тотически-несмещенными, эффективными, асимптотически-нормальными и ассимптотически-эффективными оценками [5]. При условии эффективности оценок система (6)-(8) имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stacy E.W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics, 1962, vol. 33, pp. 1187-1192.

2. Королев В.Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров / В. Ю. Королев, В.А. Крылов, В.Ю. Кузьмин В.Ю. // Информатика и её применения. 2011. т. 5 вып. 1. С. 31-38.

3. Волк, А.М. Статистическая оценка параметров обобщенного гамма-распределения. Труды БГТУ. – 2016. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 10–13.

4. Крамер Г. Математические методы статистики: Основы моделирования и первичная обработка данных. М. : Мир, 1975. 648 с.

5. Харин Ю.С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика: учебник / Ю.С. Харин, Н.М. Зуев, Е.Е. Жук. Минск : БГУ, 2011. 464 с.

УДК 517.977

А. А. Якименко, доц., канд. физ.-мат. наук

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В СЛАБОЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. В статье производится обобщение результатов, полученных в [1], на одну трехмерную систему нейтрального типа в слабоциклическом случае.

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t > 0, \qquad (1)$$

где $A_i,\ i = 0, 1, 2$ – постоянные 3×3-матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой 3-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 0, 1]$ («$'$»означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00}x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij}x^{(i)}(t - jh) + + \int_{-h}^{0} g'(s)x(t+s)\,ds, \tag{2}$$

где q_{00}, q_{ij} –3-векторы; $g(s)$, $s \in [-h,\ 0]$ – непрерывная 3-вектор-функция; $x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \dfrac{d^i}{dt^i}x(t)$, $x^{(0)}(t) \equiv x(t)$.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3\right] \equiv \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\tilde{\alpha}_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \tag{3}$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц $A_i,\ i = 0, 1, 2,$ в частности $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0,\ \tilde{\alpha}_{30} = 1,\ \tilde{\alpha}_{33} = \det A_2.$

Определение 1. Система (1) будет модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперёд заданных чисел $\alpha_{ij},\ i = 0, 1, 2, 3,\ j = 0, 1, 2, 3,\ \alpha_{30} = 1,$ найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda)\right] \equiv \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0,$$

где $U(\lambda)$ – регулятор (2) в частотной области.

Рассмотрим еще одно определение модальной управляемости

Определение 2. Система (1) будет модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел $\alpha_{ij},\ i = 0, 1, 2,\ j = 0, 1, 2,\ \alpha_{20} = 1,\ \ \alpha_{3j},\ j = 0, 1, 2,$ найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda)\right] \equiv \left(\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}\right)\times$$
$$\times\left(\alpha_{30} + \alpha_{31}e^{-j\lambda h} + \alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h} + \lambda\right) = 0.$$

Можно показать, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Введем (3×3)-матрицы:

$$\mathsf{A}(\lambda) = A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h},\ W(\lambda) = \left[\mathsf{A}^2(\lambda)b,\ \mathsf{A}(\lambda)b,\ b\right],\ \lambda \in \square.$$

Рассмотрим слабо циклический случай:

$\det W(\lambda)=c\left(\gamma_0+e^{-\lambda h}\right), (c\neq 0).$

Пусть матрица $\mathsf{A}(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\mathsf{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} \beta_0+\beta_1 e^{-\lambda h}+\beta_2\lambda e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0+e^{-\lambda h}\right) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix},$$

здесь $\beta_i,\ i=0, 1, 2,\ c, \gamma_0$ – некоторые действительные числа; $a_{ij}(\lambda),\ i=1, 2, 3,\ j=1, 2, 3$ – квазиполиномы:

$$a_{ij}(\lambda)=a_{ij0}+a_{ij1}e^{-\lambda h}+a_{ij2}\lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ijk}\in\square$; $k=0, 1, 2.$

Возможны два случая:

i) $\beta_2\gamma_0+1=0,$

ii) $\beta_2\gamma_0+1\neq 0.$

Теорема 1. В случае i) система (1) модально управляема регулятором вида (2) тогда и только тогда, когда $\beta_0-\beta_1\gamma_0\neq 0.$

Рассмотрим случай ii). Введем обозначения:

$$\xi=\frac{\beta_0-\beta_1\gamma_0}{1+\beta_2\gamma_0},$$

$$\delta_1=\gamma_0+e^{-\xi h}.$$

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) в случае ii) была модально управляема регулятором вида (2), необходимо и достаточно выполнения условия $\delta_1\neq 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.