УДК 519.626.2

И.Ф. Соловьева (БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ О.Д.У. ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Уже 117 лет прошло с открытия теории пограничного слоя, однако она продолжает оставаться актуальной и в наши дни. Роль пограничного слоя переоценить невозможно. Он является ответственным за правильное функционирование организма, за кровообращение, дыхание, за отсутствие в организме болезней. Большой круг задач, с которыми сталкиваются инженеры, физики и специалисты по прикладной механике, описываются математическими моделями, в основе которых лежат обыкновенные дифференциальные уравнения с пограничными слоями.

Одной из главных причин решения таких задач заключается в том, что очень маленький параметр ε часто оказывается стоящим возле самых больших производных.

Рассмотрим систему линейных о. д. у. второго порядка с малым параметром при старшей производной с одним пограничным слоем

$$Ly(x) \equiv -\varepsilon y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = f(x), \quad \alpha \le x \le \beta, \quad \varepsilon > 0 \tag{1}$$

с присоединенным к ней двухточечным граничным условием

$$\begin{aligned} A_1\, y'(\alpha) + A_2\, y(\alpha) = a, \\ B_1\, y'(\beta) + B_2\, y(\beta) = b, \end{aligned} \tag{2}$$

где $A(x), B(x)$ –произвольные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, элементы которых кусочно-непрерывные функции, зависящие от x, $f:[\alpha,\beta] \to C^n$, A_1, A_2, B_1, B_2 – известные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, причем такие, что прямоугольные матрицы (A_1, A_2) и (B_1, B_2) имеют ранги: $rang[A_1, A_2] = n$, $rang[B_1, B_2] = n$, $\varepsilon > 0$ – фиксированный малый параметр при старшей производной. Требуется определить $y:[\alpha,\beta] \to C^n$ так, чтобы выполнялись заданные условия (1) - (2).

Представим вычислительную схему решения данной системы.

1. Вводим регулирующие множители $M_1(x,\varepsilon)$ и $M_2(x,\varepsilon)$, и в дальнейшем рассматриваем вместо $y(x)$ и $y'(x)$ преобразованные вектор-функции $M_1(x,\varepsilon)y(x)$ и $M_2(x,\varepsilon)y'(x)$.

2. Вводим вспомогательные вектор-функции $r(x), s(x)$, определенные на $[\alpha,\beta]$, и матрицы $W_i(x)$, $i = \overline{1,4}$ по правилу:

$$r(x) = W_1^*(x)\left[M_2(x,\varepsilon)y'(x)\right] + W_3^*\left[M_1(x,\varepsilon)y(x)\right], \tag{3}$$

$$s(x) = W_2^*(x)\left[M_2(x,\varepsilon)y'(x)\right] + W_4^*\left[M_1(x,\varepsilon)y(x)\right]. \tag{4}$$

В формулах (3), (4) «звездочкой» помечен переход к транспонированной и комплексно-сопряженной матрице. Ограничения на матрицы $W_i(x), i=\overline{1,4}$ определяем таким образом, чтобы квадратная матрица

$$W(x)=\begin{bmatrix} W_1(x) & W_2(x) \\ W_3(x) & W_4(x) \end{bmatrix}$$

для $\forall x \in [\alpha,\beta]$ обладала свойством унитарности.

3. Для получения граничных условий применяем линейные преобразования для того, чтобы преобразованные векторы вместе с n векторами составили ортонормированную систему $2n$ векторов. При этом используем процесс ортонормирования по Шмидту. Получим первое граничное условие (2) по формулам:

$$W_1(\alpha)=V_1^*,$$
$$W_3(\alpha)=V_2^*.$$

Определив значения матриц $W_1(\alpha)$, $W_3(\alpha)$, получим значение вектора $r(\alpha)=\gamma$. Итак, начальные значения для матриц $W_1(x)$, $W_3(x)$ и вектора $r(x)$ найдены.

4. В прямом ходе метода прогонки находим эти матрицы и вектор $r(x)$, как решения задач Коши

$$W_1'+\left[\frac{A}{\varepsilon}+(M_2^{-1})M_2'\right]W_1+M_2^{-1}M_1W_3=W_1G^*,$$
$$W_1(\alpha)=V_1^*.$$
$$W_3'+\left[(M_2^{-1})\frac{B}{\varepsilon}M_2^*\right]W_1+M_1^{-1}M_1'W_3=W_3G^*,$$
$$W_3(\alpha)=V_2^*.$$

Вектор $r(x)$ найдем, как решение задачи Коши для уравнения

$$r'(x)=Gr-W_1^*M_2\frac{f}{\varepsilon},$$
$$r(\alpha)=\gamma.$$

Здесь матрица G уже найдена. Это позволяет осуществить перенос граничного условия из точки α во все остальные точки отрезка $[\alpha,\beta]$, и в конечном итоге получим значение в точке $x=\beta$:

$$W_2(\beta)=V_3^* \text{ и } W_4(\beta)=V_4^*.$$

5. Осуществляем обратный ход метода прогонки.

Решаем задачи Коши:

$$W_2'+\left[\frac{A}{\varepsilon}+(M_2^{-1})M_2'\right]W_2+M_2^{-1}M_1W_4=W_1H^*+W_2I^*,$$
$$W_2(\beta)=V_3^*.$$

$$W_4' + \left[(M_1^{-1}) \frac{B}{\varepsilon} M_2^{\,*} \right] W_4 + M_1^{-1} M_1' W_4 = W_3 H^* + W_4 I^*,$$

$$W_4(\beta) = V_4^*$$

Остается только найти вектор $s(x)$. Его легко получить, решив дифференциальное уравнение:

$$s'(x) = H(x)r + I(x)s - W_2^* M_2 \frac{f}{\varepsilon}, \quad s(\beta) = \mu .$$

Окончательно искомое решение находим по формулам:

$$M_1(x,\varepsilon) y(x) = W_1(x) r(x) + W_2(x) s(x),$$

$$M_2(x,\varepsilon) y'(x) = W_3(x) r(x) + W_4(x) s(x).$$

Следует отметить, что матрицы $W_i(x),\ i = \overline{1,4}$ и вектор-функции $r(x),\ s(x)$, входящие в полученные задачи Коши, являются благоприятными в вычислительном отношении. Для их решения существует много хорошо работающих известных методик. Регулирующие множители $M_1(x,\varepsilon)$ и $M_2(x,\varepsilon)$, составляющие единые блоки с решением системы и его градиентом, вычисляются точно.

УДК 517.956.32

Е. В. Устилко, ассист. (БГТУ, г. Минск)

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ

На множестве $\dot{G}_\infty = (0,\infty) \times (0,\infty)$ ставится смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in (0,\infty), \tag{2}$$

$$\left[\alpha(t)(u_t(x,t) + a u_x(x,t)) + \gamma(t) u(x,t) \right]\Big|_{x=0} = \mu(t),\ t \in (0,\infty), \tag{3}$$

где $a > 0$. Требуется найти единственное устойчивое решение $u \in C^2(G_\infty)$, $G_\infty = [0,\infty) \times [0,\infty),$ а также условия, налагаемые на исходные данные характеристической смешанной задачи (1)–(3) [1].

Теорема 1. Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты $\alpha, \gamma \in C^2(R_+)$, $\gamma(t) \neq 0,\ \ t \in R_+ = [0,\infty)$. Для того чтобы смешанная задача (1)–(3) в $\dot{G}_\infty$ имела единственное и устойчивое по φ, ψ, μ, f решение из $C^2(G_\infty)$, необходимо и достаточно выполнения условий гладкости

$$f \in C(G_\infty),\ \varphi \in C^2(R_+),\ \psi \in C^1(R_+),$$