УДК 517.977

В. М. Марченко, профессор; О. Н. Пыжкова, доцент

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С МНОГОМЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ[1]

Linear hybrid differential-discrete two dimensional time (2-D) systems are studied from the point of view of relative controllability property. For such systems, a defining equation is introduced, algebraic properties of the defining equation solution are investigated and analytical solution representations of considered hybrid 2-D systems into series of their defining equation solutions are given. This result is applied to obtaining the effective parametric criterion, which expressed in terms of defining equation solutions, of relative controllability with respect to continuous and piecewise continuous state variable of the systems under consideration.

Введение. Автоматика и телемеханика, теория передачи информации, радиология и химическая кинетика, оптика и радиоастрономия, моделирование технологических процессов в ядерных реакторах, плазме и лазерах, задачи демографии и экономики и т. д. предъявляют все более возрастающие требования к математическим моделям реальных систем автоматического регулирования. Все вышеперечисленное, а также прогресс средств вычислительной техники, широкое распространение микропроцессоров в производстве диктуют необходимость изучения фундаментальных проблем математической теории управления, ставят новые задачи для более широкого класса динамических систем. Кроме того, появляется потребность в разработке новых более эффективных методов изучения систем, в частности систем с запаздыванием, динамических систем с алгебраическими связями, описывающих процессы, в которых как эффектом запаздывания, так и алгебраическими связями пренебречь нельзя. Особый класс составляют динамические аналого-цифровые системы, моделирующие динамические процессы, рассматриваемые на дискретных слоях. Большинство из перечисленных процессов приводят к математическим моделям в виде гибридных систем. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен [1–7].

Ниже рассматриваются гибридные дифференциально-алгебраические системы с многомерным временем, состоящим из непрерывной и дискретной компонент.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, описываемый следующей гибридной 2-D системой:

$$\dot{x}_1(t,i)=A_{11}x_1(t,i)+A_{12}x_2(t,i)+B_1u(t,i),\quad t\in R_+=[0,+\infty], \tag{1a}$$

$$x_2(t,i+1)=A_{21}x_1(t,i)+A_{22}x_2(t,i)+B_2u(t,i),\quad i\in Z_+, \tag{1b}$$

где $\dot{x}_1(t,i)=\dfrac{\partial x_1(t,i)}{\partial t}$, $x_1(t,i)\in R^{n_1}$, $x_2(t,i)\in R^{n_2}$, $u(t,i)\in R^m$ и $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Граничные условия для (1a) и (1b) зададим в виде

$$x_1(0,i)=x_1(i),\ i\in Z_+,\qquad x_2(t,0)=x_2(t),\ i\in R_+. \tag{2}$$

Отметим, что гибридная система (1) имеет структуру, схожую с известной моделью Россера.

Определение. При заданном моменте времени $t_1>0$ и слое $i_1\in Z$ система (1), (2) называется (t_1, i_1)-управляемой относительно x_1, если для любых начальных данных $x_1(i)$, $i\in Z_+$, $x_2(t)$, $t\in R_+$, любого конечного состояния $x_1^*\in \mathrm{R}^{n_1}$, любых вектор-функций найдется кусочно-непрерывное по t управление $u(t, i)$, $t\in[0,\ t_1]$, $i=0,1,...,i_1$, такое, что соответствующее решение $x_1(t, i)$, $x_2(t, i)$, $t\in[0, t_1]$, , системы (1) с начальными условиями (2) обладает свойством $x_1(t_1, i_1)=x_1^*$.

Задача. Найти параметрический критерий относительной (t_1, i_1)-управляемости гибридной 2-D системы (1), (2).

2. Определяющие уравнения. По аналогии с развитой для динамических систем с последействием техникой определяющих уравнений [8] наряду с гибридной непрерывно-дискретной 2-D системой (1) рассмотрим дискретную 2-D систему вида

$$X^1_{k+1,i}=A_{11}X^1_{k,i}+A_{12}X^2_{k,i}+B_1U_{k,i}, \tag{3a}$$

$$X^2_{k,i+1}=A_{21}X^1_{k,i}+A_{22}X^2_{k,i}+B_2U_{k,i} \tag{3b}$$

с начальными условиями

[1] Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

$$X^1_{0,i} = 0 \text{ для } i = 0, 1, \dots \tag{4a}$$

$$X^2_{k,0} = 0 \text{ для } k = 0, 1, \dots \tag{4b}$$

$$U_{k,i} = \begin{cases} I_m, & k = i = 0 \\ 0, & k^2 + i^2 \neq 0 \end{cases} \tag{4c}$$

3. Алгебраические свойства решений определяющих уравнений. Имеют место следующие утверждения.

Лемма. Имеют место следующие тождества:

$$(A_{11} + A_{12}w(I_{n_2} - A_{22}w)^{-1}A_{21})^{k-1}(B_1 +$$
$$+ A_{12}w(I_{n_2} - A_{22}w)^{-1}B_2) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} X^1_{k,j} w^j,$$

$$(I_{n_2} - A_{22}w)^{-1}A_{21}w(A_{11} + A_{12}w(I_{n_2} - A_{22}w)^{-1}A_{21})^{k-1} \times$$
$$\times (B_1 + A_{12}w(I_{n_2} - A_{22}w)^{-1}B_2) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} X^2_{k,j} w^j,$$
$$k = 1, 2, \dots;$$

$$(A_{22} + A_{21}w(I_{n_1} - A_{11}w)^{-1}A_{12})^{j-1}(B_2 +$$
$$+ A_{21}w(I_{n_1} - A_{11}w)^{-1}B_1) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} X^2_{k,j} w^k,$$

$$(I_{n_1} - A_{11}w)^{-1}A_{12}w(A_{22} + A_{21}w(I_{n_1} - A_{11}w)^{-1}A_{12})^{j-1} \times$$
$$\times (B_2 + A_{21}w(I_{n_1} - A_{11}w)^{-1}B_1) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} X^1_{k,j} w^k,$$
$$j = 1, 2, \dots;$$

$$(I_{n_2} - A_{22}w)^{-1}B_2 w \equiv \sum_{j=0}^{\infty} X^2_{0,j} w^j,$$

$$(I_{n_1} - A_{11}w)^{-1}B_1 w \equiv \sum_{k=0}^{\infty} X^1_{k,0} w^k,$$

где $|w| < w_1$, $w \in C$, C – множество комплексных чисел; w_1 – достаточно малое положительное число.

Доказательство методом математической индукции.

4. Представление решений. Используя преобразование Лапласа по непрерывной переменной t, z-преобразование (дискретное преобразование Лапласа) по переменной i, с учетом алгебраических свойств решений определяющих уравнений можно показать, что решение системы (1) имеет следующее разложение в ряд по решениям ее определяющих уравнений:

$$x_1(t, i) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^1_{k,j} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} u(\tau, i-j)\, d\tau +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^{11}_{k,j} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} x_1(0,\ i-j) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} X^{12}_{k,i+1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} x_2(\tau, 0)\, d\tau, \tag{5a}$$

$$x_2(t, i) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} X^2_{k,j} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} u(\tau, i-j)\, d\tau +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} X^{21}_{k,j} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} x_1(0,\ i-j) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i} X^2_{0,j} u(t,\ i-j) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} X^{22}_{k,i+1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} x_2(\tau, 0)\, d\tau + X^{22}_{0,i+1} x_2(t, 0). \tag{5b}$$

Доказательство. Действительно, подставим выражения (5) для $x_1(t, i)$, $x_2(t, i)$ в (1). Имеем:

1) для $x_1(t, i)$:

$$\dot{x}_1(t, i) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^1_{kj} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-2}}{(k-2)!} u(\tau, i-j)\, d\tau +$$
$$+ \sum_{j=0}^{i} X^1_{1j} u(t, i-j) + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^{11}_{kj} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} x_1(0, i-j) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} X^{12}_{k\,i+1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-2}}{(k-2)!} x_2(\tau, 0)\, d\tau + X^{12}_{1\,i+1} x_2(t, 0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^1_{k+1\,j} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} u(\tau, i-j)\, d\tau +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^{11}_{k+1\,j} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} x_1(0, i-j) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} X^{12}_{k+1\,i+1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} x_2(\tau, 0)\, d\tau + \sum_{j=0}^{i} X^1_{1j} u(t, i-j) +$$
$$+ X^{12}_{1i+1} x_2(t, 0) = A_{11} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^1_{kj} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} u(\tau, i-j)\, d\tau +$$
$$+ A_{12} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^2_{kj} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} u(\tau, i-j)\, d\tau +$$
$$+ A_{11} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^{11}_{kj} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} x_1(0, i-j) +$$
$$+ A_{12} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} X^{21}_{kj} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} x_1(0, i-j) +$$
$$+ A_{11} \sum_{k=1}^{\infty} X^{12}_{k\,i+1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} x_2(\tau, 0)\, d\tau +$$
$$+ A_{12} \sum_{k=1}^{\infty} X^{22}_{k\,i+1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} x_2(\tau, 0)\, d\tau +$$
$$+ B_1 u(t, i) + A_{12} \sum_{j=1}^{i} X^2_{0j} u(t, i-j) + A_{12} X^{22}_{0\,i+1} x_2(t, 0) =$$
$$= A_{11} x_1(t, i) + A_{12} x_2(t, i) + B_1 u(t, \tau);$$

2) для $x_2(t, i)$:

$$x_2(t,i+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i+1}X_{kj}^{2}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}u(\tau,i+1-j)d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{i+1}X_{0j}^{2}u(t,i+1-j)+X_{0\,i+1+1}^{22}x_2(t,0)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}X_{k\,i+1+1}^{22}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}x_2(\tau,0)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i+1}X_{kj}^{21}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_1(0,i+1-j)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}X_{k\,j+1}^{2}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}u(\tau,i-j)d\tau+$$

$$+\sum_{j=0}^{i}X_{0\,j+1}^{2}u(t,i-j)+\sum_{k=2}^{\infty}X_{k\,i+1+1}^{22}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}x_2(\tau,0)dt+$$

$$+X_{0\,i+1+1}^{22}x_2(t,0)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}X_{k\,j+1}^{21}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_1(0,i-j)=$$

$$=A_{21}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}X_{kj}^{1}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}u(\tau,i-j)d\tau+$$

$$+A_{22}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}X_{kj}^{2}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}u(\tau,i-j)d\tau+$$

$$+A_{21}\sum_{k=1}^{\infty}X_{k\,i+1}^{12}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}x_2(\tau,0)d\tau+$$

$$+A_{22}\sum_{k=1}^{\infty}X_{k\,i+1}^{22}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}x_2(\tau,0)d\tau+$$

$$+A_{21}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}X_{kj}^{11}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_1(0,i-j)+$$

$$+A_{22}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}X_{kj}^{21}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_1(0,i-j)+$$

$$+A_{22}\sum_{j=1}^{i}X_{0j}^{2}u(t,i-j)+B_2u(t,i)+A_{22}X_{0\,i+1}^{22}x_2(t,0)=$$

$$=A_{21}x_1(t,i)+A_{22}x_2(t,i)+B_2u(t,i).$$

5. Относительная управляемость. Из определения относительной управляемости и представлений решений системы (1) в форме (5) вытекает, что система (1) (t_1, i_1)-управляема относительно x_1 тогда и только тогда, когда система

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i_1}X_{k,j}^{1}\int_0^{t_1}\frac{(t_1-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}u(\tau,i-j)d\tau=p^*$$

разрешима для любых $p^*\in R^{n_1}$ относительно управления $u(t, i)$, $t\in[0, t_1]$, $i=0,1,...,i_1$, откуда в силу линейной независимости функций $\frac{(t_1-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}$, $k=1,2,...,$ на основании известной из функционального анализа L-проблемы моментов получаем следующий параметрический критерий управляемости системы (1):

$$\operatorname{rank}\left[\,X_{k,j}^{1},\ k=1,2,...;\ i=0,1,...,i_1\,\right]=n. \quad (6)$$

Используя алгебраические свойства решений определяющего уравнения, можно показать, что среди них существует конечное число образующих (обобщение теоремы Гамильтона – Кэли), что допускает уточнение критерия (6).

Теорема. Система (1) (t_1, i_1)-управляема относительно x_1 тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left[\,X_{k,j}^{1},\ k=1,2,...,n_1;\ i=0,1,...,i_1\,\right]=n.$$

Заключение. В работе рассмотрена (t_1, i_1)-управляемость гибридной 2-D системы относительно x_1. Предложенная методика исследования позволяет применить полученные результаты на случай управляемости этой системы относительно x_2, а также относительно x_1, x_2, однако это предмет другой статьи.

Литература

1. März, R, Solvability o f lin ear d ifferential algebraic equations with pr operly s tated l eading terms / R. März // Results in Mathematics 45(2004) – Basel: Birkhauser Verlag. – 2004. – P. 88–95.
2. De l a S en, M . The r eachability a nd observability o f hy brid m ultirate sampling line ar systems / M. De la Sen // Computers Math. Applic. – 1996. – Vol. 31, № 1. – P. 109–122.
3. Van der Schaft, A. An introduction to hybrid dynamical systems / A. Van der Schaft, H. Schumacher. – Berlin: Springer, 2000. – 324 p.
4. Кириллова, Ф. М. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах / Ф. М. Кириллова, С. В. Стрельцов // Управляемые системы: сб. тр. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. – Вып. 14. – С. 24–33.
5. Ахундов, А. А. Управляемость линейных гибридных систем / А. А. Ахундов // Управляемые системы: сб. ст. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. – Вып. 14. – С. 4–10.
6. Щеглова, А. А. Наблюдаемость вырожденных линейных гибридных систем с постоянными коэффициентами / А. А. Щеглова // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 86–101.
7. Marchenko, V . M. On the observability of linear d ifferential-algebraic s ystems with delays / V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczkiewicz // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, № 8. – P. 1387–1392.
8. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.