УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, доцент

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРОЕША

In the given work for nonlinear boundary problems with small parameter at the senior derivative is constructed and researched the algorithm founded on a method of plural bilateral shooting. In the offered algorithm the initial boundary problem will be transformed to set of problems Cauchy. For the decision of problems Cauchy there is a wide set of methods of their numerical decision and the closing systems of the algebraic equations of the low order connected with them. The offered method of plural bilateral shooting receives the decision by known complexity of problem Troesh.

Введение. Граничная задача, поставленная Вейбелом Троешем, первоначально была связана с исследованием обжатия плазменного шнура давлением излучения. Из-за жестких ограничений решение не представляло особого физического интереса. Значительное внимание, проявленное к этой задаче в последние годы специалистами по численным методам, в основном объясняется тем, что она является хорошим тестом для проверки решения неустойчивых нелинейных граничных задач.

Постановка задачи. Рассмотрим сначала простой пример краевой задачи с условием в двух точках:

$$y'' = shy,\ \ y'(0) = 0,\ \ y(d) = c. \qquad (1)$$

Это уравнение получается из одномерного варианта эллиптического уравнения

$$V^2\varphi = ksh(q\varphi),$$

которое выводится из уравнения Пуассона – Больцмана. Если преобразовать уравнение (1) к нормальной форме, то получится следующая система уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = shy_1, \end{cases} \qquad (2)$$

где граничные условия будут иметь вид

$$y_2(0) = 0, \quad y_1(d) = c.$$

Учитывая, что исходная задача является эллиптической, то при пошаговом интегрировании системы дифференциальных уравнений (2) следует ожидать некоторой неустойчивости. Интегрирование вперед от $x = 0$ или назад от $x = d$ эквивалентно решению задачи Коши для эллиптического уравнения, а известно, что такой процесс неустойчив.

Уравнения (2) имеют решения экспоненциального вида, и на большом отрезке возрастающая экспоненциальная составляющая быстро становится доминирующей в численном решении. Следовательно, если провести интегрирование вперед, исходя из двух независимых наборов начальных данных при $x = 0$, то после прохождения некоторого отрезка окажется, что процесс интегрирования приводит фактически к одному и тому же решению. Если экспоненциальная составляющая нарастает слишком быстро, то решение может выйти за пределы разрядной сетки.

В данном случае возникающее затруднение не является непреодолимым, так как на не слишком большом отрезке интегрирования можно сравнительно просто получить решение, подавляя неустойчивость сшиванием решения в середине отрезка. Этот пример показывает общий источник трудностей, возникающих при использовании численных методов для краевых задач, которые часто имеют решения экспоненциального вида.

Более сложный вариант задачи подобного типа приводят Робертс и Шипман. Эта задача получила название задачи Троеша. В безразмерных переменных задача Троеша сводится к решению уравнения

$$y'' = ksh(ky), \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y_1(1) = 1. \qquad (4)$$

Граничная задача вида (3), (4) имеет решение, которое хорошо себя ведет на отрезке $[0, 1]$, если, например, $k = 1;\ 2,$ однако, имеет полюс вблизи точки $x = 1$.

Например, в методе пристрелки производится интегрирование вперед от $x = 0$ с каким-либо образом выбранным значением $y'(0)$. Если оценка этого значения очень завышена, то полюс перемещается ближе к началу координат и может оказываться внутри отрезка интегрирования.

Решали задачу Троеша методом продолжения. Этот метод дает последовательный способ приближения к решению задачи.

Идея этих методов заключается в том, чтобы, используя известное решение в качестве начального приближения, найти решение для близкого значения параметра. Последовательно увеличивая каждый раз значение параметра на небольшую величину, можно получить искомое решение задачи.

Алгоритм метода множественной двусторонней пристрелки. Для решения граничной задачи вида (3), (4), лежащей в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы, предлагается метод множественной двусторонней пристрелки [1], алгоритм которого состоит в следующем.

1. Выбираем точки пристрелки:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2m-1} < t_{2m} = b.$$

Множественную пристрелку организовываем таким образом, чтобы вычислительный процесс развивался в обоих направлениях.

2. Строим пристрелочные задачи Коши в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases} u' = f(t, u),\ t \in J_{2j-1}^{(+)} = \{ t_{2j-1} \le t \le t_{2j} \}, \\ u(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} v' = f(t, v), \quad t \in J_{2j-1}^{(-)} = \{t_{2j-1j} \ge t \ge t_{2j-2}\}, \\ v(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n,\ j = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{6}$$

где t_{2j-1} – точки пристрелки; t_{2j} – точки сшива решений; y_{2j-1} – параметры пристрелки.

3. Для полученных пристрелочных задач Коши составляем замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j+1}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ g(v(t_0, y_1), u(t_{2m}, \gamma_{2m-1})) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

4. Переписываем замыкающую систему вида (5) в операторной форме

$$H(z) = 0, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} H : R^N \to R^N, \quad N = mn, \\ z = (y_1^T, y_2^T, \ldots, y_{2m-1}^T)^T. \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $y(t)$ – искомое решение исходной граничной задачи. Введем обозначения

$$y_{2j-1}^* = y(t_{2j-1}), z^* = (y_1^{*T}, \ldots, y_{2m-1}^{*T})^T. \tag{10}$$

Тогда будет выполняться замыкающая система вида

$$H(z^*) = 0,$$

где z^* – искомое решение замыкающей системы уравнений (7).

5. Теперь искомое решение $y(t)$ исходной граничной задачи можно представить формулой

$$y(t) = \begin{cases} v(t, y_{2j-1}^*), \quad t \in J_{2j-1}^{(-)}, \\ u(t, y_{2j-1}^*), \quad t \in J_{2j-1}^{(+)},\ j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{11}$$

Как уже было сказано, задача Троеша (3), (4) подробно изучалась, и ее в вычислительном отношении оценивают как достаточно сложную и трудоемкую.

Матрица Якоби для системы будет иметь вид

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k^2 chky_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Чем больше значение k в уравнении (3), тем более сложным является характер поведения решения $y_1(t)$ и его производной $y_2(t)$. Это объясняется тем, что решение $y_1(t)$ является гладкой функцией на интервале $[0, 1]$. Однако в области $t = 1 + 0$ решение имеет особую точку и $y_1(t + 0) = +\infty$. Причем особая точка располагается тем ближе к точке $t = 1$, чем больше взят параметр k. На отрезке $[0, 1]$ вблизи правого конца картина решения приобретает форму пограничного слоя [2].

Пусть $\lambda = 5$. Выберем в качестве начального приближения $y^{(0)}(t)$ к решению задачи Троеша функцию $y^{(0)}(t) = \begin{bmatrix} t^{10} \\ 10t^9 \end{bmatrix}$.

Рассмотрим несколько вариантов расположения подинтервалов пристрелки $J_{y-1}^{(+)}$ и $J_{y-1}^{(-)}$:

$$J_1^{(-)} = \left[t^{(0)},\ t^{(1)}\right], \quad J_1^{(+)} = \left[t^{(1)},\ t^{(2)}\right],$$

$$J_3^{(-)} = \left[t^{(2)},\ t^{(3)}\right], \quad J_3^{(+)} = \left[t^{(3)},\ t^{(4)}\right].$$

Здесь $t^{(0)} = 0,\ t^{(4)} = 1$. А значения $t^{(1)}, t^{(2)}\ t^{(3)}$ нужно определить. Точки пристрелки здесь будут $t^{(1)}$ и $t^{(3)}$.

Выберем начальные приближения к истинным значениям параметров пристрелки:

$$y_1^{(0)} = \begin{bmatrix} (t^{(1)})^{10} \\ 10(t^{(1)})^9 \end{bmatrix},\ y_3^{(0)} = \begin{bmatrix} (t^{(3)})^{10} \\ 10(t^{(3)})^9 \end{bmatrix}.$$

Замыкающая система уравнений для исходной задачи примет вид [3]:

$$\begin{cases} u_1(t^{(0)}, y_1^{(k)}) = 0 \\ v_1(t^{(2)}, y_1^{(k)}) - u_1(t^{(2)}, y_3^{(k)}) = 0 \\ v_2(t^{(2)}, y_1^{(k)}) - u_2(t^{(2)}, y_3^{(k)}) = 0 \\ u_1(t^{(4)}, y_3^{(k)}) - 1 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

или

$$H(Z^{(k)}) = 0, \tag{13}$$

где

$$Z^{(k)} = (y_{11}^{(k)}, y_{21}^{(k)}, y_{13}^{(k)}, y_{23}^{(k)})^{\bar{i}}.$$

Для системы уравнений (13) матрицу Якоби можно конкретизировать и записать в виде

$$\frac{\partial H(Z^{(k)})}{\partial Z} = \begin{bmatrix} \Phi_2^{(k)} & \Omega_2^{(k)} \\ G_1^{(k)} & G_3^{(k)} \end{bmatrix},$$

предпологая, что справедливы равенства

$$g_1(y(a), y(b)) = y_1(a),$$

$$g_2(y(a), y(b) = y_1(b) - 1,$$

$$[a, b] = [0, 1].$$

Здесь рассмотрен случай, когда число точек пристрелки фиксировано и исследованы возможности влияния на свойства матрицы Якоби путем изменения расположения точек пристрелки. Такое влияние четко прослеживается, и в ряде случаев обнаруживаются интересные закономерности. Увеличением числа точек пристрелки можно добиться улучшения свойств матрицы Якоби:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \begin{bmatrix} U_1^{(2)} & -V_3^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_3^{(4)} & -V_5^{(4)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{2m-3}^{(2m-2)} & -V_{2m-1}^{(2m-2)} \\ G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{2m-1} \end{bmatrix}.$$

Блочные матричные решения, составляющие матрицу Якоби, показывают, в какой мере им можно придать необходимые свойства за счет перемены интегрирования задач Коши и изменения длин пристрелочных подинтервалов.

Заключение. Предложенная модификация метода множественной двусторонней пристрелки достаточно перспективна для решения граничных задач с пограничным слоем и, в частности, для решения задачи Троеша. Она позволяет обойти сложную процедуру решения линейных алгебраических уравнений.

В предложенной модификации метода множественной двусторонней пристрелки практически отсутствуют какие-либо специальные ограничения на правую часть f, вид граничных условий g и области интегрирования $[a, b]$.

Решение замыкающей системы вида (7) не зависит от выбранного метода решения задач Коши. А для решения задач Коши в настощее время существуют хорошо разработанные алгоритмы [4].

Литература

1. Кулешова, И. Ф. К теории метода множественной двусторонней пристрелки для линейных задач с пограничным слоем / И. Ф. Кулешова, П. И. Монастырный // ДАН БССР. – 1989. – Т. 33, № 2. – С. 106–109.

2. Кулешова, И. Ф. Получение границ спектра матриц Якоби в методе множественной двусторонней пристрелки / И. Ф. Кулешова // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 1995. – Вып. II. – С. 44.

3. Соловьева, И. Ф. О модификации метода пристрелки для нелинейных граничных задач / И. Ф. Соловьева // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2005. – Вып. VIII. – С. 27–29.

4. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М., 1983. – 200 с.