

Н. А. Ахраменко, доцент (БелГУТ); Л. М. Булавко, ст. преподаватель (БелГУТ);
В. Я. Матюшенко, профессор (БелГУТ)

О МАГНИТНОМ ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНОГО СОЛЕНОИДА

Calculation intensity of the magnetic field was examined for cases when electric current disposed on the surfaces for points on the surfaces, into the surfaces (the solenoid’s surfaces) and out of the surfaces. Superposition magnetic field was used in the study of intensity of the magnetic field for electric current on the surfaces of the infinite solenoid.

Введение. Поскольку соленоид представляет собой проводник, намотанный близко или вплотную виток к витку по цилиндрической поверхности, то ток, текущий по проводнику, можно представить как суперпозицию линейного и кругового токов. Шаг спирали в этом случае задает величину осевого направления тока.

При малом шаге спирали соленоид можно рассматривать как систему последовательно соединенных друг с другом круговых витков или токов одинакового радиуса с общей осью, а величиной осевого направления тока можно пренебречь.

Индукцию магнитного поля соленоида определяют, используя закон полного тока [1–9]. Для точек внутри и вне цилиндрической поверхности величина индукции магнитного поля равна

$$B = \begin{cases} 0 & \text{при } r > R \\ \mu_0 n I & \text{при } r < R \end{cases} \quad (1)$$

где r – расстояние от оси цилиндра (соленоида) до исследуемой точки; R – радиус цилиндра (соленоида); I – ток соленоида; n – количество витков на единицу длины.

Магнитное поле сосредоточено внутри соленоида и является однородным.

Очевидно, что сам проводник также находится в некотором поле. Это поле действует на витки соленоида и создает там механические напряжения. Поэтому возникает необходимость определения магнитного поля при $r = R$, т. е. в точках локализации самого проводника с током. При стремлении к нулю толщины проводника ток в идеальном случае будет распределен по поверхности цилиндра.

Для определения \vec{B} в точках, принадлежащих поверхности цилиндра, воспользуемся законом Био – Савара – Лапласа и принципом суперпозиции для магнитных полей. С этой целью найдем индукцию магнитного поля одного элемента тока при $r = R$, а затем всего соленоида.

Основная часть. Рассмотрим элемент тока I на поверхности цилиндра радиусом R , длина dl и направление которого задается вектором $d\vec{l}$ (рис. 1).

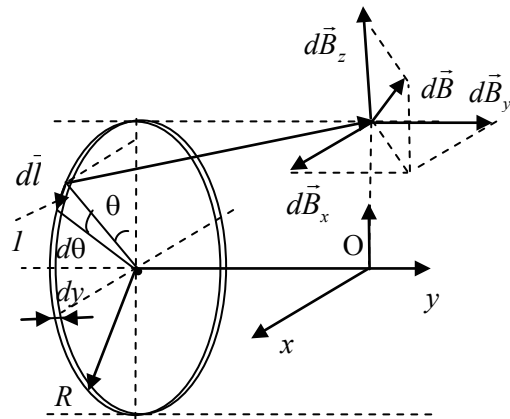


Рис. 1. Элемент тока I на поверхности цилиндра радиусом R , длина и направление которого задается вектором $d\vec{l}$

Согласно закону Био – Савара – Лапласа, величина $d\vec{B}$, создаваемая элементом тока, равна

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi r^3} [\vec{dl} \times \vec{r}] \quad (2)$$

где dI – величина тока в выбранном элементе тока; \vec{r} – радиус-вектор от выбранного элемента тока до исследуемой точки.

Величины векторов $d\vec{l}$ и \vec{r} представим через единичные вектора вдоль осей координат:

$$d\vec{l} = dl_x \vec{i} + dl_z \vec{k} = dl \cos \theta \vec{i} - dl \sin \theta \vec{k}, \quad (3)$$

$$\vec{r} = -R \sin \theta \vec{i} + y \vec{j} + R(1 - \cos \theta) \vec{k}. \quad (4)$$

Преобразуем выражение (2) с учетом свойств векторного произведения:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi r^3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dl \cos \theta & 0 & -dl \sin \theta \\ -R \sin \theta & -y & R(1 - \cos \theta) \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi r^3} \times \\ \times [y dl \sin \theta \vec{i} - (dl \cos \theta R(1 - \cos \theta) + dl R \sin^2 \theta) \vec{j} + \\ + y dl \cos \theta \vec{k}]. \quad (5)$$

Учитывая, что $dl = R d\theta$ выражение (5) можно преобразовать к следующему виду:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi r^3} [yR \sin \theta d\theta \vec{i} + R^2 (1 - \cos \theta) d\theta \vec{j} + \\ + yR \cos \theta d\theta \vec{k}]. \quad (6)$$

Величину тока dI представим через плотность тока по поверхности j в виде $dI = jdy$. Модуль вектора $\vec{\rho}$ определяется выражением

$$\rho = |\vec{\rho}| = \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (-y)^2 + (R(1 - \cos \theta))^2} = \sqrt{2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta}. \quad (7)$$

С учетом этого компоненты вектора $d\vec{B}$ будут равны:

$$dB_x = \frac{\mu_0 j dy}{4\pi(2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} \times [-yR \sin \theta d\theta], \quad (8)$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 j dy}{4\pi(2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} \times [R^2(1 - \cos \theta) d\theta], \quad (9)$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 j dy}{4\pi(2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} \times [yR \cos \theta d\theta]. \quad (10)$$

Проинтегрировав по всей поверхности, получим компоненты вектора \vec{B} :

$$B_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\mu_0 j}{4\pi(2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} [yR \sin \theta], \quad (11)$$

$$B_y = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\mu_0 j}{4\pi(2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} [R^2(1 - \cos \theta)], \quad (12)$$

$$B_z = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\mu_0 j}{4\pi(2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} [yR \cos \theta]. \quad (13)$$

Интегрирование (11) и (13) по переменной y дает нуль. Интегрирование (12) по переменной y дает:

$$B_y = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\mu_0 j}{4\pi(2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} R^2(1 - \cos \theta) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\mu_0 j}{4\pi} R^2(1 - \cos \theta) \frac{1}{2R^2 - 2R^2 \cos \theta} \times \frac{y}{(2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{1/2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\mu_0 j}{4\pi} R^2(1 - \cos \theta) \frac{2}{2R^2 - 2R^2 \cos \theta} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 j}{2}. \quad (14)$$

С учетом полученных компонент вектора \vec{B} для точек поверхности можно записать

$$B = \begin{cases} 0 & \text{при } r > R \\ \frac{\mu_0 j}{2} & \text{при } r = R \\ \mu_0 j & \text{при } r < R \end{cases} \quad (15)$$

Графическая зависимость величины \vec{B} тока соленоида от расстояния r относительно его оси представлена на рис. 2.

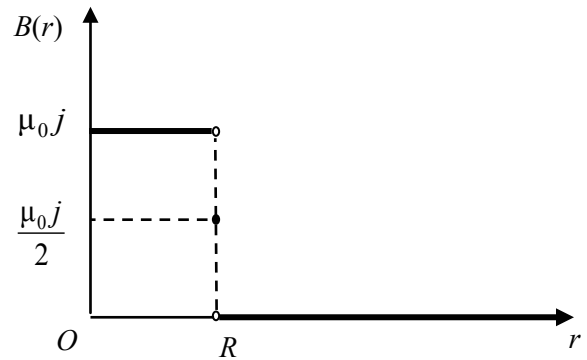


Рис. 2. Зависимость величины индукции магнитного поля тока соленоида \vec{B} от расстояния r относительно его оси

В результате исследований получили, что величина индукции магнитного поля на поверхности соленоида не равна ее величине как вблизи внешней поверхности, так и вблизи внутренней поверхности.

Зная \vec{B} в точках, принадлежащих цилиндрической поверхности, можно найти силу, действующую на элемент тока:

$$dF = B dI dl = B j dy dl = \left(\frac{\mu_0 j}{2} \right) j dy dl = \frac{\mu_0 j^2}{2} dy dl. \quad (16)$$

Площадь элемента поверхности

$$dS = dy dl, \quad (17)$$

$$dF = \frac{\mu_0 j^2}{2} dS. \quad (18)$$

Вектор $d\vec{F}$ будет направлен радиально от оси цилиндра, т. е. ток как бы растягивает цилиндр. Поэтому соленоид, по которому течет ток, испытывает радиальное растяжение. Давление, испытываемое витками с током, будет равно

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\mu_0 j^2}{2} = \left(\frac{\mu_0 j}{2} \right)^2 \frac{2}{\mu_0} = \frac{2B_n^2}{\mu_0}, \quad (19)$$

где $B_{\text{п}}$ – индукция магнитного поля в точках поверхности цилиндра с круговым током.

Учитывая, что $j = nI$, выражения (15) примут следующий вид:

$$B = \begin{cases} 0 & \text{при } r > R, \\ \frac{\mu_0 n I r}{2} & \text{при } r = R, \\ \mu_0 n I r & \text{при } r < R \end{cases} \quad (20)$$

Значение \bar{B} на поверхности цилиндра можно представить как ее усредненное значение по сечению проводника в соленоиде. Поэтому элемент длины проводника в соленоиде испытывает радиальное растяжение, сила которого равна

$$dF = B n I D dl = \left(\frac{\mu_0 n I}{2} \right) n I D dl = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} D dl, \quad (21)$$

где D – диаметр проводника. Используя то, что $n = 1 / D$, получим силу, приходящуюся на элемент длины проводника:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{2} n. \quad (22)$$

Заключение. График величины \bar{B} при переходе через поверхность с током (рис. 2) претерпевает разрыв с обособленной точкой в месте разрыва. Это позволяет уточнить известные граничные условия для поверхностных токов. Касательные составляющие вектора напряженности магнитного поля \vec{H} (и, следовательно, вектора магнитной индукции \vec{B}) при переходе через поверхностный ток соответственно равны:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} j \quad (\text{СГС}),$$

или

$$B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0 j \quad (\text{СИ}). \quad (23)$$

Соответствующие вектора (\vec{H} и \vec{B}) претерпевают разрыв, и условия (23) показывают их связь вблизи внешней и внутренней поверхностей. Однако здесь отсутствует значение индукции поля на самой поверхности при рассмотрении перехода через поверхность. Поэтому с учетом величины индукции магнитного

поля для самой поверхности (выражения (15)) эти граничные условия можно представить в виде

$$B_{2\text{пт}} - B = \frac{\mu_0}{2} j, \quad B_{\text{пт}} - B_{1\tau} = \frac{\mu_0}{2} j, \quad (24)$$

где $B_{\text{пт}}$ – значение тангенциальной составляющей индукции на самой поверхности с током. Граничные условия в виде (24) учитывают значение индукции на самой поверхности, чего нет в условиях в виде (23). Выражения (24) дают более полную связь векторов при переходе через поверхностный ток, так как из них, как частный случай, следует выражение (23).

Литература

1. Сивухин, Д. В. Электричество / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1983. – 703 с.
2. Матвеев, А. Н. Электричество и магнетизм / А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 464 с.
3. Иродов, И. Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М.: Высш. шк., 1991. – 280 с.
4. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1988. – Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – 480 с.
5. Тамм, И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
6. Наркевич, И. И. Физика: учеб. / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
7. Ахраменко, Н. А. К определению электрического поля поверхностно распределенных зарядов / Н. А. Ахраменко, Л. М. Булавко // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2006. – № 2. – С. 5–7.
8. Ахраменко, Н. А. Закон сохранения энергии и электрическое поле сферы / Н. А. Ахраменко, Л. М. Булавко, В. Я. Матюшенко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2006. – Вып. XIV. – С. 95–97.
9. Ахраменко, Н. А. К определению индукции магнитного поля поверхностных токов / Н. А. Ахраменко, Л. М. Булавко, В. Я. Матюшенко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2007. – Вып. XV. – С. 88–91.