УДК 004.4

А.В. Харланович, магистрант; О.А. Новосельская, доц.
(БГТУ, г. Минск)

# ФРАКТАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В 3D-ГРАФИКЕ

Фракталы известны уже почти век, хорошо изучены и имеют многочисленные приложения в жизни. В основе этого явления лежит очень простая идея: бесконечное по красоте и разнообразию множество фигур можно получить из относительно простых конструкций при помощи всего двух операций – копирования и масштабирования.

У этого понятия нет строгого определения. Поэтому слово «фрактал» не является математическим термином. Обычно так называют геометрическую фигуру, которая удовлетворяет одному или нескольким из следующих свойств: обладает сложной структурой при любом увеличении; является (приближённо) самоподобной; обладает дробной хаусдорфовой размерностью, которая больше топологической; может быть построена рекурсивными процедурами [1].

Фрактальная графика, также как векторная и трёхмерная, является вычисляемой. Её главное отличие в том, что изображение строится по уравнению или системе уравнений. Поэтому в памяти компьютера для выполнения всех вычислений, ничего кроме формулы хранить не требуется.

Только изменив коэффициенты уравнения, можно получить совершенно другое изображение [2]. Эта идея нашла использование в компьютерной графике. Так, с помощью нескольких математических коэффициентов можно задать линии и поверхности очень сложной формы (рисунок 1).

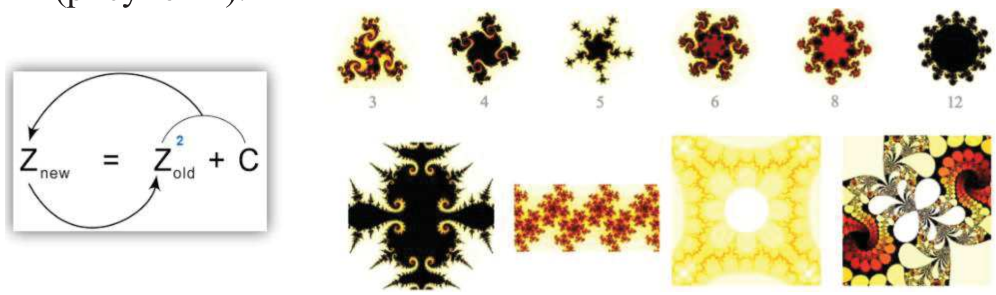


**Рисунок 1 – Формула Жулиа-Мандельброта и ее применение**

Для того чтобы представить все многообразие фракталов удобно прибегнуть к их общепринятой классификации. Существуют:

- геометрические (конструктивные) фракталы;
- динамические (алгебраические);
- стохастические.

1. Геометрические (конструктивные) фракталы. Фракталы этого типа строятся поэтапно. Сначала изображается основа. Затем некоторые части основы заменяются на фрагмент. На каждом следующем этапе части уже построенной фигуры, аналогичные замененным частям основы, вновь заменяются на фрагмент, взятый в подходящем масштабе. Всякий раз масштаб уменьшается. Когда изменения становятся визуально незаметными, считают, что построенная фигура хорошо приближает фрактал и дает представление о его форме. Для получения самого фрактала нужно бесконечное число этапов. Меняя основу и фрагмент, можно получить много разных геометрических фракталов.

Геометрические фракталы хороши тем, что, с одной стороны, являются предметом достаточного серьезного научного изучения, а с другой стороны, их можно «увидеть» – даже человек, далекий от математики, найдет в них что-то для себя. В машинной графике использование геометрических фракталов необходимо при получении изображений деревьев, кустов, береговой линии. Двухмерные геометрические фракталы используются для создания объемных текстур (рисунка на поверхности объекта).

Примеры геометрических фракталов: Снежинка Коха; Т-квадрат; Н-фрактал; Треугольник Серпинского; Дерево Пифагора; Кривая Леви; Дракон (рисунок 2).

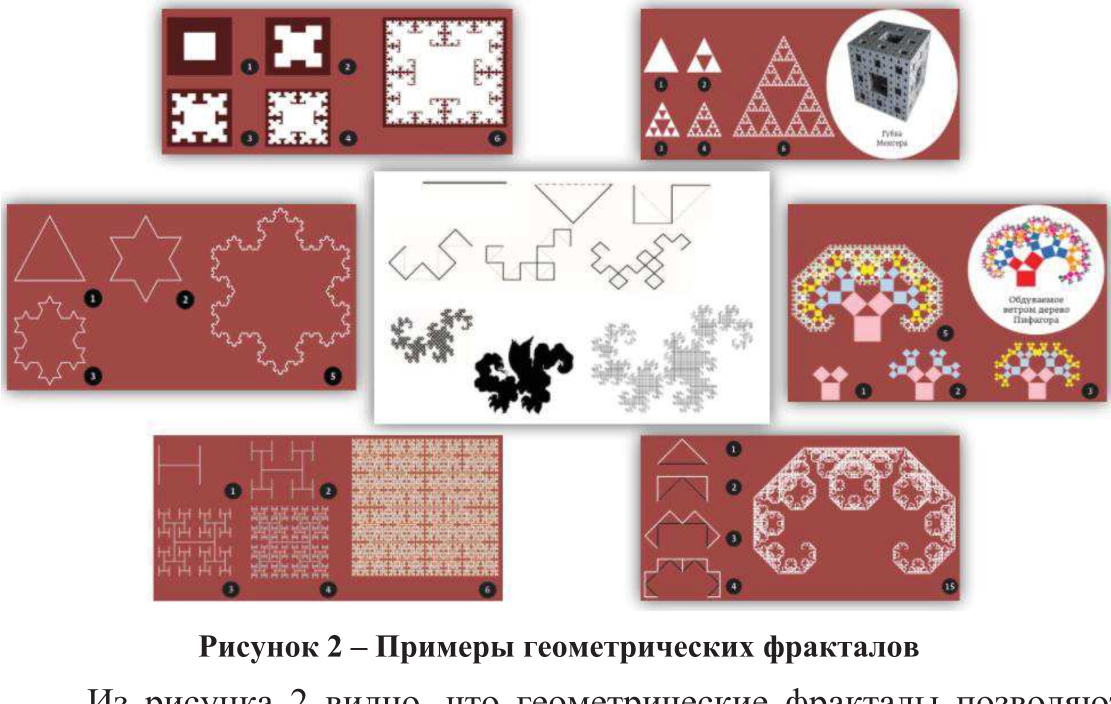

**Рисунок 2 – Примеры геометрических фракталов**

Из рисунка 2 видно, что геометрические фракталы позволяют подразбивать поверхность не только на плоскости, но и в пространстве. Соответственно их можно применить в 3D-графике как для сплайнового, так и для полигонального моделирования.

2. Алгебраические (динамические) фракталы. Фракталы этого типа возникают при исследовании нелинейных динамических систем (отсюда и название). Рассмотрим бесконечную последовательность чисел на комплексной плоскости, каждое следующее из которых получается из предыдущего: $z_0$; $z_1 = f(z_0)$; $z_2 = f(z_1)$, ... $z_{n+1} = f(z_n)$. В зависимости от начальной точки $z_0$ такая последовательность может вести себя по-разному: стремиться к бесконечности; сходиться к какой-то конечной точке; циклически принимать ряд фиксированных значений; возможны и более сложные варианты.

Примеры алгебраических фракталов (рисунок 3): Множество Мандельброта; Множества Жюлиа; Фрактал Галлея; Фрактал Ньютона [3].

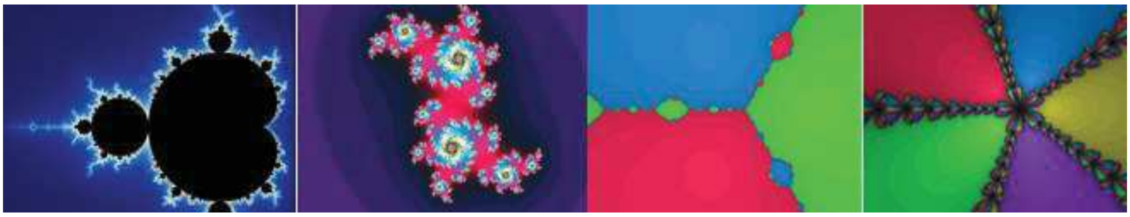

**Рисунок 3 – Примеры алгебраических фракталов**

3. Стохастические фракталы. Еще одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные – несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т. д.

Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря. Примеры стохастических фракталов: траектория броуновского движения на плоскости и в пространстве; граница траектории броуновского движения на плоскости; эволюции Шрамма-Лёвнера – конформно-инвариантные фрактальные кривые, возникающие в критических двумерных моделях статистической механики, например, в модели Изинга и перколяции; различные виды рандомизированных фракталов, то есть фракталов, полученных с помощью рекурсивной процедуры, в которую на каждом шаге введён случайный параметр. Плазма – пример использования такого фрактала в компьютерной графике.

Существуют и другие классификации фракталов, например, деление фракталов на детерминированные (алгебраические и геометрические) и недетерминированные (стохастические).

Фрактальная графика нашла применение в направлении искусства – фрактальной живописи. Построение изображения сводится к формированию базового элемента и логики его трансформирования. Например, в Photoshop можно реализовать скрипт, строящий структуру наподобие дерева и его веток. В зависимости от количества итераций дерево будет иметь более сложную или менее сложную форму со свойством самоподобия. Применяя разные кисти к такому скрипту, получаем интересные результаты, представленные на рисунке 4.

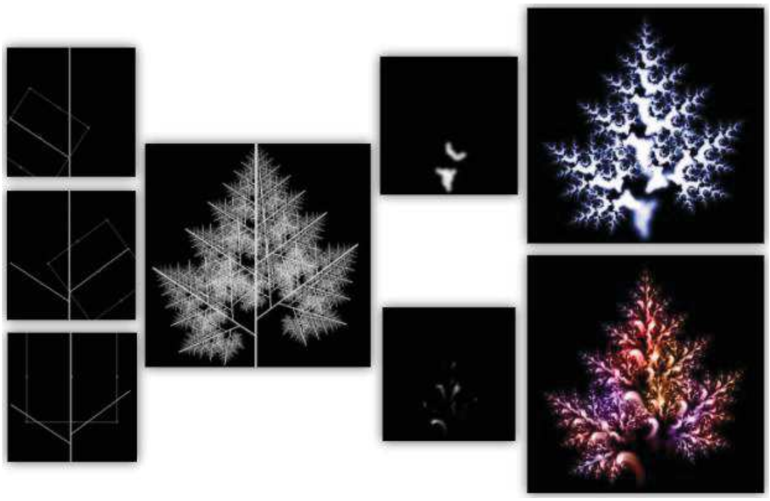

**Рисунок 4 – Пример реализации скрипта в Photoshop**

Когда употребляется термин «фрактал», чаще всего подразумевается плоское двухмерное изображение. Однако фрактальная геометрия выходит за рамки 2D-измерения. В природе можно найти как примеры плоских фрактальных форм, скажем, геометрию молнии, так и трехмерные объемные фигуры. Одна из очень наглядных иллюстраций 3D-фракталов в повседневной жизни – кочан капусты сорта Романеско. Причем его форму можно реализовать геометрическими фракталами.

Таким образом можно создать фантастические растения и объекты макромира или предмет интерьера, архитектуры, ювелирные украшения или просто загадочную картину, особенно если дорисовать в неё живность.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Фракталы и хаос, Множество Мандельброта и другие чудеса. Мандельброт Б.Б., 2009.
2. Фрактальная геометрия природы. Мандельброт Б.Б., 2002.
3. Фрактальные узоры. Пол Ди Филиппо, 2007.