УДК 517.15; 517.584

Л.Д. Яроцкая, канд. физ.-мат. наук, доц. (БГТУ, г. Минск)

# АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С АППРОКСИМАЦИЕЙ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Модифицированная функция Бесселя

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{1}$$

и функция Макдональда

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right] \tag{2}$$

являются линейно независимыми решениями $u(z)$ дифференциального уравнения Бесселя [1]

$$u''+\frac{1}{z}u'-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0,$$

где $z$ – комплексная переменная, $\nu$ – параметр (индекс), который может принимать любые вещественные или комплексные значения.

Проблема асимптотических разложений специальных функций по параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов и преобразований по индексу. Установлено [2], что в силу универсальной структуры ядер, относящихся к функциям гипергеометрического типа, все известные в литературе преобразования по индексу композиционно связаны с преобразованием Конторовича – Лебедева, порожденным разложением вида

$$x\,f(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)K_{i\tau}(x)\,d\tau\int_0^\infty K_{i\tau}(y)f(y)\,dy,\quad x>0, \tag{3}$$

или его модификацией с функцией (1)

$$f(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t\,K_t(x)\,dt\int_0^\infty I_t(y)f(y)\frac{dy}{y}.$$

Отметим, что на функцию $f(x)$ накладывают условия, обеспечивающие сходимость соответствующих интегралов [2]. При этом учитывают асимптотические свойства специальной функции ядра.

Функция Макдональда (2) обладает простыми асимптотическими представлениями, удобными для ее аппроксимации при больших по модулю значений $z$ и фиксированных значениях индекса $\nu$ [1]. Асимптотические разложения функции Макдональда и других цилиндрических функций при больших по модулю $\nu$ и фиксированных $z$ могут быть получены из их представлений в виде гипергеометрических рядов, если воспользоваться формулой Стирлинга для гамма-функции Эйлера. В частности [3, 4], с помощью асимптотической формулы для гамма-функции на прямых, параллельных мнимой оси,

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi}\tau^{\alpha-1/2}e^{-\pi\tau/2}\exp\left[\pm\left\{\frac{\pi}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\tau\ln\tau-\tau\right\}-O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]$$

при $\tau \to +\infty$ получены следующие представления для функций (1) и (2) мнимого параметра:

$$K_{i\tau}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}}e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\tau\ln 2\tau-\tau-\tau\ln x+\frac{x^2}{4\tau}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),$$

$$I_{\pm i\tau}(x) = \frac{e^{\pi\tau/2}}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left[\mp i\left\{\frac{\pi}{4}+\tau\ln 2\tau-\tau-\tau\ln x+\frac{x^2}{4\tau}\right\}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right].$$

Исследуем поведение при $\tau \to +\infty$ интеграла

$$I(\tau) = \int_0^\infty \exp\left[i\left(\tau\ln x-\frac{x^2}{4\tau}\right)\right]dx = \sqrt{2}\tau\, e^{i\tau\ln\sqrt{2}\tau}\int_0^\infty \exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]dt,$$

где $x = \sqrt{2}\tau t$.

Асимптотика интеграла Фурье

$$\Phi(\tau) = \int_0^\infty \exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]dt \tag{4}$$

существенно зависит от дифференциальных свойств функции $S(t) = \ln t - t^2/2$ на всей области интегрирования. $S(t)$ имеет единственную стационарную точку $t_0 = 1$, причем $S(1) = -1/2$ и $S''(1) = -2$. При достаточно больших значения параметра τ интеграл (4) будет мал за счет быстрой осцилляции экспоненты. Интегрируя (4) по частям на промежутках, не содержащих стационарную точку $t_0 = 1$, можно убедиться, что $\Phi(\tau) = O(1/\tau)$ при $\tau \to +\infty$.

Однако осцилляция подынтегральной функции в (4) вблизи стационарной точки замедляется. Согласно методу стационарной фазы [5] при достаточно больших τ интеграл (4) приближенно равен интегралу по малой окрестности точки $t_0 = 1$. Суть метода заключается в следующем: на малом отрезке $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, заменим

$$S(t) \approx S(t_0) + \frac{1}{2}S''(t_0)(t-t_0)^2 = -\frac{1}{2}-(t-1)^2,$$

тогда

$$\Phi(\tau) \approx e^{-i\tau/2} \int\limits_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \exp\left[-i\tau\left(t-1\right)^2\right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-i\tau/2} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{2\tau}}^{\varepsilon\sqrt{2\tau}} e^{-iy^2/2} dy,$$

где $y = \sqrt{2\tau}\left(t-1\right)$. При $\tau \to +\infty$ последний интеграл стремится к интегралу Френеля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4},$$

и окончательно получим

$$I(\tau) \approx \sqrt{2\pi\tau} \exp\left\{i\left(\tau \ln\sqrt{2}\tau - \frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Полученная формула может быть использована при исследовании интегралов Конторовича – Лебедева для функций, порожденных разложением (3).

ЛИТЕРАТУРА


1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.
2. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publ., 1996. 252 p.
3. Yakubovich S.B., Saigo M., Gusarevich L.D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices // Fukuoka Univ. Sci. Reports. – 1995. – Vol. 25, № 1. – P. 23–32.
4. Яроцкая Л.Д. Асимптотические представления по индексу функций бесселевого типа // Труды БГТУ. 2004. Серия VI: Физ.-мат. науки и информатика. Вып. XII. – Минск, 2004. − С. 18−21.
5. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.


УДК 004.43

М. Ф. Кудлацкая, ст. преп., канд. техн. наук (БГТУ, г. Минск)

## JAVASCRIPT: ТРЕНДЫ 2021

Выбор инструментов для веб-разработки зависит от задачи, которую необходимо решить программисту. Каждый год появляются веб-технологии с новыми возможностями, часть из которых позволяют заменить предыдущие. Ряд технологий устаревают и становятся невостребованными разработчиками, другие – набирают популярность.