$$W_4' + \left[(M_1^{-1}) \frac{B}{\varepsilon} M_2{}^{*} \right] W_4 + M_1^{-1} M_1' W_4 = W_3 H^* + W_4 I^* ,$$

$$W_4(\beta) = V_4^*$$

Остается только найти вектор $s(x)$. Его легко получить, решив дифференциальное уравнение:

$$s'(x) = H(x)r + I(x)s - W_2^* M_2 \frac{f}{\varepsilon}, \quad s(\beta) = \mu .$$

Окончательно искомое решение находим по формулам:

$$M_1(x,\varepsilon) y(x) = W_1(x) r(x) + W_2(x) s(x) ,$$

$$M_2(x,\varepsilon) y'(x) = W_3(x) r(x) + W_4(x) s(x) .$$

Следует отметить, что матрицы $W_i(x),\ i = \overline{1,4}$ и вектор-функции $r(x),\ s(x)$, входящие в полученные задачи Коши, являются благоприятными в вычислительном отношении. Для их решения существует много хорошо работающих известных методик. Регулирующие множители $M_1(x,\varepsilon)$ и $M_2(x,\varepsilon)$, составляющие единые блоки с решением системы и его градиентом, вычисляются точно.

УДК 517.956.32

Е. В. Устилко, ассист. (БГТУ, г. Минск)

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ

На множестве $\dot{G}_\infty = (0,\infty) \times (0,\infty)$ ставится смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in (0,\infty), \tag{2}$$

$$\left[\alpha(t)(u_t(x,t) + a u_x(x,t)) + \gamma(t) u(x,t)\right]\Big|_{x=0} = \mu(t),\ t \in (0,\infty), \tag{3}$$

где $a > 0$. Требуется найти единственное устойчивое решение $u \in C^2(G_\infty)$, $G_\infty = [0,\infty) \times [0,\infty),$ а также условия, налагаемые на исходные данные характеристической смешанной задачи (1)–(3) [1].

Теорема 1. Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты $\alpha, \gamma \in C^2(R_+),$ $\gamma(t) \neq 0,\ \ t \in R_+ = [0,\infty)$. Для того чтобы смешанная задача (1)–(3) в $\dot{G}_\infty$ имела единственное и устойчивое по φ, ψ, μ, f решение из $C^2(G_\infty),$ необходимо и достаточно выполнения условий гладкости

$$f \in C(G_\infty),\ \varphi \in C^2(R_+),\ \psi \in C^1(R_+),$$

$$H_1(x,t)=\int_0^t f\left(x+a(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1\left(G_\infty\right),$$

$$H_2(x,t)=2a\int_0^{(x/a)-t} f\left(2a(x-at)-a\tau,\tau\right)d\tau++\int_{(x/a)-t}^{t} f(x-a(t-\tau),\tau)\mathrm{d}\tau\in C^1\left(G_-\right),$$

$$H_3(x,t)=-\int_0^{t-(x/a)} f\left(at-x-\tau,\tau\right)d\tau+\int_{t-(x/a)}^{t} f\left(x-a(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1\left(G_+\right),$$

частные производные до первого от H2 и H_3 непрерывны на $x=a_1t$;

$$\mu\in C^2(R_+),\ \ \alpha(t)\varphi'''(at),\quad \alpha(t)\psi''(at),$$

$$\alpha(t)\left[\partial^2\left(\int_0^t f\left(a(t-\tau),\tau\right)d\tau\right)\Big/\partial t^2\right]\in C(R_+),$$

и условий согласования

$$J_1\equiv\alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\varphi'(0)+\gamma(0)\varphi(0)=\mu(0),$$

$$J_2\equiv\alpha(0)\left[a^2\varphi''(0)+f(0,0)\right]+$$

$$+\psi(0)\left[\alpha'(0)+\gamma(0)\right]+\beta'(0)\varphi'(0)+\beta(0)\psi'(0)+\varphi(0)\gamma'(0)=\mu'(0),$$

$$J_3\equiv\alpha''(0)\psi(0)+2\alpha'(0)\left[a^2\varphi''(0)+f(0,0)\right]+$$

$$+\alpha(0)\left\{a_1a_2\psi''(0)-(a_1-a_2)a^2\varphi'''(0)\right\}+\beta''(0)\varphi'(0)+$$

$$+2\beta'(0)\psi'(0)+\gamma''(0)\varphi(0)+2\gamma'(0)\psi(0)+\beta(0)a^2\varphi'''(0)+$$

$$+\gamma(0)\left[a^2\varphi''(0)+f(0,0)\right]+\alpha(0)\left(1/\sqrt{1+a^2}\right)\partial(f(x,y))/\partial\vec{v})(0,0)=\mu''(0).$$

где $(\partial(\square)/\partial\vec{v})(0,0)$ – значение производной по направлению вектора $\vec{v}=\{a,1\}$. Формулы решения для более общего уравнения колебания струны приведены в статье [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.
2. Ломовцев Ф.Е., Устилко Е.В. Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта. 2018. № 4 (101). С. 18–28.