммарным пространством требований V и ограниченным временем ожидания описывается процессом

$$\begin{cases} (\text{УП}, \eta(t), \varsigma(t));\ 0 < \eta(t) \le n,\ i, j \in [0, \ldots, W], \\ (\text{УП}, \eta(t), \xi(t));\ 0 < \eta(t) < \infty,\ i \ne j \end{cases} \quad (5)$$

Следующим шагом после описания конкретного процесса является вывод матрицы перехода. В BMAP-СМО переходы контролируются УП. В интервале $(t, t + dt)$ могут произойти следующие переходы:

$$\|A_0\| \to \|A_0\|, \|A_1\| \to \|A_0\|, \|A_0\| \to \|A_1\|, \quad (6)$$

$$\|A_n\| \to \|A_n\|, \|A_n\| \to \|A_{n-1}\|, \|A_n\| \to \|A_{n+1}\|. \quad (7)$$

Анализируя состояния, можно получить матрицу переходов. В данной статье не приводится анализ состояний, а представляются только результаты, на основе которых получаем систему интегрально-дифференциальных уравнений (ДУ):

– при $k \le n$

$$\frac{dP_0(Z)}{dZ} = -\Lambda \circ P_0(Z) \circ L(V) + M \circ P_1(Z), \quad (8)$$

$$\frac{dP_1(Z)}{dZ} = -\Lambda \circ P_0(Z) \circ L(V) - \Lambda \circ \int_{-V}^{V} P_1(Z)dZ - M \circ P_1(Z) + 2M \circ P_2(Z), \quad (9)$$

$$\frac{dP_k(Z)}{dZ} = \Lambda \circ \int_{-V}^{V} P_{k-1}(Z)dZ - \Lambda \circ \int_{-V}^{V} P_k(Z)dZ - kM \circ P_k(Z) + F'_{n+1}(0); \quad (10)$$

– при $k > n$

$$\frac{dP_k(Z)}{dZ} = \Lambda \circ \int_{-V}^{V} P_{k-1}(Z)dZ - \Lambda \circ \int_{-V}^{V} P_k(Z)dZ + \int_0^{\tau} \ldots \int_0^{x_n} F'_k(Z) \circ \exp(-i\Lambda \circ Z)dZ + \int_0^{\tau} \ldots \int_0^{x_n} F'_{k+1}(Z) \circ \exp(-i\Lambda \circ Z)dZ, \quad (11)$$

$$\frac{dP_{n+m}(Z)}{dZ} = \Lambda \circ \int_{-V}^{V} P_{n+m-1}(Z)dZ + \int_0^{\tau} \ldots \int_0^{x_{n+m-1}} F'_{n+m}(Z) \circ \exp(-i\Lambda \circ Z)dZ. \quad (12)$$

Учитывая, что $\rho = \lambda / (n\mu)$ – загрузка системы, при $\rho < \infty$ существуют пределы, не зависимые от начальных условий, для которых

$$P_k = \lim_{z \to \infty} P_k(Z),\ k = 0, 1, \ldots, n + m. \quad (13)$$

Для существования пределов матрице $P_k(Z)$ необходимо и достаточно быть аналитической, т. е. должна дифференцироваться по Z и по каждой из компонент одновременно. Кроме того, для исследуемой системы BMAP/G/n/m(τ, $|V|$) должны выполнятся условия (1)–(3), а именно:

1. Инфинитезимальная матрица $D = \Lambda P(k)$ и УП $A_k(t)$ не зависят от занимаемого пространства.

2. Загрузка BMAP-систем при $\rho < \infty$. Для систем BMAP/G/n/m $\rho(k) = G^{(k)} \circ D^{-1}$.

3. Для системы должен существовать предел

$$G^{(k)} = \lim_{z \to \infty} G^{(k)}(Z) \quad (14)$$

и должны выполняться равенства

$$L(V) = 1, \quad (15)$$

$$L^{(k)}(V) = \int_{-V}^{V} L^{(k-1)}(V - \xi_k)d\xi_k. \quad (16)$$

В этом случае для ДУ (8)–(12) будет существовать стационарный режим работы. Из уравнения (14) и условия (2) следует, что

$$G^{(1)} P_1(Z) = \rho P_0(Z) \circ G^{(0)}. \quad (17)$$

Учитывая специфику комплексных чисел, будем считать, что

$$\int_{-V}^{V} P_1(Z)dZ = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}[P(T, \xi), T_k, \xi_k], \quad (18)$$

где T_k, ξ_k – особые точки функции $P(T, \xi)$, расположенные в верхней полуплоскости. Вероятность P_1 имеет два полюса

$$\xi_{0,1} = (P_0 \circ G^{(k)}(V))^k. \quad (19)$$

Предполагая стационарность процессов в особых точках и подставляя (17)–(19) в формулы (8)–(12), получим следующие результаты:

– для $k \le n$

$$0 = 2\pi i \sum_{k=1}^{\eta(t)} \text{Выч}[G^{(1)} \circ P(Z), Z_k] + \frac{2M}{n} \circ G^{(2)} \circ P_2 - \Lambda \circ P_0(Z) \circ G^{(0)} - M \circ P_1(Z) \circ G^{(1)}, \quad (20)$$

$$0 = 2\pi i \Lambda \circ \sum_{k=1}^{\eta(t)} \text{Выч}[G^{(k-1)} \circ P_{k-1}(Z), Z_{k-1}] - 2\pi i \Lambda \circ \sum_{k=1}^{\eta(t)} \text{Выч}[G^{(k)} \circ P_k(Z), Z_k] - \frac{kM}{n} \circ G^{(k)} \circ P_k(Z) + G^{(n+1)} \circ F'_{n+1}(0); \quad (21)$$

– для $k > n$

$$0 = 2\pi i \Lambda \circ \sum_{k=1}^{\eta(t)} \text{Выч}[G^{(k-1)} \circ P_{k-1}(Z), Z_{k-1}] - 2\pi i \Lambda \circ \sum_{k=1}^{\eta(t)} \text{Выч}[G^{(k)} \circ P_k(Z), Z_k] + G^{(k)} \circ \int_0^{\tau} \ldots \int_0^{x_n} F'_k(Z) \circ \exp(-i\Lambda \circ Z)dZ + G^{(k+1)} \circ \int_0^{\tau} \ldots \int_0^{x_n} F'_{k+1}(Z) \circ \exp(-i\Lambda \circ Z)dZ, \quad (22)$$

$$0 = 2\pi i \,\text{Выч}\Big[\Lambda \circ G^{(n+m-1)} \circ \sum_{k=1}^{\eta(t)} P_{n+m-1}(Z), Z_{n+m-1}\Big] +$$

$$+ G^{(n+m)} \circ \int_0^{\tau} \ldots \int_0^{x_n} F'_{n+m}(Z) \circ \exp(-i\Lambda \circ Z) dZ. \quad (23)$$

Учитывая значения полюсов вычета, в результате подстановок из уравнений (20), (21) получим вероятности для $k < n$

$$P_k = \frac{(\rho n i)^k}{k!} \circ P_0 \circ \Big(\sum_{k=1} G^{(k-1)} + i \sum_{k=1} G^{(k)}\Big). \quad (24)$$

Аналогично для $k > n + 1$, учитывая, что

$$\text{Выч}[P_n(Z), Z_n] = (2\pi i)^{-1}\Big[\frac{n^n \rho^{n+1}}{n!}(1 -$$

$$- \exp(-nM \circ \tau))\Big] \circ P_0 \circ G^{(n+1)} \quad (25)$$

получим

$$F'_{n+1}(Z) = \frac{\Lambda \circ (n\rho)^n}{n!} \circ \exp(-nM \circ Z) \circ P_0 \circ G^{(n+1)}.$$

Подставляя значения в уравнения (22), (23), найдем вероятность

$$P_{n+1}(Z) = \int_0^{\tau} \ldots \int_0^{x_n} F'_{k+1}(Z) dZ =$$

$$= \frac{n^n \rho^{n+1}}{n!} \circ \exp(-nM \circ Z) \circ P_0 \circ G^{(n+1)}. \quad (26)$$

Суммируя значения с учетом того, что

$$\sum_{k=1}^{N} \text{Выч}[P_k(Z), Z_k] = (2\pi i)^{-1}\Big[\frac{n^n \rho^{n+1}}{n!}(1 -$$

$$- \exp(-nM \circ \tau))\Big] \circ \sum_{j=0}^{k-n-1} \frac{(nM \circ i\tau)^j}{j!} P_0 \circ G^{(j)} \quad (27)$$

получим

$$P_k = (2\pi i)^{-1}\Big[\frac{n^n \rho^k}{n!}(1 -$$

$$- \exp(-niM \circ \tau))\Big] \circ \sum_{j=0}^{k-n-1} \frac{(nM \circ i\tau)^j}{j!} P_0 \circ G^{(j)} \quad (28)$$

Если предположить, что элементы вероятности $G^{(k)}$ зависят от начального значения, загрузки и функции распределения относительного коэффициента, т. е.

$$G^{(k)} = D^{-1} \circ \Lambda \circ P_0 \circ L(\xi_k), \quad (29)$$

то учитывая условие нормировки, получим вероятность P_0:

$$P_0 = \Big[\sum_{k=1}^{n} D^{-1} \circ \frac{(-ni\rho)^k}{k!} \circ \Lambda(L(\xi_{k-1}) + iL(\xi_k)) +$$

$$+ \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{n+m} \rho^k (1 - \exp(-niM \circ \tau)) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-n} \frac{(niM \circ \tau)^j}{j!} D^{-1} \circ \Lambda \circ L(\xi_k)\Big]^{-1}. \quad (30)$$

Из формулы (30) следует комплексность вероятности P_0, от значения которого зависят расчеты вероятностей потерь и вероятностей обслуживания системы.

Таким образом, для рассмотрения СМО, используя комплексное представление требований, можно придерживаться следующего алгоритма.

1. Представить показатель входного требования по форме (1) в виде комплексного числа.

2. Выделить процесс, характеризующий решение (5).

3. Определить возможные переходы, характеризующие процесс, и построить матрицу переходов (6), (7). Для каждого перехода выделить множество особых точек, используя метод вычетов.

4. На основе полученной матрицы составить систему дифференциальных уравнений (8)–(12).

5. Опираясь на условие нормировки, из СДУ рассчитать начальную вероятность и получить значения требуемых вероятностей.

6. Провести оценку и анализ полученного результата.

Заключение. Таким образом, в ходе исследования получены следующие результаты:

1) обоснована и представлена методика расчета СМО типа BMAP с комплексным показателем требований;

2) при расчете, кроме комплексной природы показателя требования, проявляется комплексность других характеристик СМО, в частности вероятности P_0 и P_k.

Литература

1. Зирко, О. Ф. Требования с комплексными показателями в системах массового обслуживания / О. Ф. Зирко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2007. – Вып. XV. – С. 130–132.

2. Тихоненко, О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: учеб. пособие / О. М. Тихоненко. – Минск: Технопринт, 2003. – 327 с.