УДК 517.948

С.В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);
О.Н. Пыжкова, зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ О ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЕЙЛЯ

Операторы дробного интегродифференцирования могут принимать различные формы (Римана-Лиувилля, Адамара, Грюнвальда-Летникова, Вейля, Капуто-Герасимова и др., см. например, [1], [2], [3]), действия которых не всегда совпадают. При этом в разных областях науки рассматриваемые модели приводят к дробным производным различного типа. Наиболее «близкой» к обычному дифференцированию оказывается форма интегралов и производных в виде Римана-Лиувилля. Для дробных интегралов в форме Римана-Лиувилля выполняются многие «хорошие» свойства, в частности, полугрупповое свойство (а в определенных функциональных пространствах и при чисто комплексном порядке интегрирования операторы дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля даже образуют однопараметрическую сильно непрерывную в операторной топологии группу (см. [4])), свойство равенства «обычной» производной при целых значениях порядка интегрирования и другие, позволяющие использовать эту конструкцию при решении многих сложных прикладных задач физики, биологии, теории управления и др. (см. [2], [3]), которые невозможно решить средствами обычного интегродифференцирования.

Интеграл и производная дробного порядка Римана–Лиувилля определяется равенствами (см. [1])

$$I^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

$$D^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}, \tag{1}$$

где Г – гамма-функция Эйлера, α – порядок интегрирования (дифференцирования), который может быть не обязательно дробным, но и неотрицательным иррациональным или даже комплексным числом.

В определенных функциональных пространствах интегралы и производные Римана-Лиувилля являются взаимно обратными операциями, хотя в общем случае это свойство и не выполняется (про интегралы и производные в форме Римана-Лиувилля как взаимно обратные операции см. [1]).

Однако такая форма дробного интегрирования по Риману-Лиувиллю оказывается неудобной в теории тригонометрических рядов, имеющий дело с периодическими функциями, так как теряется одно из прекрасных свойств «привычного» интеграла – переводить периодическую функцию снова в периодическую с тем же периодом. Естественно, что для периодических функций операция дробного интегродифференцирования должна быть введена так, чтобы она переводила их в периодические функции с тем же периодом. Дробное интегродифференцирование по Риману-Лиувиллю этим свойством не обладает. В теории тригонометрических рядов пользуются другим определением дробного интегродифференцирования, предложенным Г. Вейлем.

Пусть $x(t)$ является 2π–периодической функцией с нулевым средним значением по периоду $\int_0^{2\pi} x(t)dt = 0$. Другими словами, функция $x(t)$ может быть разложена в ряд Фурье. Учитывая свойства свертки Фурье, определение интеграла дробного порядка в форме Вейля (аналогичное (1)) для периодических функций выглядит следующим образом:

$$I_{\pm}^{(\alpha)}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t-s)\Psi_{\pm}^{(\alpha)}(s)ds, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

где $\Psi_{\pm}^{(\alpha)}(t) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}}$.

Дробная производная по Вейлю при $0 < \alpha < 1$ определяется равенством

$$D_{\pm}^{(\alpha)}x = \pm\frac{d}{dt}I_{\pm}^{(1-\alpha)}x.$$

Несмотря на то, что производные и интегралы дробного порядка в форме Вейля не являются взаимно обратными и в общем случае не обладают полугрупповым свойством, на всей прямой выполняется следующая

Теорема. *На 2π–периодических функциях $x(t)$ с нулевым средним значением дробный интеграл Вейля совпадает с дробным интегралом Римана-Лиувилля по всей прямой*

$$I_{+}^{(\alpha)}x(t) = I^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где интеграл понимается как условно сходящийся

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{x(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds = \lim_{n\to\infty}\int_{t-2\pi n}^{t}\frac{x(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds.$$

Справедливо также представление абсолютно сходящимся интегралом:

$$I_{+}^{(\alpha)}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}x(t-s)\left\{s^{\alpha-1}-\left(2\pi\left[\frac{s}{2\pi}\right]^{1-\alpha}\right)\right\}ds\,.$$

Доказательство основано на периодичности функции $x(t)$, равенстве нулю «обычного» интеграла от нее по периоду, а также на асимптотическом представлении функции

$$\Psi_{+}^{(\alpha)}(t)=\frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)}t_{+}^{\alpha-1}+r_{\alpha}(t),\quad -2\pi<t\le 2\pi,$$

где $r_{\alpha}(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim\limits_{n\to\infty}\left[2\pi\sum\limits_{m=1}^{n}(t+2\pi m)^{\alpha-1}-\dfrac{(2\pi n)^{\alpha}}{\alpha}\right].$

Заметим, что для периодической функции со средним значением по периоду $\int_{0}^{2\pi}x(t)dt=a$, равным $a\neq 0$, также можно использовать аппарат интегродифференцирования Вейля после линейной замены $s=t-a$. Также отметим, что длина периода не обязательно должна быть равной 2π , в таком случае во всех соответствующих формулах нужно заменить длину периода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations (North-Holland Mathematics Studies 204). Elsevier, 2006, 523 p.

3. А. Г. Бутковский, С. С. Постнов, Е. А. Постнова. Дробное интегродифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации, Автомат. и телемех., 2013, выпуск 4, 3–42.

4. Пономарева С.В., Пыжкова О.Н., Яблонская Н.Б. Полугрупповые свойства операторов интегрирования дробного порядка Римана-Лиувилля // Физико-математические науки: материалы 83-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 1-14 февраля 2019 г. [Электронный ресурс] / отв. за издание И.В. Войтов; УО БГТУ. – Минск: БГТУ, 2019. – с. 43–44.