

Т. Б. Копейкина, доцент; А. С. Гусейнова, ассистент

## УПРАВЛЯЕМОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

The controllability problem of time-invariant singularly perturbed dynamic systems with constant delay (SPSD) is considered in this paper. Decomposition of controllability property for  $(n_1 + n_2)$ -SPSD by means of the controllability of degenerated  $n_1$ -system and boundary layer  $n_2$ -system is obtained for new condition on the parameters of SPDS under consideration. Controllability conditions for these systems are proved which are affective and expressed through the solutions of recurrence algebraic equations. The example of the five-order system is considered and controllability conditions are obtained for it.

**Введение.** Проблемы управляемости и наблюдаемости объектов, поведение которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами, впервые были решены американским математиком Р. Калманом в 1960 г. Эти проблемы, как и прежде, играют центральную роль в современной теории управления, в частности, при исследовании управляемости функционально-дифференциальных, сингулярно возмущенных систем (СВС), т. е. объектов, составляющие которых обладают существенно различными скоростями, СВС с запаздыванием (СВСЗ).

Известно, что во многих задачах динамики полета, химической кинетики, автоматического управления и регулирования условие управляемости является необходимым условием существования решения исследуемых задач. Проблеме управляемости стационарных и нестационарных СВС с различными видами запаздываний (малыми, постоянными, зависящими от времени) и без запаздываний в последние годы посвящен ряд работ как отечественных, так и зарубежных ученых [1–4]. Возросшее внимание к СВС объясняется широким спектром их приложения. Достаточно хорошо изучена управляемость стационарных СВС. Очевидно, однако, что СВСЗ наиболее адекватно отражают наличие задержек в работе исследуемых объектов. Такие объекты описываются, например, линейными стационарными СВС с запаздыванием (ЛССВСЗ) вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}x(t-h) + \\ &+ C_1y(t) + C_{12}y(t-h) + B_1u(t), \\ \mu\dot{y}(t) &= A_{21}x(t) + A_{22}x(t-h) + \\ &+ C_2y(t) + C_{22}y(t-h) + B_2u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

как в медленных  $x$ , так и в быстрых  $y$  переменных. В (1)  $\{x(t), y(t)\} - (n_1 + n_2)$ -вектор состояния системы в момент времени  $t$ ;  $t \in [0, T]$   $x(t) \in R^{n_1}$ ,  $y(t) \in R^{n_2}$ ,  $u$  – управляющее воздействие из класса кусочно-непрерывных  $r$ -вектор-функций ( $u \in PC([0, T], R^r)$ , называемое далее допустимым;  $A_{ij}, C_{ij}, B_j$ ,  $i, j = 1, 2$  – за-

данные постоянные матрицы соответствующих размеров;  $\mu$  – малый положительный параметр,  $\mu \in (0, \mu^0]$ ,  $\mu^0 \ll 1$ ;  $h$  – запаздывание,  $h = \text{const} > 0$ .

Ранее задача относительной управляемости (ОУ) ЛССВСЗ (1) исследовалась либо в предположении  $C_{22} = 0_{n_2}$ , где  $0_{n_2}$  – квадратная  $(n_2 \times n_2)$ -матрица с нулевыми элементами, либо при условии  $\det C_{21} \neq 0$  [1]. В данной работе рассматривается ОУ ЛССВСЗ (1) по  $x$ , по  $y$ , по совокупности переменных  $\{x, y\}$  при новом, достаточно общем предположении относительно параметров системы:  $\det(C_{21} + mC_{22}) \neq 0$ .

При исследовании качественных свойств СВС (наблюдаемости, управляемости и др.) важно иметь условия, при которых данные свойства обладают *декомпозицией*, позволяющей, например, судить об управляемости  $(n_1 + n_2)$ -ЛССВСЗ (1) на основании некоторых подсистем меньшего порядка. Такими тесно связанными с ЛССВСЗ (1) являются вырожденная  $n_1$ -система (ВС) и  $n_2$ -система пограничного слоя (СПС). Поэтому сначала доказаны критерии (т. е. необходимые и достаточные условия) ОУ как ВС, так и СПС, связанных с ЛССВСЗ (1), а затем – достаточные условия ОУ ЛССВСЗ (1), выраженные через условия ОУ ВС и СПС. Все полученные результаты носят эффективный характер, поскольку выражены через решения матричных рекуррентных определяющих уравнений.

**Вспомогательные результаты.** Рассмотрим ЛССВСЗ (1), решение которой определяется начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0, \mu) &= \{\varphi(\theta), x(0) = x_0\}, \\ y(0, \mu) &= \{\psi(\theta), y(0) = y_0\}, \quad \theta \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi \in PC([-h, 0], R^{n_1})$ ,  $\psi \in PC([-h, 0], R^{n_2})$  – кусочно-непрерывные  $n_1$ - и  $n_2$ -вектор-функции на  $[-h, 0]$ ,  $x_0 \in R^{n_1}$ ,  $y_0 \in R^{n_2}$ .

Приведем определение и ряд лемм, необходимых для доказательства условий ОУ ЛССВСЗ (1), (2).

**Определение.** ЛССВСЗ (1), (2) при заданном  $\mu$  называется относительно управляемой на отрезке  $[0, T]$  по медленной переменной  $x$  (по быстрой переменной  $y$ ; по совокупности

переменных  $\{x, y\}$ ), если для любого вектора  $c_1 \in R^{n_1}$  (любого вектора  $c_2 \in R^{n_2}$ ; любых векторов  $c_1 \in R^{n_1}$ ,  $c_2 \in R^{n_2}$ ) и любых начальных условий (2) существует допустимое управление  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , такое, что соответствующая им компонента  $x(t, \mu) = x(t, \mu; x, \varphi; y, \psi; u)$ ,  $t > 0$ , (компонента  $y(t, \mu) = y(t, \mu; x, \varphi; y, \psi; u)$ ,  $t > 0$ ; компоненты  $x(t, \mu)$ ,  $y(t, \mu)$ ),  $t > 0$ , удовлетворяет условию  $x(T, \mu) = c_1$  (условию  $y(T, \mu) = c_2$ ; условиям  $x(T, \mu) = c_1$ ,  $y(T, \mu) = c_2$ ).

Для решения задачи ОУ ЛССВСЗ (1) представим ее в операторной форме

$$\begin{aligned} p \cdot x(t) &= (A_{11} + A_{12}e^{-ph})x(t) + \\ &+ (C_{11} + C_{12}e^{-ph})y(t) + B_1u(t), \\ \mu py(t) &= (A_{21} + A_{22}e^{-ph})x(t) + \\ &+ (C_{21} + C_{22}e^{-ph})y(t) + B_2u(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p$  – оператор дифференцирования,  $p \equiv d/dt$ ;  $e^{-ph}$  – оператор сдвига аргумента функции на величину  $h$ :  $e^{-ph}z(t) \equiv z(t-h)$ .

Известно [1], что об ОУ  $(n_1 + n_2)$ -ЛССВСЗ (1), (2) можно судить на основании того, являются ли ОУ две системы меньшей размерности: вырожденная ( $\mu = 0$ )  $n_1$ -система и  $n_2$ -СПС. Поэтому прежде чем изучать проблему ОУ ЛССВСЗ (1), найдем вид ее ВС, СПС и получим условия их ОУ. Затем определим связь этих условий с условиями ОУ ЛССВСЗ (1).

Формальное решение ЛССВСЗ (1) ищем, согласно [5], как представление вектор-функции  $z(t, \mu) \equiv \{x(t, \mu), y(t, \mu)\} \in R^{n_1+n_2}$  в виде суммы слагаемых в различных временных шкалах:

$$z(t, \mu) = z_s(t) + z_f(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\mu}. \quad (4)$$

В (4)  $\tau$  – «быстрое» время, компоненты  $x(t, \mu), y(t, \mu)$  ( $n_1 + n_2$ )-вектор-функции  $z(t, \mu)$  имеют вид  $x(t, \mu) = x_s(t) + x_f(\tau)$ ,  $y(t, \mu) = y_s(t) + y_f(\tau)$ , где  $x_s(t)$ ,  $x_f(\tau)$  – соответственно медленная и быстрая составляющие медленной переменной  $x(t, \mu)$ , а  $y_s(t)$ ,  $y_f(\tau)$  – быстрой переменной  $y(t, \mu)$  решения  $\{x(t, \mu), y(t, \mu)\}$  системы (1). Будем искать допустимое управление  $u(t, \mu)$ , обеспечивающее ОУ ЛССВСЗ (1), (2), также в виде  $u(t, \mu) = u_s(t) + u_f(\tau)$ .

Положив в (3)  $\mu = 0$ , получим гибридную [6] систему относительно медленных переменных  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $u_s$ , которая при условии обратимости неограниченного оператора  $C_{21} + C_{22}e^{-ph}$  позволяет представить  $y_s(t)$  в виде

$$\begin{aligned} y_s(t) &= -(C_{21} + C_{22}e^{-ph})^{-1} \times \\ &\times (A_{21} + A_{22}e^{-ph})x_s(t) + B_2u_s(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (5) в первое уравнение (3) получим  $n_1$ -систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s(t) = A(e^{-ph})x_s(t) + B(e^{-ph})u_s(t) \quad (6)$$

относительно  $x_s(t)$  с параметрами

$$\begin{aligned} A(e^{-ph}) &= A_{11} + A_{12}e^{-ph} - \\ &- (C_{11} + C_{12}e^{-ph})(C_{21} + C_{22}e^{-ph})^{-1} \times \\ &\times (A_{21} + A_{22}e^{-ph}), \\ B(e^{-ph}) &= B_1 - (C_{11} + C_{12}e^{-ph}) \times \\ &\times (C_{21} + C_{22}e^{-ph})^{-1} B_2. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу теоремы Гамильтона – Кэли [7] любая квадратная  $(n \times n)$ -матрица  $A$  удовлетворяет своему характеристическому уравнению  $\det(\lambda E_n - A) = 0$

$$\begin{aligned} A^n - \alpha_1 A^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} A + \\ + (-1)^n \alpha_n E_n = 0_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты  $\alpha_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  в (8) вычисляются по формуле

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ i_1 \dots i_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где запись  $\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ i_1 \dots i_k \end{pmatrix}$  означает сумму главных миноров порядка  $k$  матрицы  $A$ . Из очевидного тождества  $(C_{21} + mC_{22})^{-1} \times (C_{21} + mC_{22}) = E_{n_2}$  и (8) следует представление обратной матрицы  $(C_{21} + mC_{22})^{-1}$  в виде

$$\begin{aligned} (C_{21} + mC_{22})^{-1} &= \frac{(-1)^{n_2-1}}{\alpha_{n_2}} ((C_{21} + mC_{22})^{n_2-1} - \\ &- (\alpha_1 C_{21} + mC_{22})^{n_2-2} + \dots + (-1)^{n_2-1} \alpha_{n_2-1} E_{n_2}). \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, в силу (9)  $\alpha_{n_2} = \det(C_{21} + mC_{22})$ .

**Лемма 1.** Пусть  $A, C \in R^{n \times n}$ ,  $n \geq 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \det(A + mC) &= \\ &= \sum_{i=0}^n m^i \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq n} \det A_{[iC]}^{(l_1, \dots, l_i)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где запись  $\det A_{[iC]}^{(l_1, \dots, l_i)}$  означает замену  $i$  столбцов с номерами  $l_1, \dots, l_i$  в матрице  $A$  соответствующими столбцами матрицы  $C$ .

В лемме 1 по определению полагаем  $\sum_{1 \leq l_1 < l_0 \leq 1} \det A_{[0C]}^{(l_0)} = \det A_{[0C]}^{(0)} = \det A$ .

*Доказательство* этой леммы и леммы 2 проводится методом математической индукции по  $n$  и здесь опускается.

*Замечание.* В данной работе решение задачи ОУ ЛССВСЗ (1), (2) рассматривается при условии  $\alpha_{n_2} \equiv \text{const} \neq 0$  в (10). Нетрудно показать, что из равенства (11) леммы 1 это предположение равносильно следующим трем условиям:

$$\det C_{21} \neq 0, \quad \det C_{22} = 0, \\ \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq n_2} \det C_{21}^{(l_1, \dots, l_i)} = 0, \quad \forall i = \overline{1, n_2}. \quad (12)$$

**Лемма 2.** Пусть  $A, C \in R^{n \times n}$ . Тогда для любого  $k \leq n$  коэффициенты  $\alpha_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  матричного уравнения

$$(A + mC)^n - \\ - (\alpha_1 A + mC)^{n-1} + \dots + (-1)^n \alpha_n E_n = 0_n \quad (13)$$

определяются по формуле

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} (A + mC) \begin{pmatrix} l_1 \dots l_k \\ l_1 \dots l_k \end{pmatrix} = \\ = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \sum_{j=0}^k m^j \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_j \leq k} \det A_{[jC]}^{(l_1, \dots, l_j)} \begin{pmatrix} l_1 \dots l_k \\ l_1 \dots l_k \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где  $\sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_j \leq k} \det A_{[jC]}^{(l_1, \dots, l_j)} \begin{pmatrix} l_1 \dots l_k \\ l_1 \dots l_k \end{pmatrix}$  – главные ми-  
норы порядка  $k$  матрицы  $A$ , в которых  $j$  столбцов заменены соответствующими столб-  
цами матрицы  $C$ .

С учетом (12) формулу (11) можно записать иначе:

$$(C_{21} + mC_{22})^{-1} = \\ = \frac{(-1)^{n_2-1}}{\det C_{21}} \sum_{i=1}^{n_2-1} (-1)^i \alpha_i (C_{21} + mC_{22})^{n_2-i-1}, \quad (15)$$

где вид коэффициентов  $\alpha_i$  представлен в следующей лемме.

**Лемма 3 [8].** Пусть  $A, C \in R^{n \times n}$ . Тогда для любого  $k \geq 0$  справедливо равенство

$$(A + mC)^k = \sum_{i=0}^k m^i V_k(ih), \quad (16)$$

где  $m$  – числовой параметр,  $m > 0$ ;  $V_k(ih)$  – решения матричного рекуррентного уравнения (определенного уравнения)

$$V_{k+1}(ih) = AV_k(ih) + CV_k((i-1)h), \\ i = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

с начальными условиями

$$V_0(0) = E_n, \quad V_0(ih) = 0_n, \quad i \neq 0.$$

Введем обозначение:

$$\xi_{ij} = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq n_2} \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_j \leq i} \det C_{21}^{(l_1, \dots, l_j)} \begin{pmatrix} l_1 \dots l_i \\ l_1 \dots l_i \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\xi_{00} = 1, \xi_{0j} @ 0, j > 0$ . С учетом условий (12) и (14) из (15) получаем еще одно представление обратной матрицы:

$$(C_{21} + mC_{22})^{-1} = \\ = \frac{(-1)^{n_2-1}}{\det C_{21}} \sum_{i=1}^{n_2-1} m^i \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n_2-1} (-1)^k \xi_{kj} V_{n_2-1-k}((i-j)h). \quad (17)$$

С помощью (17) можно найти аналитическое представление ВС (6) с коэффициентами

$$A(e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{n_2+1} L_i e^{-iph}, \quad B(e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{n_2+1} D_i e^{-iph}, \quad (18)$$

где

$$L_0 = A_{11} + N_0, \quad L_1 = A_{12} + N_1 \\ L_i = N_i, \quad i = 2, n_2 + 1,$$

$$N_i = \frac{(-1)^{n_2-1}}{\det C_{21}} \sum_{q=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=0}^{i+l+q-2} \sum_{k=0}^{n_2-1} (-1)^k \xi_{kj} C_{1l} \times \\ \times V_{n_2-1-k}((i+l+q-2-j)h) A_{2q}, \quad (19) \\ (i = \overline{0, n_2+1}) \vee (i+l+q-2 \leq n_2-1),$$

$$D_0 = B_1 + \frac{(-1)^{n_2-1}}{\det C_{21}} \sum_{k=0}^{n_2-1} (-1)^k \xi_{k0} C_{11} V_{n_2-1-k}(0) B_2,$$

$$D_i = \frac{(-1)^{n_2-1}}{\det C_{21}} \times \\ \times \sum_{l=1}^2 \sum_{j=0}^{i+l-1} \sum_{k=0}^{n_2-1} (-1)^k \xi_{kj} C_{1l} V_{n_2-1-k}((i+l-j-1)h) B_2, \quad (20) \\ (i = \overline{1, n_2}) \vee (i+l-1 \leq n_2-1), \quad D_{n_2+1} \equiv 0_{n_2}.$$

Подставляя (18) в (6) получим

$$\dot{x}_s(t) = \sum_{i=0}^{n_2+1} L_i e^{-iph} x_s(t) + \sum_{i=0}^{n_2+1} D_i e^{-iph} u_s(t), \quad (21)$$

т. е. аналитическое представление вырожденной  $n_1$ -системы для  $(n_1 + n_2)$ -ЛССВСЗ (1). Очевидно, (21) представляет собой дифференциальную систему с  $(n_2 + 1)$ -кратным времененным запаздыванием в состоянии и  $n_2$ -кратным (в силу  $D_{n_2+1} \equiv 0_{n_2}$ ) запаздыванием в управлении. Для однозначного определения движения системы (21) при  $t > 0$  необходимо иметь начальные условия для  $x_s(t)$ ,  $t \in [-(n_2 + 1)h, 0]$ ,  $u_s(t)$ ,  $t \in [-n_2 h, 0]$ , которые определяются из (2):

$$x_{0s}(\cdot) = \{\varphi(\theta), \theta < 0, x_s(0) = x_{0s}\}, \\ u_s(t) \equiv 0, t < -(n_2 + 1)h, \quad (22)$$

где  $\varphi(\theta)$ ,  $u_s(t)$  – кусочно-непрерывные  $n_1$ - и  $r$ -вектор-функции соответственно.

Найдем аналитический вид СПС, соответствующей ЛССВСЗ (1). Как показано в [1],

уравнение для  $n_2$ -СПС ЛССВСЗ (1) получается путем «замораживания» медленных переменных  $x_s(t)$  в уравнении быстрых движений исходной ЛССВСЗ (1) и введения нового «быстрого» времени  $\tau = t/\mu$ . Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_f(\tau)}{d\tau} &= C_{21}y_f(\tau) + \\ &+ C_{22}y_f(\tau - h_1) + B_2u_f(\tau), \quad (23) \\ h_1 &= \frac{t}{\mu}, \quad \tau \in \left[0, \frac{T}{\mu}\right]. \end{aligned}$$

Начальные условия для (23) следуют из (2) с учетом (4) и (22):

$$\begin{aligned} y_{0f}(\cdot) &= \{N_0\phi(\theta) + \psi(\theta), \\ \theta \in [-h, 0], y(0) &= N_0x_0 + y_0\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Заметим, что СПС (23) является системой с бесконечно большим запаздыванием  $h_1$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

**Решение задачи относительной управляемости.** Введем невырожденную (для любых матриц  $S_i, R_i, i = \overline{0, n_2}$ ) замену переменных [1]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} E_{n_2} & -\mu \sum_{i=0}^{n_2} S_i e^{-iph} \\ -\sum_{i=0}^{n_2} R_i e^{-iph} & E_{n_1} + \mu \sum_{i=0}^{n_2} R_i e^{-iph} \sum_{i=0}^{n_2} S_i e^{-iph} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}. \quad (25) \end{aligned}$$

Данная замена позволяет выбрать неизвестные матрицы  $S_i, R_i, i = \overline{0, n_2}$  таким образом, что полученные в силу (25) системы дифференциальных уравнений относительно  $\xi(t), \eta(t)$  являются системами с разделенными переменными с запаздыванием (СППЗ):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^{n_2+1} (L_i + O(\mu)) e^{-ph} \xi(t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n_2+1} (D_i + O(\mu)) e^{-ph} u(t), \quad (26) \\ \mu \dot{\eta}(t) &= (C_{21} + O(\mu)) \eta(t) + \\ &+ (C_{22} + O(\mu)) \eta(t - h_1) + B_2 u(t), \end{aligned}$$

(соответственно с  $(n_2 + 1)$ -запаздыванием по состоянию и с одним запаздыванием по управлению) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \xi_0(\cdot) &= \{\phi(\theta), \theta \in [-(n_2 + 1)h, 0], \xi(0) = x_0\}, \\ \eta_0(\cdot) &= \{N_0\phi(\theta) + \psi(\theta), \theta \in [-h, 0], \\ \eta(0) &= N_0x_0 + y_0\}, \quad (27) \end{aligned}$$

где  $L_i, D_i, i = \overline{0, n_2 + 1}$  имеют вид (19), (20).

Поскольку невырожденное преобразование (25) сохраняет все качественные свойства ЛССВСЗ (1), (2), далее вместо (1), (2) можно исследовать управляемость СППЗ (26).

Очевидно, что невозмущенная система

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=0}^{n_2+1} L_i e^{-iph} \xi(t) + \sum_{i=0}^{n_2+1} D_i e^{-iph} u(t) \quad (28)$$

$$\dot{\eta}(t) = C_{21} \eta(t) + C_{22} \eta(t - h_1) + B_2 u(t) \quad (29)$$

с точностью до  $O(\mu)$  совпадает с СППЗ (26);  $n_1$ -система (28) с точностью до обозначений есть ВС (21), а  $n_2$ -система (29), полученная из (26) заменой  $\tau = t/\mu$  – СПС (23). Критерии ОУ таких систем известны [9]: для ОУ системы (28) на отрезке  $[0, T]$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank} \{X_k(s), k = \overline{1, n_1(n_2 + 2)}, s = \overline{0, (n_2 + 1)h}\} = n_1. \quad (30)$$

В (30)  $X_k(s) \in R^{n_1 \times r}$  – матричные решения определяющего уравнения

$$\begin{aligned} X_{k+1}(s) &= \sum_{i=0}^{n_2+1} L_i X_k(s - ih) + \sum_{i=0}^{n_2+1} D_i U_k(s - ih), \quad (31) \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

системы (28) с начальными условиями

$$\begin{aligned} X_0(s) &= 0_{n_1 \times r} \quad \forall s, \quad X_k(s) = 0_{n_1 \times r}, \\ U_k(s) &= 0_r, \quad (32.1) \end{aligned}$$

$$\forall s < 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$U_0(s) = \begin{cases} E_r, & s = 0, \\ 0_r, & s \neq 0. \end{cases} \quad (32.2)$$

Критерий ОУ системы (29) имеет вид

$$\text{rank} \{Y_k(s), k = \overline{1, n_2}; s \in [0, (n_2 + 1)h]\} = n_2, \quad (33)$$

где  $Y_k(s) \in R^{n_2 \times r}$  – матричные решения определяющего уравнения

$$\begin{aligned} Y_{k+1}(s) &= C_{21} Y_k(s) +, \\ &+ C_{22} Y_k(s - h_1) + B_2 U_k(s) \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (34)$$

с начальными условиями (32.2) и

$$\begin{aligned} Y_0(s) &= 0_{n_2 \times r} \quad \forall s, \quad Y_k(s) = 0_{n_2 \times r}, \quad U_k(s) = 0_r, \quad (35) \\ \forall s < 0, \quad k &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

**Теорема 1 [1].** Если система (28) ОУ на  $[0, T]$ , т. е. выполнено условие (30), то существует  $\mu^* > 0$  такое что для всех  $\mu \in (0, \mu^*]$ , СППЗ (26), (27) ОУ по переменной  $\xi$ .

Из теоремы 1 и представления ЛССВСЗ (1), (2) в виде (26) следует теорема 2.

**Теорема 2.** Если (30) выполняется, то существует  $\mu^* > 0$  такое, что для всех  $\mu \in (0, \mu^*]$ , ЛССВСЗ (1), (2) ОУ на  $[0, T]$  по медленной переменной  $x$ .

**Теорема 3.** Если система (29) ОУ на  $[0, T/\mu]$ , т. е. выполняется условие (33), то существует  $\mu^* > 0$  такое, что для всех  $\mu \in (0, \mu^*]$  система (26) ОУ по переменной  $y$ .

Поскольку (29) с точностью до обозначений совпадает с (23), то справедливо утверждение.

**Теорема 4.** Если выполняется (33), то существует  $\mu^* > 0$  такое, что ЛССВСЗ (1), (2) ОУ по быстрой переменной  $y$  на  $[0, T]$  для всех  $\mu \in (0, \mu^*]$ .

**Теорема 5.** Если выполнены условия (30), (33), то существует такое  $\mu^* > 0$ , что для всех  $\mu \in (0, \mu^*]$  ЛССВСЗ (1), (2) ОУ на  $[0, T]$  по совокупности переменных  $\{x, y\}$ .

**Пример.** На отрезке времени  $[0; 3,5]$  рассмотрим ОУ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(t) - 2x_1(t-1) + y_1(t) \\ \dot{x}_2 = x_2(t) - 2x_2(t-1) + u(t) \\ \mu\dot{y}_1 = x_1(t) - x_1(t-1) + y_1(t) + 2y_2(t) - y_1(t-1) \\ \mu\dot{y}_2 = x_2(t) + x_2(t-1) + y_2(t) - y_3(t) + y_2(t-1) \\ \mu\dot{y}_3 = 3y_1(t) - 3u(t) \end{cases} \quad (36)$$

по совокупности переменных  $\{x, y\}$ , где

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in R^2; \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \in R^3.$$

Очевидно, (33) является ЛССВСЗ вида (1) с параметрами

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$n_1 = 2, n_2 = 3; \quad t \in [0; 3,5]; \quad T = 3,5; \quad h = 1.$$

Проверим выполнение условий (30), (33) теоремы 5, которые для (36) имеют вид

$$\text{rank} \left\{ X_k(s), \quad k = \overline{1, 10}, \quad s = \overline{0, 4} \right\} = 2, \quad (37)$$

$$\text{rank} \left\{ Y_k(s), \quad k = \overline{1, 3}, \quad s \in [0, \frac{4}{\mu}] \right\} = 3, \quad (38)$$

где  $X_k(s)$ ,  $Y_k(s)$  определяются по формулам

$$(31), (32.1), (32.2); (34), (35); \quad X_0(0) \stackrel{(32.1)}{=} 0_{2 \times 1};$$

$$Y_0(0) \stackrel{(35)}{=} 0_{3 \times 1}, \quad \text{а } X_k(i) = 0_{2 \times 1}, \quad Y_k(i \frac{4}{\mu}) = 0_{3 \times 1}; \quad \forall i > k,$$

в силу свойств [1] определяющих уравнений. Так как

$$X_2(0) = L_0 D_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X_2(1) = L_0 D_1 + L_1 D_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$X_2(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $L_i$ ,  $D_i$  вычислены по формулам (19), (20), то

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & \dots \\ 1 & -2 & 0 & \dots \end{pmatrix} = 2.$$

Следовательно, система (36) управляема по  $x$ .

Проверим выполнение условия (38). Поскольку

$$Y_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad Y_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

то

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & \dots \\ 0 & 3 & 3 & \dots \\ -3 & 0 & 6 & \dots \end{pmatrix} = 3,$$

т. е. (36) управляема по  $y$ . Объединение полученных условий в силу теоремы 5 означает ОУ системы (36) по  $\{x, y\}$ .

**Заключение.** Исследована относительная управляемость ЛССВСЗ при новом условии на параметры системы. Получены достаточные условия ОУ по медленной переменной  $x$ , по быстрой переменной  $y$ , по совокупности

переменных  $\{x, y\}$ , выраженные через решения соответствующих определяющих уравнений.

### Литература

1. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 9. – С. 1508–1518.
2. Kopeikina, T. B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems / T. B. Kopeikina // Systems Science. – 1995. – Vol. 21, № 1. – P. 17–36.
3. Glizer, V. Y. Controllability of nonstandard singularly perturbed systems with small state delay / V. Y. Glizer // IEEE Trans. Automat. Control. – 2003. – Vol. 48, № 34. – P. 1280–1285.
4. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с малым запаздыванием / Т. Б. Копейкина, А. С. Гусейнова // Вестник БНТУ. – 2006. – № 4. – С. 54–58.
5. Васильева, А. Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 242 с.
6. Марченко, В. М. Представление решений управляемых гибридных систем / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Проблемы управления и теории информации. – 2002. – Т. 149, № 6. – С. 17–25.
7. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
8. Марченко, В. М. Об одном доказательстве критерия управляемости для систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа / В. М. Марченко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 1972. – Т. 3. – С. 11–13.
9. Controllability and observability of multivariable systems with delay / F. M. Kirillova [et al.] // IFAC Symp. on Multivariable Technical Control Systems. Techn. pap. Dusseldorf, FRG. – 1971. – P. 1–6.