УДК 514.144.12

Н. П. Можей, доцент

ОРБИТАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРУПП АФФИННЫХ И ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

This paper is devoted to the study of locally transitive affine and projective actions in low dimensions. We classify locally transitive subalgebras in the Lie algebra of three-dimensional affine and projective spaces. We pick those of these subalgebras that have finitely many orbits and find their decompositions into orbits. Also, a classification of finite orbit decompositions of connected affine transformation groups in space is obtained.

Введение. В конце прошлого века Софус Ли создал теорию «непрерывных групп преобразований», из которой выросло направление, названное теперь теорией групп Ли. Понятие действия группы Ли было отправной точкой исследований Софуса Ли, которые привели к созданию теории, носящей теперь его имя. Софусом Ли была получена, в частности, классификация аналитических локальных действий групп Ли на открытых подмножествах пространств R^n и C^n при $n = 1, 2$ [1, 2].

Темой настоящей работы является описание локально-транзитивных аффинных действий на R^3 и проективных на $\mathrm{R}P^3$, т. е. описание связных локально-транзитивных подгрупп группы Ли Aff(3, R) $= GL(3, \mathrm{R}) \times \mathrm{R}^3$ и, соответственно, группы $SL(4, \mathrm{R})$, а также описание их орбитальных разложений.

Основная часть. Гомоморфизм α группы Ли G в группу диффеоморфизмов многообразия M называется ее *действием* на M, если отображение

$$\mathrm{G} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}, \quad (\mathrm{g}, \mathrm{x}) \mapsto \alpha(\mathrm{g})\mathrm{x}$$

дифференцируемо.

Например, естественное действие $SL(n, P)$ в проективном пространстве является действием в смысле теории групп Ли (в дальнейшем под полем P будем подразумевать R или C).

Любой гомоморфизм $f: G \to GA(S)$ можно рассматривать как действие группы Ли G на аффинном пространстве S (здесь GA – полная аффинная группа).

В работах Софуса Ли изучаются группы, состоящие из локальных аналитических диффеоморфизмов, а не действия абстрактно заданных групп Ли.

Локальным действием группы G на многообразии M называется дифференцируемое отображение $f: W \to M$, где W – открытое подмножество в $G \times M$, содержащее $\{e\} \times M$ и удовлетворяющее свойствам действия на области определения этих свойств.

Пусть заданы два локальных действия: f – действие группы G на многообразии M и f' – действие группы G' на многообразии M'. Эти действия являются *локально подобными*, если существуют такие открытые подмножества U в M и U' в M', что локализации действий f на U и f' на U' подобны (т. е. существуют локальный изоморфизм групп Ли $h: G \to G'$ и диффеоморфизм $\varphi: U \to U'$, такие что

$$f'(h(g), \varphi(x)) = \varphi(f(g, x))$$

для всех $g \in G$, $x \in U$, для которых определены обе части). Если $G = G'$ и $h = \mathrm{id}$, то мы имеем *локально изоморфные локальные действия* f и f'. Если $G = G'$, а изоморфизм h внутренний (т. е. для некоторого $a \in G$ имеем $g \mapsto aga^{-1}$), то локально подобные действия будут локально изоморфны, а их локальный изоморфизм, заданный на открытом подмножестве в U, имеет вид

$$\psi: x \mapsto f'(a, \varphi(x)).$$

При классификации локальных действий удобен переход к инфинитезимальному языку. Локальное действие группы Ли G на многообразии M однозначно определяется действием касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на M, причем локальные действия групп Ли являются локально подобными тогда и только тогда, когда подобны соответствующие действия алгебр Ли (аналогичное утверждение верно для локально изоморфных локальных действий).

Описание подгрупп аффинной группы сводится к описанию локально-транзитивных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}(3, \mathrm{R}) = \mathfrak{gl}(3, \mathrm{R}) \times \mathrm{R}^3$ (с точностью до группы Aff(3, R)). Описание подгрупп группы Ли Aff(2, R) проделано, например, в [3].

Множество всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}(3, \mathrm{R})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством троек ($\mathfrak{a}$, W, ω), где $\mathfrak{a}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{R})$; W – подпространство в $V = \mathrm{R}^3$, инвариантное относительно $\mathfrak{a}$; ω: $\mathfrak{a} \to V / W$ – такое линейное отображение, что $\omega([x, y]) = x.\omega(y) - y.\omega(x)$ для всех $x, y \in \mathfrak{a}$ [4]. Элементы ω есть элементы $\mathrm{Z}^1(\mathfrak{a}, V / W)$ – пространства 1-коциклов алгебры Ли $\mathfrak{a}$ с коэффициентами в V / W.

На множестве всех подалгебр действует группа Aff(3, R). Множество подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}(3, \mathrm{R})$ с точностью до этой группы находится во взаимно однозначном соответствии с множеством троек (W, $\mathfrak{a}$, ω), где $\omega \in \mathrm{H}^1(\mathfrak{a}, V / W)$ [4].

Классифицируем подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{aff}(3, \mathrm{R})$ с точностью локального подобия следующим образом.

1. Опишем подпространства W пространства V с точностью до действия группы $GL(3, \mathrm{R})$.

2. Для каждого такого подпространства W опишем все подалгебры $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{R})$, сохраняющие W, с точностью до сопряженности относительно преобразований полной линейной группы, сохраняющих W.

3. Для каждой такой подалгебры $\mathfrak{a}$ опишем элементы пространства $H^1(\mathfrak{a}, V / W)$ с точностью до естественного действия группы всех преобразований из полной линейной группы, сохраняющих подпространство W.

Поскольку нас интересуют только локально-транзитивные подалгебры, то при классификации в каждом случае будем учитывать требование локальной транзитивности.

Получив классификацию локально-транзитивных аффинных подалгебр, изучим их орбитальные разложения. Выберем из полученных орбитальных разложений те, которые имеют конечное число орбит и не переводятся друг в друга аффинными преобразованиями. Для плоскости классификация конечных орбитальных разложений была проделана в [5].

Пусть $\{O_1, \ldots, O_p\}$ – набор орбит. Обозначим через x, y, z координаты в A^3. Каждую орбиту O_i на пространстве A^3 будем описывать при помощи системы соотношений вида

$$(f_{i1}(x, y, z) = 0) \wedge \ldots \wedge (f_{il}(x, y, z) = 0) \wedge$$

$$(f_{il+1}(x, y, z) > 0) \wedge \ldots \wedge (f_{ik}(x, y, z) > 0),$$

$l \leq k$, $f_{i1}, \ldots, f_{ik}$ – дифференцируемые функции. Точка m пространства A^3 принадлежит орбите O_i тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют данной системе. Орбитальное разложение для алгебры (группы) Ли аффинных преобразований будем записывать в следующем виде:

$$(m \in O_1) \vee (m \in O_2) \vee \ldots \vee (m \in O_p).$$

Теорема. Связная группа Ли аффинных преобразований, действующая на аффинном пространстве A^3 с конечным числом орбит, имеет одно из следующих аффинно неизоморфных орбитальных разложений:

1. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0)$.

2. $(z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0) \wedge (x = y = 0 \vee x^2 + y^2 \neq 0)$.

3. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge y = z = 0 \vee (y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0)$.

4. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge y = z = 0 \vee (y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0 \vee (2zx = y^2 \vee 2zx < y^2 \vee 2zx > y^2) \wedge (z > 0 \vee z < 0)$.

5. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0 \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z > 0 \vee z < 0)$.

6. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (z > 0 \vee z < 0)$.

7. $y = z = 0 \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z > 0 \vee z < 0) \vee (y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0$.

8. $(x = 0,\ z = y = 0) \vee (yz = x^2,\ y > 0,\ z > 0) \vee (yz = x^2,\ y < 0,\ z < 0) \vee (yz > x^2,\ y > 0,\ z > 0) \vee (yz > x^2, y < 0, z < 0) \vee (yz < x^2)$.

9. $(x = y = z = 0) \vee (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$.

10. $(x = y = z = 0) \vee z > 0 \vee z < 0 \vee (z = 0, x^2 + y^2 \neq 0)$.

11. $(x = y = z = 0) \vee (x > 0, y = z = 0) \vee (x < 0, y = z = 0) \vee (y^2 + z^2 \neq 0)$.

12. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0) \wedge (x = yz \vee x < yz \vee x > yz)$.

13. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0)$.

14. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0)$.

15. $z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0$.

16. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (x = z^2 \vee x > z^2 \vee x < z^2)$.

17. $z = 0 \wedge (x = y^2 \vee x > y^2 \vee x < y^2) \vee (z > 0 \vee z < 0)$.

18. $x = yz \vee x > yz \vee x < yz$.

19. $x = y^2 + z^2 \vee x < y^2 + z^2 \vee x > y^2 + z^2$.

20. $(x = y = 0) \vee (x^2 + y^2 \neq 0)$.

21. $y = z^2 \vee y < z^2 \vee y > z^2$.

22. $(x = yz - z^3 / 3) \vee (x < yz - z^3 / 3) \vee (x > yz - - z^3 / 3)$.

23. Все пространство A^3 – одна орбита.

Назовем *линейным* случай, когда каждая орбита в орбитальном разложении вкладывается в линейное подпространство той же размерности. В приведенной выше теореме линейными являются разложения 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 23.

В разложениях 18, 19, 21, 22 орбитами являются поверхность (гиперболический параболоид, эллиптический параболоид, цилиндр с параболой в основании и поверхность Кэли соответственно), ее внутренность и внешность; в разложении 8 – точка, два конуса, их внутренности и внешность. В случаях 12, 16 и 4 орбитальные разложения получаются пересечением разложений 18, 21 и 8 с плоскостью, а именно: в случае 12 имеем две половинки гиперболических параболоидов, две их внутренности и две внешности, а также прямую пересечения параболоида и плоскости и две полуплоскости; в случае 16 получаем два полуцилиндра, две их внешности и две внутренности, а также плоскость, которая параболой разбивается на три орбиты; в случае 4 – две полупрямых пересечения полуконусов и плоскости по образующим конусов, два полуконуса без этих полупрямых, две их внешности и две внутренности, точку и две полуплоскости. В случае 17 парабола разбивает плоскость на три орбиты, а эта плоскость – в свою очередь, пространство на два полупространства. Это завершает описание всех орбитальных разложений.

Классифицируем теперь локально-транзитивные проективные действия на $\mathbb{R}P^3$, т. е. опишем связные локально-транзитивные подгруппы группы Ли $SL(4, \mathbb{R})$. Как сказано выше, это описание сводится к описанию локально-транзитивных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$. Описание проводится с точностью до группы $SL(4, \mathbb{R})$, которая элемент $\varphi \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ переводит в элемент $g\varphi g^{-1}$, $g \in SL(4, \mathbb{R})$.

Опишем сначала локально-транзитивные подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, действие которых сводится к аффинному. Пусть подгруппа в $SL(4, \mathbb{R})$ имеет трехмерное инвариантное подпространство. В некотором базисе ей соответствует некоторая подгруппа Aff(3, R), причем все подгруппы в $SL(4, \mathbb{R})$, сохраняющие трехмерное подпространство инвариантным, в некотором базисе имеют именно такой вид.

Группа должна действовать локально транзитивно, следовательно, существует открытое множество U, на котором группа действует транзитивно. Тогда она действует транзитивно и на открытом множестве

$$U \setminus \{x_1 : x_2 : x_3 : 0\}.$$

Не нарушая общности, можно продолжать рассуждения для локальной карты на пространстве $\mathbb{R}P^3$

$$(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right).$$

Каждому проективному действию, сохраняющему трехмерное инвариантное подпространство, мы поставили в соответствие аффинное.

Классификация локально-транзитивных подалгебр алгебры $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, имеющих трехмерное инвариантное подпространство, с точностью до подгруппы Aff(3, R) равносильна классификации аффинных подалгебр, которая была проделана ранее. Следовательно, чтобы описать подалгебры в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, сохраняющие трехмерное инвариантное подпространство, достаточно выбрать из подалгебр, соответствующих аффинным, несопряженные в группе проективных преобразований.

Проведем классификацию подалгебр, которые не сводятся к подалгебрам аффинной алгебры, т. е. не имеют трехмерных инвариантных подпространств (это означает, что подалгебра либо неразрешима, либо является вещественной формой разрешимой подалгебры, имеющей трехмерные инвариантные подпространства над полем C).

Классифицируем неразрешимые подалгебры, не имеющие трехмерных инвариантных подпространств. Каждая неразрешимая подалгебра $\mathfrak{g}$ содержит полупростую подалгебру Леви $\mathfrak{a}$ (все полупростые подалгебры классифицированы); алгебра $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ является $\mathfrak{a}$-модулем (относительно присоединенного представления) и разлагается в прямую сумму изотипных компонент; $\mathfrak{g}$ является прямой суммой своих пересечений с изотипными компонентами. Таким образом, чтобы определить $\mathfrak{g}$, найдем все подмодули каждой изотипной компоненты, составим их суммы и проверим, является ли полученное пространство алгеброй Ли.

Чтобы классифицировать разрешимые подалгебры, проверим для каждой найденной подалгебры, имеющей трехмерные инвариантные подпространства, содержит ли их ее вещественная форма. Это завершит классификацию.

Если проективная подалгебра имеет конечное число орбит, то соответствующая ей аффинная подалгебра также имеет конечное число орбит. Следовательно, в рассмотрении достаточно ограничиться проективными подалгебрами, у которых аффинные алгебры имеют конечное число орбит.

Заключение. Классифицированы локально-транзитивные аффинные и проективные действия на трехмерном пространстве, т. е. подалгебры алгебр аффинных и проективных преобразований, которые имеют открытые орбиты при действии на соответствующих пространствах. Проведено полное описание подалгебр полной аффинной алгебры и подалгебр проективной алгебры трехмерного пространства. Выделены подалгебры, действующие локально-транзитивно и, в особенности, имеющие конечное число орбит. Приведена классификация конечных орбитальных разложений.

Предложенная методика может быть использована для произвольной размерности.

Литература

1. Lie, S. Theorie der Transformationsgruppen / S. Lie, F. Engel. – Leipzig: Teubner, 1893. – 830 s.

2. Чеботатев, Н. Г. Теория групп Ли / Н. Г. Чеботатев. – М.; Л.: Гостехиздат, 1940. – 396 с.

3. Koch, R. M. On generating subgroups of the affine group in the plane by pairs of infinitesimal transformations / R. M. Koch, F. Lowenthal. – Rocky Mountain J. Math. – 1976. – Vol. 6, № 1. – P. 119–131.

4. Doubrov, B. Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry / B. Doubrov, B. Komrakov, M. Rabinovich. – Topology and geometry of submanifolds. River Edge: World Sci. – 1996. – Vol. 8. – P. 212–223.

5. Пясецкий, В. С. Конечные орбитальные разложения групп аффинных преобразований плоскости / В. С. Пясецкий // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. – Ярославль: ЯГУ, 1988. – С. 155–157.