$$\Phi\left(q_{n_i},q_{n_j}\right)=\begin{cases}0, n_i\cdot n_j=0\\ h\left(q_i,q_j\right), n_i\cdot n_j=1\\ h\left(q_i,q_j\right)+h\left(q_i,q'_j\right), n_i\cdot n_j=2\\ h\left(q_i,q_j\right)+h\left(q_i,q'_j\right)+h\left(q'_i,q_j\right)+h\left(q'_i,q'_j\right), n_i\cdot n_j=4\end{cases},$$

где $h\left(q_i,q_j\right)$ – межмолекулярный потенциал взаимодействия двух частиц в положениях q_i и q_j. При $\left(q_i,q'_i\right)\in\omega_i$, $\left(q_j,q'_j\right)\in\omega_j$.

Помимо этого, во всех выражениях суммирование по n = 0,1 необходимо распространить на случай n = 0, 1, 2, дополнительно учтя, что сейчас

$$\int\limits_{\omega_i} dq_{0_i}=\frac{1}{\omega_i}\int\limits_{\omega_i} dq_i,\quad \int\limits_{\omega_i} dq_{1_i}=\int\limits_{\omega_i} dq_i,\quad \int\limits_{\omega_i} dq_{2_i}=\int\limits_{\omega_i} dq_i\int\limits_{\omega_i} dq'_i$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ротт, Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. Метод коррелятивных функций условных распределений / Л. А. Ротт. – М., 1979. -280 с.

2. Бокун Г. С., Ди Каприо Д. Распределения потенциала и концентрации носителей заряда в твердотельном электролите между плоскими электродами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. 2018. № 2

УДК 336.781.5

М.В. Чайковский, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБНОВЛЕНИЯ ПАРКА ОБОРУДОВАНИЯ

Дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных находит широкое применение в исследовании решении прикладных экономических задачах. Не обделена вниманием в экономическом анализе также и матричная алгебра. В частности, модель межотраслевого баланса Леонтьева позволяет объяснить, каким способом производственная система на деле создает продукцию конечного спроса. Модель также хороша тем, что для ее анализа можно использовать аппарат матричного исчисления, который позволяет экономический анализ, после математической формализации модели, свести к анализу получающихся матричных уравнений и сделать соответствующие выводы. В конечном счете, модель опирается на анализ разрешимости неоднородных системе линейных алгебраических уравнений. Однородные же системы (то есть систем с нулевым столбцом свободных членов) в экономическом анализе не столь часто встречаются. С ними связана проблема характеристических (собственных) значений квадратной матрицы *A* коэффициентов системы, которая состоит в отыскании таких чисел λ и соответствующих им векторов (вектор–столбцов) $x \neq 0$, которые удовлетворяют равенству $Ax = \lambda x$, где *A* – квадратная матрица порядка *n.* Характеристические корни и векторы востребованы при решении конечно–разностных уравнений (устанавливающих связь между значениями системы переменных в различные моменты времени), которые встречаются при описании динамических систем в экономике, в частности, в моделях управления запасами.

Рассмотрим простой пример. Предположим, что парк некоторого оборудования может использоваться условно на протяжении одного, двух или трех периодов времени, для простоты изложения – лет. Допустим далее, что согласно лицензионным требованиям 100% парка оборудования, срок службы которого три года, заменяют новым. Парк оборудования, прослужившего два года, обновляется лишь на 20%. Все оборудование со сроком службы в один год продолжают эксплуатироваться на протяжении следующего года. Тогда число оборудования, используемого первый год, определяется сто процентным обновлением того парка оборудования, у которого не позднее, чем год назад истек трехлетний срок службы, и 20%–ным обновлением парка того оборудования, у которого не позднее чем год назад истек двухлетний срок службы. Число оборудования, используемого второй год, совпадает с числом оборудования, у которых не позднее, чем год назад истек двухлетний срок службы. Наконец, оборудование, используемое на протяжении третьего года, составляют 80% парка оборудования, у которых не позднее, чем год назад истек двухлетний срок службы. Такое распределение можно формально представить с помощью системы векторов, характеризующих распределение оборудования по срокам службы

$$u_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix},$$

где индекс *t* обозначает номер года, а элементы u_{it} – число оборудования, которое к началу *t*-го года уже прослужило *i* лет. Тогда связь между векторами распределения оборудования по срокам службы в (t-1)-м и t-м годах может быть записана уравнением $u_t = Au_{t-1}$, где $A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{bmatrix}$.

Рассмотрим вначале случай, когда всё выбывающее из строя оборудование заменяется новыми и его общее количество (сумма элементов вектора u_t) из года в год остается прежним: $u_{t+1} = Au_t = u_t$. С математической точки зрения, требуется выяснить, существует ли такой вектор u (индекс t, характеризующий время, можно опустить), который удовлетворяет уравнению $Au = \lambda u$ при $\lambda = 1$. Другими словами, искомый вектор будет существовать, если $\lambda = 1$. является собственным значением матрицы A. Составим характеристический многочлен для матрицы A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0{,}2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}8 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 0{,}2\lambda + 0{,}8$$

корнем которого будет $\lambda = 1$. Соответствующий ему собственный вектор $u = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0{,}8a \end{bmatrix}$, где a - произвольная скалярная величина.

Из сказанного можно сделать вывод: если вектор u имеет такой вид, то при любых значениях a вектор распределения оборудования по срокам службы не будет меняться в зависимости от времени. Это означает, что всякий парк оборудования, внутри которого число оборудования, служащего первый год, совпадает с числом оборудования, служащего второй год, а количество оборудования, служащего третий год, составляет 80% этой величины, будет все время сохранять стабильную структуру.

Ранее отмечалось, что принятые в модели предположения исключали возможность увеличения общего количества оборудования. Рассмотрим модель, предусматривающую такую возможность. Допустим, что закупка «дополнительного» нового оборудования будет пропорциональна наличному запасу оборудования. «Дополнительных» единиц должно быть $\delta(u_{1,t-1} + u_{2,t-1} + u_{3,t-1})$, где коэффициент пропорциональности δ характеризует темп прироста общего числа единиц оборудования. Общее количество единиц оборудования в t-м году составит $\delta u_{1,t-1} + (0{,}2 + \delta)u_{2,t-1} + (1 + \delta)u_{3,t-1}$ и матрица A в уравнении $u_t = Au_{t-1}$, будет иметь следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} \delta & 0{,}2+\delta & 1+\delta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Общая численность оборудования из года в год должна увеличиваться, поэтому теперь нельзя исходить из того, что u_t в любой момент времени окажется равным u_{t-1}. Сформулируем вопрос по другому: существует ли такое число λ, что $u_t = \lambda u_{t-1}$? Другими словами, может ли значение вектора распределения оборудования по срокам службы в любом году равняться значению этого вектора в предшествующем году, умноженному на один и тот же постоянный множитель. Если это возможно, то каким образом этот множитель выражается через δ. Положительный ответ на этот вопрос означал бы, что существует множитель λ, удовлетворяющий соотношению $u_t = Au_{t-1} = \lambda u_{t-1}$.

Следовательно, требуется найти вектор u, удовлетворяющий условию $Au = \lambda u$. Характеристическое уравнение имеет вид $|A - \lambda E| = 0$. Подставив в него соответствующие значения, приходим к следующему уравнению относительно переменной λ

$$\lambda^3 - \lambda^2\delta - \lambda(0{,}2+\delta) - 0{,}8(1+\delta) = 0.$$

Это уравнение имеет корень $\lambda = 1 + \delta$, а соответствующий собственный вектор равен $u = \begin{bmatrix} (1+\delta)a \\ a \\ \frac{0{,}8a}{1+\delta} \end{bmatrix}$, причем параметр a может принимать любые значения.

Предположим, например, что $\delta = 0{,}2$. Собственное значение матрицы $\lambda = 1{,}2$, а соответствующий собственный вектор тогда равен

$$u = \begin{bmatrix} \frac{6}{5}a \\ a \\ \frac{2}{3}a \end{bmatrix},$$

Из сказанного можно сделать вывод: если соотношения между оборудованием с годовым, двухлетним и трехлетним сроками службы все время будут равны $\frac{6}{5} : 1 : \frac{2}{3}$, то прирост общей численности оборудования составит 20 % в год.