

О.Г. Бобрович, В.В. Тульев

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Тексты лекций

по дисциплине «Физика»

для студентов специальности 1 – 48 01 02

«Химическая технология органических веществ,
материалов и изделий»

Минск БГТУ 2009

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.Г. Бобрович, В.В. Тульев

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА»

для студентов специальности 1 – 48 01 02
«Химическая технология органических веществ,
материалов и изделий»

Минск 2009

УДК 531/534 (042.4)
ББК 22.2/.3я73
Б 72

Рассмотрены и рекомендованы редакционно-издательским советом университета

Рецензенты:

заведующий кафедрой экспериментальной и теоретической физики
БГПУ им. Максима Танка
доктор физико-математических наук *И. С. Тапшыков*;
заведующий кафедрой физики БНТУ
кандидат физико-математических наук *П. Г. Кужир*

Бобрович, О. Г.

Б 72 Механика и молекулярная физика: тексты лекций по дисциплине «Физика» для студентов дневной формы обучения специальностей 1 – 48 01 02 «Химическая технология органических веществ, материалов и изделий» / О. Г. Бобрович, В. В. Тульев. – Минск : БГТУ, 2009.

В пособии кратко изложены лекции по разделам «Механика» и «Молекулярная физика и термодинамика» для студентов дневной формы обучения специальностей 1 – 48 01 02 «Химическая технология органических веществ, материалов и изделий».

УДК 531/534 (042.4)
ББК 22.3/.3я73

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2009
© Бобрович О. Г., Тульев В. В., 2009

ВВЕДЕНИЕ

Физика (от греч. природа) – область естествознания, наука, изучающая наиболее общие и фундаментальные закономерности, определяющие структуру и эволюцию материального мира. Физика – это наука о природе в самом общем смысле. Она изучает вещество (материю) и энергию, а также фундаментальные взаимодействия природы, управляющие движением материи.

Физика является фундаментом основных направлений техники, таких как радиотехника, электроника, электротехника и энергетика, строительная техника, гидротехника и др. Таким образом, физика является одной из фундаментальных дисциплин, которые закладывают основу для общенаучной и общетехнической подготовки будущего специалиста-инженера. Объединяя все достижения современной научно-технической мысли, физика служит базой для развития самых передовых технологий и производств. Однако не менее важным для становления инженера является овладение техникой физического эксперимента. Знание физических методов исследования и законов современной физики обеспечит создание надежной теоретической базы для дальнейшей, самостоятельной и плодотворной работы выпускников технических ВУЗов в различных областях народного хозяйства.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Механика (от греч. наука о машинах, механизмах) – это наука, которая изучает механическое движение материальных тел, его закономерности и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

Движение макроскопических тел со скоростями, которые значительно меньше скорости света, описывает *классическая (ньютоновская) механика*.

Движение макроскопических материальных объектов со скоростями, близкими к скорости света, изучает *релятивистская механика*.

Поведение микрочастиц с учетом их волновых свойств является предметом рассмотрения *квантовой механики*.

1. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

Лекция № 1

- 1.1. *Предмет кинематики. Системы отсчета.*
- 1.2. *Способы задания движения материальной точки.*
- 1.3. *Средние, мгновенные скорости и ускорения.*

1.1. Предмет кинематики. Системы отсчета

Кинематика (от греч. движение) – раздел механики, посвященный изучению движения материальных объектов без учета их масс и действующих на них сил, т. е. кинематика рассматривает движение без учета причин, его вызывающих. Устанавливаемые здесь закономерности используются при кинематических исследованиях движений, в частности, при расчете механических передач в различных технических устройствах, а также при решении задач динамики.

Основной задачей кинематики является расчет кинематических характеристик движущихся объектов, к которым относятся скорость, ускорение и траектория.

В зависимости от изучаемого объекта выделяют кинематику материальной точки, твердого тела и непрерывно распределенной среды (деформируемого твердого тела, жидкости, газа).

Для описания движения необходимо выбрать систему отсчета.

Система отсчета состоит из тела отсчета и системы пространственных координат, снабженной часами и связанной с телом отсчета.

Тело отсчета – произвольно выбранное, в идеале – абсолютно твердое тело, относительно которого определяется положение остальных тел.

1.2. Способы задания движения материальной точки

При *векторном способе задания движения* положение материальной точки в данный момент времени характеризуется радиус-вектором \vec{r} , проведенным из начала координат в данную точку (рис. 1.2.1).

При движении материальной точки конец радиус-вектора описывает в пространстве кривую, которая называется *траекторией* движущейся точки. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным. Длина и направление радиус-вектора изменяется со временем согласно некоторому закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$, который называется *уравнением движения материальной точки*.

При координатном способе задания движения используется декартова система координат. Положение материальной точки в данный момент времени характеризуется тремя координатами X , Y и Z , а перемещение может быть представлено как результат трех независимых перемещений вдоль координатных осей: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

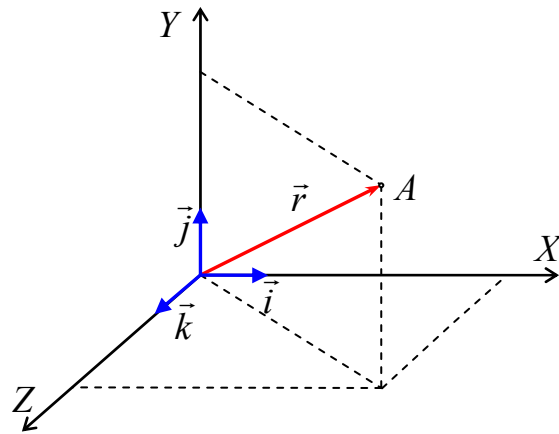


Рис. 1.2.1

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1.2.1)$$

1.3. Средние, мгновенные скорости и ускорения

Для характеристики движения вводится понятие *вектора скорости*, который определяет как быстроту движения, так и направление в данный момент времени.

Средней скоростью на некотором участке MN называется величина равная отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt , за который это перемещение произошло

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \Delta\vec{r} / \Delta t. \quad (1.3.1)$$

Вектор мгновенной скорости есть предел, к которому стремится вектор \vec{v}_{cp} при стремлении $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.3.2)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ направление вектора $\Delta\vec{r}$ стремится к касательной к траектории в точке 1. Кроме того, что при $\Delta t \rightarrow 0$ $|\Delta\vec{r}| \rightarrow \Delta s$, поэтому модуль скорости $|\vec{v}|$ равен

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.3.3)$$

В декартовых координатах

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \quad (1.3.4)$$

где

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.3.5)$$

есть проекции скорости \vec{v} на оси x, y, z . Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (1.3.6)$$

Быстрота изменения скорости со временем характеризуется ускорением. Ускорение равно первой производной от вектора скорости \vec{v} или второй производной от радиус-вектора $\vec{r}(t)$ по времени. Ускорение – это векторная величина

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.3.7)$$

Ускорение можно найти по его проекциям на оси координат

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (1.3.8)$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (1.3.9)$$

Модуль

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.3.10)$$

1. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

Лекция № 2

1.4. Нормальное и тангенциальное ускорения при криволинейном движении.

1.5. Классификация движений материальной точки.

1.6. Кинематика абсолютно твердого тела.

1.7. Связь между линейными и угловыми характеристиками тела при его вращении.

1.4. Нормальное и тангенциальное ускорения при криволинейном движении

В общем случае при движении тела его скорость изменяется как по величине, так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости движения вводится понятие ускорения.

Рассмотрим плоское движение, т. е. такое, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости. Пусть вектор \vec{v} задает скорость точки A в момент времени t . За время Δt движущаяся точка перешла в положение B и приобрела скорость, отличную от v как по модулю, так и направлению и равную $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Перенесем вектор \vec{v}_1 в точку A и найдем $\Delta\vec{v}$ (рис.).

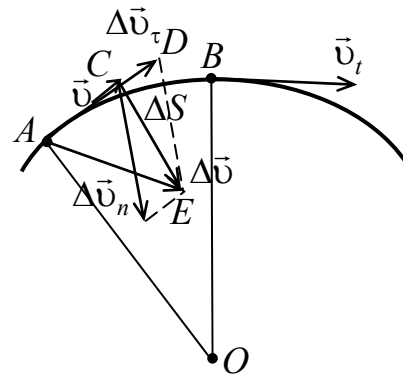


Рис. 1.4.1

Средним ускорением \vec{a}_{cp} неравномерного движения в интервале времени от t до $t+\Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени Δt :

$$\vec{a}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.4.1)$$

Ускорение в данный момент времени (*мгновенное ускорение*) представляет собой предел, к которому стремится выражение (1.4.1) при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.4.2)$$

Таким образом, ускорение есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

Разложим вектор $\Delta\vec{v}$ на две составляющие. Для этого из точки A (рис. 1.4.1) по направлению скорости \vec{v} отложим вектор \overline{AD} , по модулю равный v_1 . Очевидно, что вектор \overline{CD} , равный $\Delta\vec{v}_\tau$, определяет изменение скорости по модулю за время Δt : $\Delta v_\tau = v_1 - v$. Вторая же составляющая $\Delta\vec{v}_n$ вектора $\Delta\vec{v}$ характеризует изменение скорости за время Δt по направлению.

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad (1.4.3)$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Определим вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка B близка к точке A , поэтому Δs можно считать дугой окружности некоторого радиуса r , мало отличающейся от хорды AB . Тогда из подобия треугольников AOB и EAD следует $\Delta v_n/AB = v_1/r$, но так как $AB = v\Delta t$, то $\Delta v_n/\Delta t = v v_1/r$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$, получим $v_1 \rightarrow v$.

Поскольку $v_1 \rightarrow v$, угол EAD стремится к нулю, а так как треугольник EAD равнобедренный, то угол ADE между \vec{v} и $\Delta\vec{v}_n$ стремится к прямому. Следовательно, при $\Delta t \rightarrow 0$ векторы \vec{v} и $\Delta\vec{v}_n$ оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор $\Delta\vec{v}_n$, перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Вторая составляющая ускорения, равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \quad (1.4.4)$$

называется *нормальной составляющей ускорения* и направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны. Поэтому эту составляющую ускорения называют также *центростремительным ускорением*.

Таким образом, *полное ускорение* тела \vec{a} есть геометрическая сумма тангенциальной \vec{a}_τ и нормальной \vec{a}_n составляющих

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (1.4.5)$$

Тангенциальное ускорение равно первой производной по времени от модуля скорости и определяет быстроту изменения скорости по модулю, и направлено по касательной к траектории.

Нормальное ускорение определяет быстроту изменения скорости по направлению и направлено к центру кривизны траектории.

Векторы \vec{a}_τ и \vec{a}_n взаимно перпендикулярны поэтому модуль полного ускорения равен

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.4.6)$$

1.5. Классификация движений материальной точки

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

- 1) $a_\tau = 0, a_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение.
- 2) $a_\tau = \text{const}, a_n = 0$ – прямолинейное равнопеременное движение.

При таком движении $\vec{a}_\tau = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Проинтегрировав это выражение,

получим:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a} dt \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Так как $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то, проинтегрировав полученное выражение в пределах от нуля до произвольного момента времени можно найти перемещение точки:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{v} dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t) dt = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

или
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

3) $a_\tau = f(t), a_n = 0$ – прямолинейное движение с переменным ускорением.

4) $a_\tau = 0, a_n = \text{const}$. При таком движении скорость точки не изменяется по модулю, так как тангенциальная составляющая равна нулю, а изменяется только по направлению.

5) $a_\tau = \text{const}$, $a_n \neq \text{const}$ – равнопеременное движение по окружности.

6) $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$ – равномерное криволинейное движение.

7) $a_\tau = \text{const}$, $a_n \neq 0$ – криволинейное равнопеременное движение.

1.6. Кинематика абсолютно твердого тела

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. При вращательном движении скорости и ускорения различных точек тела неодинаковы. Поэтому в качестве общих кинематических характеристик движения тела при вращении вводятся угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение тела. При вращении тела угол поворота изменяется со временем по некоторому закону $\varphi = \varphi(t)$, который называется *уравнением вращательного движения тела*.

Угловой скоростью тела называется вектор, численно равный первой производной по времени от угла поворота тела по времени и направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта:

$$\vec{\omega} = \lim \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.6.1)$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения, причем так, чтобы вращение, рассматриваемое с конца вектора угловой скорости, происходило против хода часовой стрелки (рис 1.6.1).

Единицей угловой скорости является рад/с.

Скорость произвольной точки вращающегося тела называется *линейной скоростью* этой точки.

При равномерном вращении угловая скорость не изменяется со временем, то есть является постоянной величиной ($\omega = \text{const}$). Тогда

$$\varphi = \omega \int_{t_1}^{t_2} dt = \omega(t_2 - t_1) = \omega \Delta t.$$

Равномерное вращение

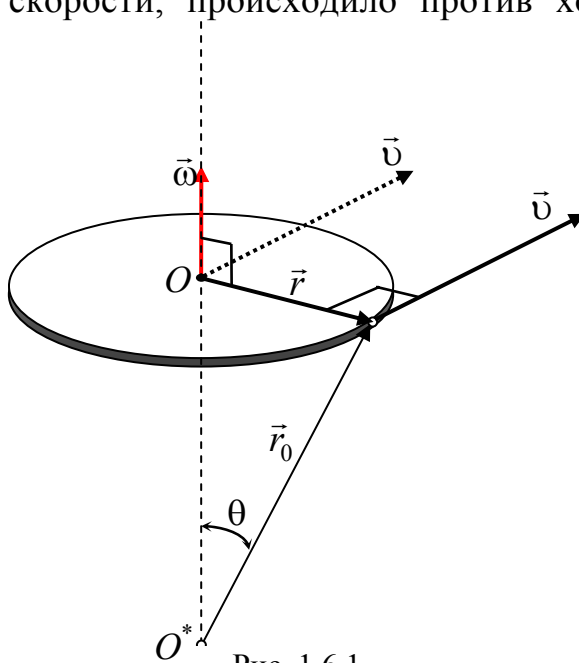


Рис. 1.6.1

характеризуется *периодом* вращения и *частотой* вращения.

Период вращения – это время, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$ и на основании выражения (1.6.1) $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Частота вращения – это число полных оборотов, которое делает точка при равномерном вращении, за единицу времени: $n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, откуда $\omega = 2\pi n$.

Для характеристики неравномерного вращения тела вводится понятие *углового ускорения*.

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.6.2)$$

При ускоренном вращении вектор углового ускорения сонаправлен с вектором угловой скорости, а при замедленном – противоположен ему.

В случае равнопеременного движения точки по окружности ($\varepsilon = \text{const}$) угловая скорость определяется по формуле

$$\int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \int_0^t \vec{\varepsilon} dt \Rightarrow \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} \int_0^t dt \Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}_0 = \vec{\varepsilon} t \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t. \quad (1.6.3)$$

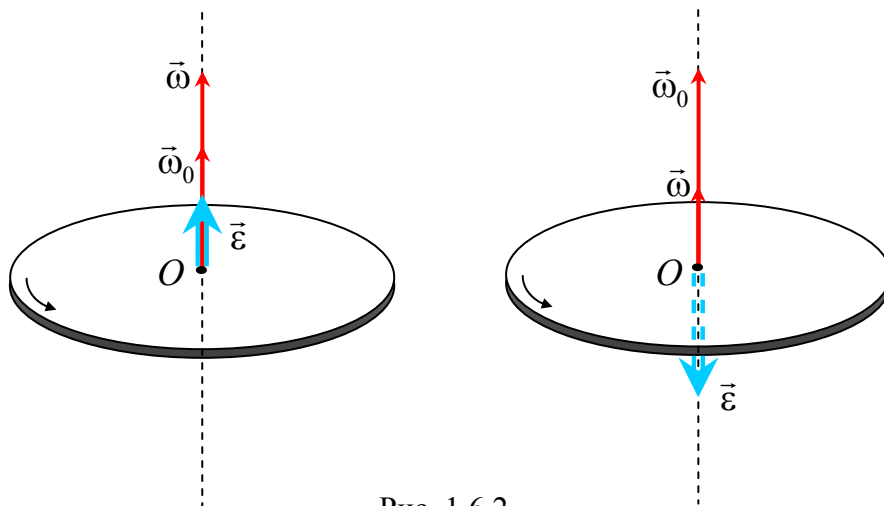


Рис. 1.6.2

Или в скалярном виде

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t. \quad (1.6.4)$$

Проинтегрировав выражение (1.6.1) можно получить формулу для угла поворота тела

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.6.5)$$

Исключив из последнего уравнения t , получим

$$\pm 2\varepsilon\varphi = \omega^2 - \omega_0^2, \quad (1.6.6).$$

где $\varphi = 2\pi N$, N – число полное число оборотов, совершенных телом.

В случае $\varepsilon = \varepsilon(t)$, угловая скорость и закон вращательного движения определяются следующими формулами

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t) dt, \quad \varphi = \int_0^t \omega(t) dt. \quad (1.6.7)$$

1.7. Связь между линейными и угловыми характеристиками тела при его вращении

За время dt точка проходит по дуге окружности радиуса R путь $dS = R d\varphi$. Поэтому $v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = \omega R$. Если угол поворота вращающегося тела представить в виде $d\varphi = \omega(t) dt$ и проинтегрировать в пределах от начального момента времени t_1 до конечного момента времени t_2 , то получится угол, на который совершила поворот тело за

время: $\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt$.

Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяются формулами:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.7.1)$$

Полученные соотношения (1.7.1) можно записать в векторном виде. Для этого на оси вращения OO^* (рис. 1.6.1) тела выберем любую точку A и проведем из нее радиус-вектор \vec{r} в точку M . Векторное

произведение $\vec{\omega} \times \vec{r}$ по модулю и направлению совпадает с вектором скорости \vec{v} точки M :

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega R, \quad \vec{v} \perp \vec{\omega} \quad \text{и} \quad \vec{r}. \quad (1.7.2)$$

Следовательно, можно записать, что вектор скорости $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, а вектор ускорения точки

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.7.3)$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (1.7.4)$$

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Лекция № 3

2.1. Основное уравнение динамики поступательного движения.

2.2. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности.

2.3. Система материальных точек. Закон сохранения импульса.

2.4. Центр масс. Уравнение движения центра масс.

2.1. Основное уравнение динамики поступательного движения

Динамика – раздел механики, в котором изучается движение тел под действием приложенных сил. *Основной задачей динамики* является определение кинематического уравнения движения материальной точки, если известны, приложенные силы к ней со стороны окружающих тел и начальные условия, положение и скорость тела в начальный момент времени.

В основе динамики лежат три закона И. Ньютона, которые являются результатом обобщения опытных данных и теоретических сведений в области механики. Для формулировки законов динамики необходимо дать определение следующих динамических характеристик: инертность, масса, импульс тела и сила.

Инертностью (или *инерцией*) называется свойство тела сохранять неизменным состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Количественной мерой инертности тел является *инертная масса*, а количественной мерой гравитационного взаимодействия является *гравитационной массы*. К настоящему времени экспериментально показано, что инертная и гравитационная массы с большой степенью точности совпадают, т. е. они эквивалентны. Этот фундаментальный закон природы называется *принципом эквивалентности*.

Масса – это физическая величина, являющаяся мерой инерционных и гравитационных свойств тела. Единицей массы в СИ является килограмм: $[m] = \text{кг}$. Масса – величина аддитивная, т. е. масса тела равна сумме масс всех частей этого тела.

Импульс тела (или *количество движения*) – это векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.1.1)$$

Единица измерения импульса в СИ – $[p] = \frac{\text{кг} \times \text{м}}{\text{с}}$.

Сила – это векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате, которого тело деформируется или приобретает ускорение. Единица измерения силы в СИ – Ньютон $[F] = \text{кг} \times \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$. Сила, приложенная к телу, считается заданной, если указаны ее точка приложения, направление действия и численное значение.

Первый закон Ньютона (или *закон инерции*), который формулируется следующим образом: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока действие со стороны других тел не выведут его из этого состояния. Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется *инерциальной*. Рассмотрим две системы отсчета,двигающиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно будет двигаться с ускорением. Получается, что в одной системе отсчета первый закон Ньютона выполняется, а в другой не выполняется. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно будет также инерциальной. Системы отсчета, по отношению к которым первый закон Ньютона не выполняется, называются *неинерциальными* системами отсчета.

Второй закон Ньютона: ускорение тела прямо пропорционально результирующей сил приложенных к нему и обратно пропорционально его массе.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ или } \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1.2)$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \text{ или } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.1.3)$$

Скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Уравнения (2.1.2) и (2.1.3) являются математическим выражением второго закона Ньютона. Второй закон Ньютона позволяет решать основную задачу механики. Поэтому его называется *основным уравнением динамики поступательного движения*.

Третий закон Ньютона: сила, с которой одно тело действует на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой второе тело действует на первое.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.1.4)$$

2.2. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

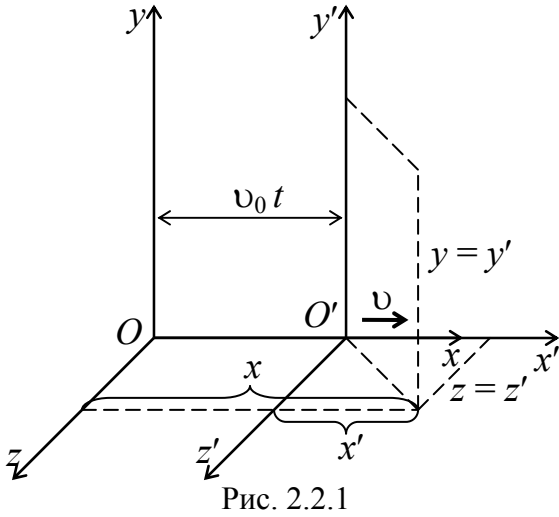


Рис. 2.2.1

Рассмотрим две инерциальные системы XYZ (система K) и $X'Y'Z'$ (система K'), первая из которых будет неподвижной, а вторая движется поступательно вдоль положительного направления оси OX с постоянной скоростью v_0 . Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки M в системе K и координатами x', y', z' той же точки в системе K' . Если начать отсчет времени с того момента, когда начала координат обеих систем совпадали,

то, как следует из рис. 2.2.1 в момент времени t координаты точки M в этих системах будут связаны соотношениями

$$x' = x - v_0 t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (2.2.1)$$

Формулы (2.2.1) называются преобразованиями Галилея для координат и времени. Они могут быть представлены также в виде обратного преобразования:

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (2.2.2)$$

Из преобразований Галилея вытекает классический закон сложения скоростей. Продифференцировав соотношения (2.2.2) по времени, найдем связь между скоростями точки M по отношению к системам отсчета K и K'

$$v_x = v'_x + v_0, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0. \quad (2.2.3)$$

Согласно векторному соотношению (2.2.3) скорость v точки M относительно неподвижной системы координат (абсолютная) равна векторной сумме ее скорости v' относительно подвижной системы (относительная) и скорости v_0 подвижной системы относительно неподвижной (переносная).

Продифференцировав выражение (2.2.3) по времени t , получим

при условии, что $v_0 = \text{const}$

$$a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'. \quad (2.2.4)$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же. Поэтому, если одна из этих систем инерциальна, то и остальные будут инерциальными.

Так как масса в классической механике не зависит от скорости, то произведение массы тела на его ускорение во всех инерциальных системах будет одинаковым, т. е. вид второго закона Ньютона, описывающего движение тела, будет одинаковым во всех инерциальных системах отсчета. Неизменность выражения для закона Ньютона отражает тот факт, что все механические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково при одинаковых условиях. Другими словами – все инерциальные системы отсчета эквивалентны между собой. Это утверждение носит название *принципа относительности Галилея* (или *механический принцип относительности*). Он означает, что никакими опытами внутри инерциальной системы отсчета невозможно установить покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно. Принцип относительности справедлив не только для механических, но и для любых физических явлений.

Используя преобразования Галилея, можно показать, что отрезки длин (масштабы) и интервалы времени между двумя какими-либо событиями одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

$$l' = x'_2 - x'_1 = (x_2 - v_0 t) - (x_1 - v_0 t) = x_2 - x_1 = l. \quad (2.2.5)$$

Понятие времени в классической механике является абсолютным, поэтому

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1 = \Delta t. \quad (2.2.6)$$

Физические величины, не изменяющиеся при переходе от одной инерциальной системе к другой, называются *инвариантными*. Следовательно, отрезки длин и интервалы времени являются инвариантами классической механики.

2.3. Система материальных точек. Закон сохранения импульса

Механической системой называется совокупность материальных точек, рассматриваемых как единое целое. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются

внутренними. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются *внешними*. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой механической системой*.

Импульс механической системы, представляет собой сумму импульсов всех материальных точек, входящих в механическую систему.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (2.3.1)$$

Рассмотрим систему материальных точек массами m_1, m_2, \dots, m_n , движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Пусть на каждую из этих точек действуют равнодействующие внутренних сил $\vec{F}_1^i, \vec{F}_2^i, \dots, \vec{F}_n^i$, и равнодействующие внешних сил $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$.

Используя второй закон Ньютона для системы точек, запишем

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^i + \vec{F}_1^e, \quad m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^i + \vec{F}_n^e. \quad (2.3.2)$$

Сложим эти уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) = \\ (\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i + \dots + \vec{F}_n^i) + (\vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e + \dots + \vec{F}_n^e). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между материальными точками механической системы, будут равны и противоположно направлены, т. е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e + \dots + \vec{F}_n^e. \quad (2.3.4)$$

С учетом выражения (2.3.1) получим *закон изменения импульса механической системы*: производная по времени от импульса механической системы равна векторной сумме внешних сил, действующих на систему.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e + \dots + \vec{F}_n^e. \quad (2.3.5)$$

В случае замкнутой механической системы,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = 0, \quad \text{или} \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}. \quad (2.3.6)$$

Выражение (2.3.6) выражает *закон сохранения импульса*: импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса носит универсальный характер и выполняется также в релятивистской и квантовой механике. Закон сохранения импульса – это фундаментальный закон природы. Он является следствием определенного свойства симметрии пространства – его однородности. Под однородностью пространства понимают одинаковость свойств пространства во всех его точках.

2.4. Центр масс. Уравнение движения центра масс

В классической механике масса тела не зависит от его скорости движения, и импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс.

Центром масс (или *центром инерции*) системы материальных точек называется воображаемая точка C , положение которой характеризует распределение массы этой системы, и радиус-вектор которой определяется выражением:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (2.4.1)$$

где m_i и \vec{r}_i – масса и радиус-вектор i -ой точки системы; $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – суммарная масса системы.

Соотношения координат центра инерции системы равны

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i. \quad (2.4.2)$$

В случае непрерывного распределения массы в системе (например, в случае протяженного тела) радиус-вектор центра масс системы определяется выражением

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m^{(m)}} \int \vec{r} dm, \quad (2.4.3)$$

где \vec{r} – радиус-вектор малого элемента системы, масса которого равна dm , а интегрирование проводится по всем элементам системы, т. е. по всей ее массе m .

Определим скорость центра масс механической системы

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (2.4.4)$$

Учитывая выражение (2.3.1) получим

$$\vec{v}_C = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \text{или} \quad \vec{p} = m\vec{v}_C. \quad (2.4.5)$$

Таким образом, импульс механической системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

С учетом выражения (2.3.5) получим

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e + \dots + \vec{F}_n^e. \quad (2.4.6)$$

Это выражение представляет собой *закон движения центра масс*: центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы, и на которую действует сила, равная векторной сумме всех внешних сил, приложенных к системе.

Закон движения центра масс показывает, что для изменения скорости центра масс системы необходимо, чтобы на систему действовала внешняя сила. Внутренние силы взаимодействия частей системы могут вызвать изменения скоростей этих частей, но они не могут повлиять на суммарный импульс системы и скорость ее центра масс.

3. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

Лекция № 4

3.1. Работа постоянной и переменной силы. Мощность.

3.2. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии.

3.3. Консервативные и неконсервативные силы.

3.4. Потенциальная энергия. Связь между силой и энергией потенциального поля.

3.5. Гравитационное поле. Работа в гравитационном поле.

3.6. Закон сохранения механической энергии.

3.1. Работа постоянной и переменной силы. Мощность.

Работа – это количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила, то работа этой силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \vec{F} \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \alpha, \quad (3.1.1)$$

где α – угол между направлением действия силы и направлением перемещения. Работа измеряется в [Дж]. 1 Дж – это работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м.

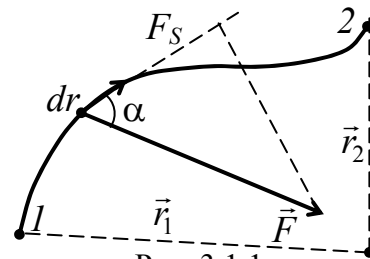


Рис. 3.1.1

В случае переменной силы водится понятие элементарной работы dA , равной скалярному произведению вектора силы \vec{F} и вектора элементарного перемещению $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \alpha = F_s dr, \quad (3.1.2)$$

где F_s – проекция силы на касательную к траектории (рис. 3.1.1).

Работа, совершаемая силой на конечном участке пути 1–2, равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути (рис. 3.1.2). Она определяется интегралом, вычисленным вдоль участка 1–2 траектории:

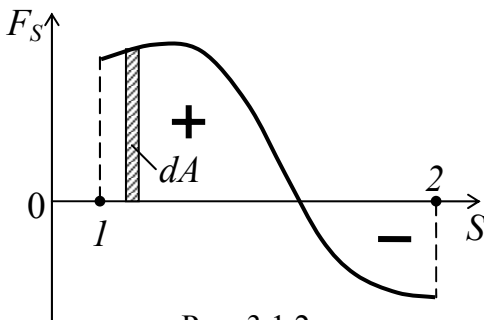


Рис. 3.1.2

$$A = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} F dr \cos \alpha. \quad (3.1.3)$$

Если изобразить график зависимости проекции силы на касательную к траектории от перемещения, то выражение (3.1.3) имеет смысл площади фигуры под кривой.

Для характеристики скорости работы существует мощность. *Средняя мощность* равна отношению работы к промежутку времени, в течение которого эта работа производится:

$$N_{\text{cp}} = \frac{A}{t}. \quad (3.1.4)$$

Мгновенная мощность, т. е. мощность в данный момент времени определяется как

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}, \quad (3.1.5)$$

т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

За единицу мощности принимается мощность в 1 Вт, при которой в единицу времени 1 с совершается работа в 1 Дж.

3.2. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии

Рассмотрим понятие кинетической энергии тела. Пусть тело массой m движется поступательно под действием некоторой силы $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ (или результирующей нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила на элементарном перемещении $d\vec{r} = \vec{v} dt$

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v} = md \left(\frac{v^2}{2} \right) = d \left(\frac{mv^2}{2} \right). \quad (3.2.1)$$

Отсюда видно, что работа силы \vec{F} идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют *кинетической энергией* тела. Таким образом, *кинетическая энергия* – это энергия тела, обусловленная его механическим движением.

Для тела массой m движущегося поступательно со скоростью \vec{v}

кинетическая энергия определяется соотношением

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.2.2)$$

Проинтегрировав выражение (3.2.1) от начальной до конечной скорости получим *теорему об изменении кинетической энергии*

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = K_2 - K_1 = \Delta K, \quad (3.2.3)$$

т. е. приращение кинетической энергии тела на некотором перемещении равно работе результирующей всех сил, действующих на тело на том же перемещении.

3.3. Консервативные и неконсервативные силы

Все силы в механике делятся на *консервативные* и *неконсервативные силы*.

В общем случае работа, определяемая выражением (3.1.3), зависит от траектории, которую описывает точка приложения силы. Однако существуют силы (тяготения, тяжести, упругости, электростатические и др., которые являются центральными), работа которых не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положения движущейся точки. Такие силы называются *консервативными*, а их работа по замкнутому контуру равна нулю

$$\oint dA = 0. \quad (3.3.1)$$

Если работа силы зависит от формы траектории, которую описывает точка приложения силы, то такие силы называются *неконсервативными*, а их работа по замкнутому контуру не равна нулю

$$\oint dA \neq 0. \quad (3.3.2)$$

Среди неконсервативных сил выделяют *диссипативные* и *гирокосические* силы.

1) *Диссипативные силы*. К ним относятся, в частности, силы трения и силы сопротивления среды. Полная работа этих сил является отрицательной.

$$A_{\text{тр}} = \int \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{l} = -\int F_{\text{тр}} dl < 0. \quad (3.3.3)$$

При наличии сил трения и сопротивления энергия механической системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел, что

приводит к их нагреванию. Такой процесс называют *диссипацией энергии*, а силы называют *диссипативными*. Таким образом, сила называется диссипативной, если работа, совершаемая этой силой, зависит от траектории движения тела.

2) *Гироскопические силы*. Эти силы зависят от скорости движения материальной точки и действуют перпендикулярно к этой скорости. Работа таких сил всегда равна нулю, однако от консервативных сил они отличаются тем, что определяются не только положением точки, но и ее скоростью. Примером такой силы является сила Лоренца. Сила Лоренца – это сила, действующая на заряженную частицу q , движущуюся со скоростью \vec{v} , в магнитном поле индукции \vec{B} .

$$\vec{F}_л = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3.3.4)$$

3.4. Потенциальная энергия. Связь между силой и энергией потенциального поля

Важнейшей составной частью механической энергии является *потенциальная энергия*, которая определяется как часть общей механической энергии системы, зависящей от взаимного расположения материальных точек системы и их положения во внешнем силовом поле. Из определения следует, что потенциальная энергия системы не должна зависеть от того, каким образом данная конфигурация частиц системы возникла. Это значит, что понятие потенциальной энергии имеет смысл лишь в том случае, когда на материальные точки системы действуют только консервативные силы. Изменение потенциальной энергии системы должно определяться только работой консервативных сил. Другими словами, работа консервативных сил при переходе из состояния 1 в состояние 2 равна убыли потенциальной энергии

$$A = -(\Pi_2 - \Pi_1). \quad (3.4.1)$$

Таким образом, силовое поле консервативных сил является потенциальным полем.

Поле сил называют область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда частицу действует сила, закономерно меняющаяся от точки к точке. Примером может служить поле силы тяжести Земли или поле сил сопротивления в потоке жидкости (газа). Если сила в каждой точке силового поля не зависит от времени, то такое поле называют *стационарным*. Ясно, что силовое поле, стационарное в одной системе отсчета, в другой системе может оказаться и нестационарным. В стационарном силовом поле сила зависит только от положения частицы.

Стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между двумя любыми точками не зависит от формы пути, а зависит только от положения этих точек, называется *потенциальным*, а силы, как уже было сказано выше – консервативными. Если это условие не выполняется, то силовое поле не является потенциальным. Силовое поле представляет собой особую форму существования материи, посредством которой осуществляются гравитационное, электромагнитное, ядерное и другие взаимодействия.

Взаимодействие в консервативной системе может быть описано с помощью потенциальной энергии либо с помощью сил взаимодействия точек системы. Поэтому между потенциальной энергией и силой, действующей на материальную точку, должна существовать определенная взаимосвязь. Потенциальная энергия системы является функцией координат $\Pi(x, y, z)$. Пусть силы, действующие на систему, выполнили элементарную работу

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.4.2)$$

С другой стороны, используя уравнение (3.4.1)

$$dA = -d\Pi = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z}dz\right). \quad (3.4.3)$$

Сравнивая выражения (3.4.2) и (3.4.3), получим выражения для проекций сил поля

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}. \quad (3.4.4)$$

Для вектора силы получаем следующее выражение

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad}\Pi. \quad (3.4.5)$$

Смысл градиента станет нагляднее и яснее, если ввести понятие *эквипотенциальной поверхности* – поверхности, во всех точках которой потенциальная энергия Π имеет одно и то же значение. Каждому значению Π соответствует своя эквипотенциальная поверхность. Из формул (3.4.4) следует, что проекция вектора на любое направление, касательное к эквипотенциальной поверхности в данной точке, равна нулю. Это значит, что вектор нормален эквипотенциальной поверхности.

сти в данной точке. Далее, возьмем перемещение в сторону уменьшения Π , тогда $\Pi < 0$, и, согласно (3.4.4), проекция вектора силы меньше нуля, т. е. вектор направлен в сторону уменьшения Π . Так как вектор \vec{F} противоположен по направлению вектору $\text{grad } \Pi$, то приходим к выводу, что градиент Π – это вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии Π .

3.5. Гравитационное поле. Работа в гравитационном поле

Рассмотрим более подробно понятие поля сил. Опыт показывает, что в случае гравитационных взаимодействий сила, действующая на тело (А) массой m со стороны окружающих тел (В), пропорциональна массе. Эта сила может быть представлена в виде произведения двух величин:

$$\vec{F} = \vec{G}m, \quad (3.5.1)$$

где \vec{G} – некоторый вектор (для гравитационных сил вблизи поверхности Земли он совпадает с вектором ускорения свободного падения), зависящий как от положения тела (А) массой m , так и от свойств окружающих тел (В).

Такое представление силы открывает возможность иной физической интерпретации взаимодействия, связанной с понятием поля. В этом случае говорят, что система тел (В) окружающих тело массой m создает в окружающем пространстве поле, характеризуемое вектором $\vec{G}(\vec{r})$. Иначе можно сказать, что в каждой точке пространства система тел (В) является источником поля и создает такие условия, при которых тело массой m , помещенное в это поле, испытывает действие силы (3.5.1). Причем считают, что поле существует безотносительно к тому, есть ли в нем тело (А) или нет. При переходе к переменным полям выясняется, что понятие поля имеет глубокий физический смысл: *поле есть физическая реальность*.

Вектор $\vec{G}(\vec{r})$ называют *напряженностью поля*. Если поле образовано несколькими источниками, результирующее поле равно сумме полей, созданных каждым из них. Это утверждение является одним из важнейших свойств полей и напряженность G результирующего поля в произвольной точке

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^N \vec{G}_i. \quad (3.5.2)$$

где \vec{G}_i – напряженность поля соответствующего источника в этой же точке, N – число источников поля.

Формула (3.5.2) выражает так называемый принцип суперпозиции (или наложения) полей, который является отражением опытных фактов и дополняет законы механики.

Обратимся теперь к потенциальной энергии тела. Согласно формулам (3.4.1) и (3.5.1), можно записать

$$m\vec{G}d\vec{r} = -d\Pi. \quad (3.5.3)$$

Поделим обе части этого уравнения на m

$$\vec{G}d\vec{r} = -d\left(\frac{\Pi}{m}\right). \quad (3.5.4)$$

и обозначив $\Pi/m = \varphi$, получим

$$\vec{G}d\vec{r} = -d(\varphi) \quad (3.5.5)$$

или проинтегрировав

$$\int_1^2 \vec{G}d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.5.6)$$

Введенная величина $\varphi(\vec{r})$ называется *потенциалом поля* в точке с радиус-вектором \vec{r} .

Формула (3.5.6) позволяет найти потенциал гравитационного поля. Для этого достаточно вычислить интеграл по произвольному пути между точками 1 и 2 и представить затем полученное выражение в виде убыли некоторой функции, которая и есть потенциал $\varphi(\vec{r})$. Так, потенциал гравитационного поля точечной массы m

$$\varphi = -G\frac{m}{r}. \quad (3.5.7)$$

Потенциал гравитационного поля является энергетической характеристикой поля. Потенциал поля тяготения – это скалярная величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля, или работой по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность.

В случае, когда поле создается многими источниками, то результирующий потенциал равен

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{r}), \quad (3.5.8)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый i – телом в данной точке поля; N – число источников поля.

Потенциал, как и потенциальная энергия, может быть определен только с точностью до прибавления некоторой произвольной постоянной, также совершенно несущественной. Поэтому ее обычно опускают, полагая равной нулю. Таким образом, поле можно описывать или в векторном виде $\vec{G}(\vec{r})$, или в скалярном $\varphi(\vec{r})$. Оба способа эквивалентны.

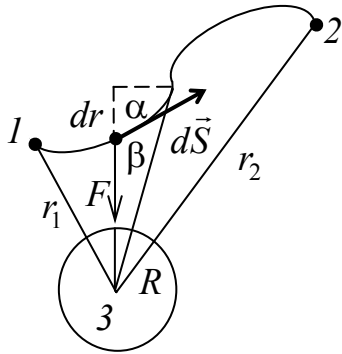


Рис. 3.5.1

Определим работу, совершаемую силами гравитационного поля Земли при перемещении в нем материальной точки массой m . При перемещении материальной точки на расстояние dS совершается работа

$$dA = \vec{F}d\vec{S} = FdS \cos \alpha = Fdr. \quad (3.5.9)$$

На некотором расстоянии r , согласно закону всемирного тяготения, на тело действует сила

$$F = \gamma \frac{M_3 m}{r^2}. \quad (3.5.10)$$

Подставляя (3.5.10) в (3.5.9) и интегрируя в пределах от r_1 до r_2 , получим

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = - \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{M_3 m}{r^2} dr = -\gamma M_3 m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\left(\gamma \frac{mM_3}{r_2} - \gamma \frac{mM_3}{r_1}\right). \quad (3.5.11)$$

Знак «минус» появляется потому, что направления перемещения и силы противоположны. Из формулы (3.5.10) вытекает, что затраченная работа в поле тяготения не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положением материальной точки. Следовательно, силы тяготения являются *консервативными силами*, а поле тяготения является *потенциальным*. Сравнивая (3.5.11) с (3.4.1) получим, что потенциальная энергия в поле тяготения Земли равна

$$\Pi = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (3.5.11)$$

3.6. Закон сохранения механической энергии

Пусть на материальные точки системы действуют только консервативные силы. Тогда при переходе системы из одного состояния работа консервативных сил равна

$$A = -(\Pi_2 - \Pi_1), \quad A = K_2 - K_1. \quad (3.6.1)$$

Из (3.6.1) получаем, что

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2 = \text{const.} \quad (3.6.2)$$

Величину $E = K + \Pi$ называют *полной механической энергией* системы.

Из соотношения (3.6.2) следует *закон сохранения полной механической энергии*: полная механическая энергия системы, на материальные точки которой действуют только консервативные силы, с течением времени не изменяется:

$$E = \text{const.} \quad (3.6.3)$$

Если на систему действуют помимо консервативных сил еще и неконсервативные силы то

$$A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}} = K_2 - K_1, \quad (3.6.4)$$

а работа консервативных сил равна

$$A_{\text{конс}} = -(\Pi_2 - \Pi_1). \quad (3.6.5)$$

Тогда с учетом формулы (3.6.5), выражение (3.6.4) примет следующий вид

$$A_{\text{неконс}} - (\Pi_2 - \Pi_1) = K_2 - K_1 \Rightarrow (K_2 + \Pi_2) - (K_1 + \Pi_1) = A_{\text{неконс}}. \quad (3.6.6)$$

В этом случае изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил.

$$E_2 - E_1 = A_{\text{неконс}}. \quad (3.6.7)$$

Таким образом, в системе, в которой кроме консервативных сил, действуют также неконсервативные силы, полная механическая энергия системы не сохраняется, и закон сохранения механической энергии не выполняется. Но всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида взамен механической энергии, т. е. выполняется фундаментальный закон сохранения и превращения энергии. Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

4. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Лекция № 5

4.1. Динамика поступательного движения твердого тела.

4.2. Момент импульса. Момент силы.

4.3. Основное уравнение динамики вращательного движения относительно точки.

4.4. Закон сохранения момента импульса.

4.5. Момент инерции.

4.6. Теорема Штейнера. Правило аддитивности.

4.1. Динамика поступательного движения твердого тела

Движение любого твердого тела можно рассматривать как сумму поступательного движения его центра масс и вращательного движения относительно оси, проходящей через его центр масс.

Разобьем твердое тело на элементарные массы m_i , тогда его можно представить как систему материальных точек, взаимное расположение которых остается неизменным. Поэтому для описания поступательного движения тела можно использовать закон изменения импульса механической системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (4.1.1)$$

$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_C$ – импульс всех материальных точек твердого тела.

Также можно воспользоваться понятием центра масс и к поступательному движению твердого тела применить закон движения центра масс

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (4.1.2)$$

Центр масс твердого тела движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса тела, и на которую действуют все силы, приложенные к телу. Уравнение (4.1.2) дает возможность установить закон движение центра масс твердого тела, если известна масса тела и действующие на него силы. Если тело движется только поступательно, то это уравнение будет определять не только закон движения центра масс, но и любой другой точки тела.

4.2. Момент импульса. Момент силы

Момент силы. Векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора \vec{r} точки, проведенному из полюса в точку приложения силы, на силу \vec{F} называется *моментом силы* материальной точки относительно некоторого центра

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.2.1)$$

Пусть на частицу массой m действует сила \vec{F} , а ее положение в некоторой инерциальной системе отсчета характеризуется радиус-вектором \vec{r} относительно начала координат. Тогда момент силы частицы относительно точки O дается уравнением (4.2.1). Направление момента силы \vec{M} совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от радиус-вектора \vec{r} к силе \vec{F} , и он перпендикулярен как вектору \vec{r} , так и вектору \vec{F} (рис. 4.2.1). Тогда модуль вектора момента силы равен

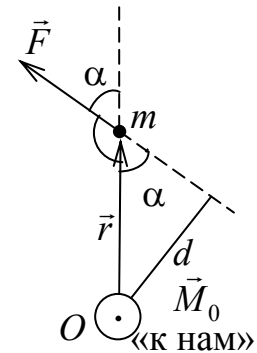


Рис. 4.2.1

$$M = Fr \sin \alpha = Fd, \quad (4.2.2)$$

где $d = r \sin \alpha$ – плечо силы относительно точки O .

Плечо силы – это расстояние, измеряемое по перпендикуляру от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила.

Таким образом, модуль момента силы относительно оси, есть скалярная величина, характеризующая вращательное движение действия силы и равная произведению модуля силы F , действующей на твердое тело, на плечо силы d относительно этой оси.

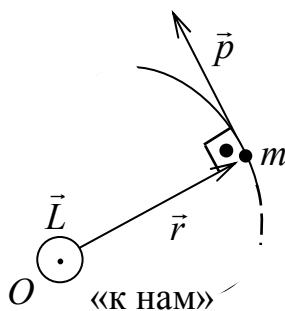


Рис. 4.2.2

Если на тело действует несколько сил, то суммарный момент этих сил равен векторной сумме моментов всех сил относительно данной оси:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]. \quad (4.2.3)$$

Момент импульса. Векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора \vec{r} точки, проведенного из центра на ее импульс $m\vec{v}$ называется *моментом импульса* материальной точки относи-

тельно некоторого центра

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{V}. \quad (4.2.4)$$

Пусть частица массой m имеет импульс \vec{p} , а ее положение в некоторой инерциальной системе отсчета характеризуется радиус-вектором \vec{r} относительно начала координат. Тогда момент импульса частицы относительно точки O дается уравнением (4.2.4). Направление момента импульса совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от радиус-вектора \vec{r} к импульсу \vec{p} , и он перпендикулярен как вектору \vec{r} , так и вектору \vec{p} (рис. 4.2.2). Тогда модуль вектора момента импульса равен

$$L = rp \sin \alpha = pd, \quad (4.2.5)$$

где d – плечо импульса относительно точки O .

Плечо импульса – это расстояние, измеряемое по перпендикуляру от оси вращения до линии, вдоль которой направлен импульс.

Таким образом, модуль вектора момента импульса относительно центра или оси – есть скалярная величина, равная произведению импульса p на плечо импульса d относительно этой оси.

Моментом импульса механической системы относительно некоторого центра называется векторная величина, равная геометрической сумме моментов импульса относительно той же точки всех материальных точек системы

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i] = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]. \quad (4.2.6)$$

4.3. Основное уравнение динамики вращательного движения относительно точки

Рассмотрим систему материальных точек массами m_1, m_2, \dots, m_n движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Пусть на каждую из этих точек действуют: равнодействующие внутренних сил $\vec{F}_1^i, \vec{F}_2^i, \dots, \vec{F}_n^i$, и равнодействующие внешних сил $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$.

Запишем уравнения движения частиц:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \quad \dots \quad m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \quad (4.3.3)$$

Умножим каждое уравнение системы (4.3.3) на соответствующий радиус-вектор и получим

$$\begin{aligned}
m_1 \left[\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right] &= \left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1^e \right] + \left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1^i \right], \\
&\dots\dots\dots, \\
m_n \left[\vec{r}_n \times \frac{d\vec{v}_n}{dt} \right] &= \left[\vec{r}_n \times \vec{F}_n^e \right] + \left[\vec{r}_n \times \vec{F}_n^i \right].
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Преобразуем данные уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 \right] &= \left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1^e \right] + \left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1^i \right], \\
\frac{d}{dt} \left[\vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n \right] &= \left[\vec{r}_n \times \vec{F}_n^e \right] + \left[\vec{r}_n \times \vec{F}_n^i \right].
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Сложим эти уравнения и получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right] = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e \right] + \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^i \right]. \tag{4.3.6}$$

В последнем уравнении:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right] &= \frac{d\vec{L}}{dt} \text{ — есть момент импульса системы,} \\
\sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^i \right] &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^i \text{ — сумма моментов внутренних сил,} \\
\sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e \right] &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^e \text{ — сумма моментов внешних сил.}
\end{aligned}$$

Таким образом, выражение (4.3.6) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^i + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^e. \tag{4.3.7}$$

Учитывая, что моменты внутренних сил попарно уравновешивают друг друга, и сумма моментов всех внутренних сил для любой системы всегда равна нулю, т. е. $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i^i = 0$, получим основное уравнение динамики вращательного движения относительно точки (или иначе закон изменения момента импульса механической системы)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^e. \tag{4.3.8}$$

Производная по времени от момента импульса системы относительно точки равна сумме моментов внешних сил относительно этой точки.

4.4. Закон сохранения момента импульса

Если момент внешних сил $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i^e = 0$, то получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{L} = const \quad (4.4.1)$$

закон сохранения момента импульса.

Если момент внешних сил действующих на механическую систему относительно центра оси равен нулю, то момент импульса системы относительно этого центра с течением времени не изменяется.

Можно сказать, что момент силы при вращательном движении является аналогом силы при поступательном движении, момент импульса – аналогом импульса.

Законы изменения и сохранения момента импульса механической системы можно применить и к вращательному движению твердого тела.

4.5. Момент инерции

Моментом инерции твердого тела относительно данной оси называется физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равная сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний от той же оси:

$$\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = I_z. \quad (4.5.1)$$

Момент инерции зависит только от формы тела и расположения масс относительно оси. $[I] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Понятие момента инерции было введено при рассмотрении вращения твердого тела. Однако следует иметь в виду, что каждое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси.

Если тело сплошное, то суммирование в выражении (4.5.1) следует заменить на интегрирование:

$$I_z = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV, \quad (4.5.2)$$

где R – расстояние от элементарной массы dm до оси вращения.

4.6. Теорема Штейнера. Правило аддитивности

Существуют два свойства момента инерции:

1) *Теорема Штейнера*: момент инерции тела I_z относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

$$I_z = I_{cz} + ma^2. \quad (4.6.1)$$

2) *Правило аддитивности*: сумма моментов инерции частей системы относительно оси равен моменту инерции системы относительно данной оси:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i \quad \text{или} \quad I = \int dI. \quad (4.6.2)$$

4. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Лекция № 6

4.7. Основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси.

4.8. Расчет моментов инерции.

4.9. Кинетическая энергия вращающегося тела.

4.10. Работа силы при вращении тела.

4.7. Основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси

Рассмотрим вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси Oz . Так как твердое тело можно представить как совокупность материальных точек, то воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения относительно точки (4.3.8).

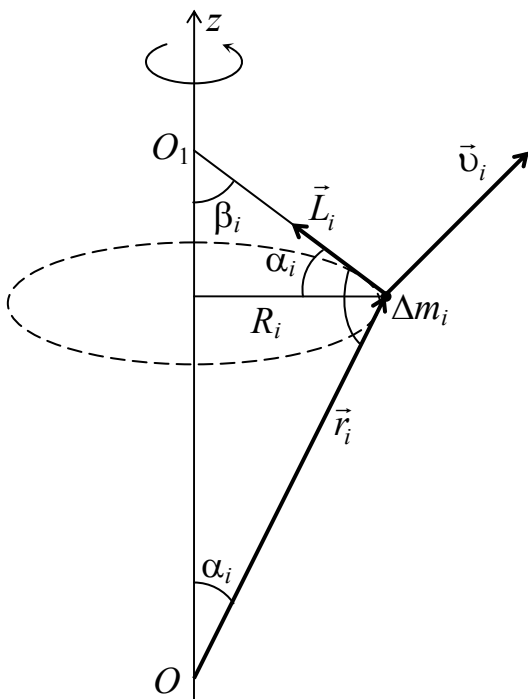


Рис. 4.7.1

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e. \quad (4.7.1)$$

Найдем проекции правой и левой части уравнения (4.7.1) на ось Oz :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e. \quad (4.7.2)$$

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{zi} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)_z. \quad (4.7.3)$$

Вектор \vec{L}_i перпендикулярен радиус-вектору и образует с осью Oz угол $\beta_i = 90^\circ - \alpha_i$. Поэтому проекция момента импульса материальной точки равна

$$L_{zi} = r_i m_i v_i \sin \alpha_i = m_i R_i v_i = m_i R_i \omega R_i = m_i R_i^2 \omega. \quad (4.7.4)$$

Подставим правую часть уравнения (4.7.4) в (4.7.3)

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i R_i^2. \quad (4.7.5)$$

Используя $\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = I_z$, получим момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси Oz

$$L_z = \omega I_z. \quad (4.7.6)$$

Подставляя (4.7.6) в выражение (4.7.1)

$$\frac{d(\omega I_z)}{dt} = M_z^e \Rightarrow I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \quad (4.7.7)$$

и учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, получим *основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси*

$$I_z \varepsilon = M_z^e \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{M_z^e}{I_z}. \quad (4.7.8)$$

Угловое ускорение при вращении твердого тела относительно неподвижной оси прямо пропорционально результирующему моменту внешних сил относительно этой оси и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно этой же оси.

Физический смысл момента инерции можно определить из выражения (4.7.8). Если сравнить с основным уравнением динамики поступательного движения (2.1.2), то можно увидеть что роль массы при вращательном движении выполняет момент инерции. *Момент инерции тела является мерой инерции тела при вращательном движении.*

Если проекция моментов внешних сил относительно оси Oz равна нулю (например, система замкнута) $M_z^e = 0$, то получаем *закон сохранения проекции момента импульса*

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(\omega I_z)}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = I_z \omega = \text{const}. \quad (4.7.9)$$

Если проекцию моментов внешних сил относительно оси z равна нулю, то момент импульса тела относительно этой оси с течением времени не будет изменяться.

4.8. Расчет моментов инерции

1) *Момент инерции однородного полого цилиндра.*

Определим момент инерции однородного полого цилиндра, внешний радиус которого R_2 , а внутренний радиус R_1 , относительно оси

симметрии. Разобьем цилиндр на концентрические цилиндрические кольца толщиной dr . Все кольца находятся на одинаковом расстоянии от оси, равном r . Если плотность вещества постоянна, то элементарная масса $dm = \rho dV$, где dV – объем бесконечно тонкого кольца радиусом r , толщиной dr и высотой h . Поскольку $dV = (2\pi r)h dr$, то $dm = 2\pi\rho r h dr$.

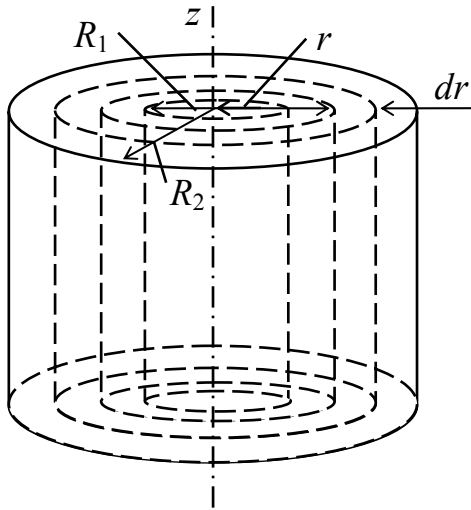


Рис. 4.8.1

Таким образом, момент инерции получается посредством интегрирования по всем кольцам:

$$I = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho h r^3 dr = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr =$$

$$= 2\pi\rho h \left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right] = \frac{1}{2} \pi\rho h (R_2^4 - R_1^4).$$

Поскольку $(R_2^4 - R_1^4) = (R_2^2 - R_1^2) \cdot (R_2^2 + R_1^2)$, то момент инерции равен

$$I = \frac{1}{2} \pi\rho h (R_2^2 - R_1^2) \cdot (R_2^2 + R_1^2).$$

Объем полого цилиндра $V = Sh = \pi h (R_2^2 - R_1^2)$, тогда его масса $m = \rho V = \pi\rho h (R_2^2 - R_1^2)$.

Таким образом, момент инерции полого цилиндра

$$I = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2). \quad (4.8.1)$$

2) Момент инерции тонкостенного цилиндра (обода). Используя формулу (4.8.1) и учитывая, что $R_1 = R_2 = R$, получим

$$I = mR^2. \quad (4.8.2)$$

3) Момент инерции однородного сплошного цилиндра (диска). Используя формулу (4.8.1) и учитывая, что в этом случае $R_1 = 0$ и $R_2 = R$, то момент инерции

$$I = \frac{1}{2} mR^2. \quad (4.8.3)$$

4) Момент инерции однородного шара.

Определим момент инерции однородного твердого шара ра-

диусом R , относительно оси, проходящей через его центр. Разобьем шар на бесконечно малые цилиндры высотой dy . Каждый такой цилиндр имеет радиус $r = \sqrt{R^2 - y^2}$. Тогда массу бесконечно малого цилиндра можем определить как

$$\begin{aligned} dm &= \rho dV = \rho S dy = \pi r^2 \rho dy = \\ &= \pi \rho (R^2 - y^2) dy. \end{aligned}$$

Следовательно, момент инерции любого бесконечно малого цилиндра можно записать в виде:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \pi \rho (R^2 - y^2)^2 dy = \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho (R^4 - 2R^2 y^2 + y^4) dy. \end{aligned}$$

Интегрируя по всем бесконечно малым цилиндрам, получим:

$$\begin{aligned} I &= \int dI = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \pi \rho (R^4 - 2R^2 y^2 + y^4) dy = \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 y^2 + y^4) dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = \frac{1}{2} \pi \rho \left(R^4 y - \frac{2}{3} R^2 y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{8}{15} \pi \rho R^5. \end{aligned}$$

Поскольку объем шара равен $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, то его масса $m = \rho V = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$. Таким образом, момент инерции шара будет равен

$$I = \frac{2}{5} m R^2. \quad (4.8.4)$$

5) *Момент инерции однородного стержня.* Момент инерции стержня длиной l относительно оси проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине:

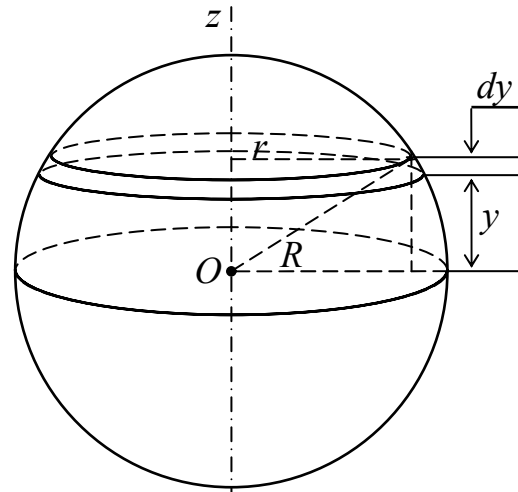


Рис. 4.8.2

$$I = \frac{1}{12}ml^2. \quad (4.8.5)$$

4.9. Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Линейная скорость элементарной массы m_i равна $v_i = \omega R_i$, где R_i – расстояние от элементарной массы до оси вращения. Кинетическая энергия этой элементарной массы получается выражением

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i \omega^2 R_i^2. \quad (4.9.1)$$

Кинетическая энергия тела складывается из кинетических энергий его частей, т. е.

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i R_i^2. \quad (4.9.2)$$

Так как величина $\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = I$ – есть момент инерции тела относительно оси вращения, то кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (4.9.3)$$

Рассмотрим плоское движение тела, которое может быть представлено как наложение двух движений – поступательного с некоторой скоростью \vec{v}_0 и вращательное вокруг соответствующей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела, т. е.

$$K = \frac{1}{2}m v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \omega^2. \quad (4.9.4)$$

4.10. Работа силы при вращении тела

Работа, совершаемая всеми приложенными к телу силами, идет на изменение его кинетической энергии:

$$\delta A = dK. \quad (4.10.1)$$

Подставим в последнее выражение уравнение (4.9.3) и продифференцируем

$$dK = d\left(\frac{1}{2}I_z\omega^2\right) = \frac{1}{2}I_z 2\omega d\omega = I\omega d\omega = I_z\omega \frac{d\omega}{dt} dt. \quad (4.10.2)$$

учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ и $\omega dt = d\varphi$, получим

$$dK = I_z\varepsilon\omega dt = M_z d\varphi. \quad (4.10.3)$$

Тогда элементарная работа, совершаемая силами, приложенными к телу

$$\delta A = M_z d\varphi, \quad (4.10.4)$$

и полная работа при повороте тела на угол φ за время t

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \quad (4.10.4)$$

5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Лекция № 7

5.1. Свободные гармонические колебания и их характеристики.

5.2. Сложение одинаково направленных и взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

5.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение.

5.4. Энергия гармонических колебаний.

5.5. Пружинный, математический и физический маятники.

5.1. Свободные гармонические колебания и их характеристики

Колебания – это движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебания, повторяются через равные промежутки времени. Наиболее важными характеристиками колебания являются: *смещение, амплитуда, период, частота, циклическая частота, фаза*.

Простейший вид периодических колебаний – это гармонические колебания. *Гармонические колебания* – это периодическое изменение во времени физической величины, происходящее по закону косинуса или синуса. Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega t + \varphi_1), \quad (5.1.1)$$

где $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$.

1) *Смещение* x – это величина, характеризующая колебания и равная отклонению тела от положения равновесия в данный момент времени.

2) *Амплитуда колебаний* A – это величина, равная максимальному отклонению тела от положения равновесия.

3) *Период колебаний* T – это наименьший промежуток времени, через который система, совершающая колебания, снова возвращается в то же состояние, в котором она находилась в начальный момент, выбранный произвольно. Единица измерения $[T] = 1 \text{ с}$.

За период система совершает одно полное колебание.

4) *Частота колебаний* ν – это величина, равная числу колебаний, совершаемых в единицу времени (за 1 секунду). Единица измерения $[\nu] = 1 \text{ Гц}$. Частота определяется по формуле

$$v = \frac{1}{T}. \quad (5.1.2)$$

5) *Циклическая частота* ω – это величина, равная числу полных колебаний, совершающихся за 2π секунд. За единицу циклической частоты принята угловая частота, при которой за время 1 с совершается 2π циклов колебаний, $[\omega] = \text{с}^{-1}$. Циклическая частота связана с периодом и частотой колебаний соотношением

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.1.3)$$

6) *Фаза колебаний* $\omega t + \varphi_0$ – фаза указывает местоположение колеблющейся точки в данный момент времени.

7) *Начальная фаза* φ_0 – указывает местоположение колеблющейся точки в момент времени $t = 0$.

5.2. Сложение одинаково направленных и взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

Сложение нескольких колебаний одинакового направления можно изображать графически с помощью метода *векторной диаграммы*.

Гармоническое колебание может быть представлено графически с помощью вращающегося вектора амплитуды \vec{A} . Для этого из произвольной точки O , выбранной на оси Ox , под углом φ_0 , равным начальной фазе колебания, откладывается вектор амплитуды \vec{A} . Модуль этого вектора равен амплитуде рассматриваемого колебания. Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω , равной циклической частоте колебаний, то проекция

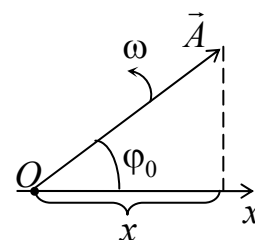


Рис. 5.2.1

конца вектора амплитуды будет перемещаться по оси Ox и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина изменяться со временем по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

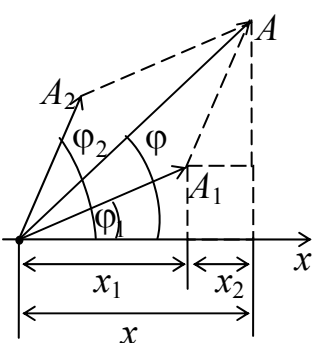


Рис. 5.2.2

Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω , равной циклической частоте колебаний, то проекция конца вектора амплитуды будет перемещаться по оси Ox и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина изменяться со временем по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

1. *Сложение одинаково направленных гармонических колебаний.*

Сложим два гармонических колебания одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой

смещений x_1 и x_2 , которые запишутся следующим образом:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (5.2.1)$$

Представим оба колебания на векторной диаграмме. Построим по правилу сложения векторов результирующий вектор \vec{A} . Проекция этого вектора на ось Ox равна сумме проекций слагаемых векторов $x = x_1 + x_2$, следовательно, вектор \vec{A} представляет собой результирующее колебание. Определим результирующий вектор амплитуды \vec{A} по теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \varphi. \quad (5.2.3)$$

Так как угол между векторами \vec{A}_1 и \vec{A}_2 равен $\varphi = \pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$, то $\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, следовательно, результирующая амплитуда колебания будет равна

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (5.2.4)$$

Определим начальную фазу результирующего колебания.

Из рисунка видно, что начальная фаза результирующего колебания

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (5.2.5)$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, также совершает гармонические колебания в том же направлении и с той же частотой.

2. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях. Допустим, что материальная точка совершает колебания как вдоль оси X , так и вдоль оси Y . Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний примут вид

$$x = A_1 \cos \omega t, \text{ и } y = A_2 \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.2.6)$$

где φ – разность фаз обоих колебаний.

Уравнение траектории получим, исключив из уравнений (5.2.6)

параметр времени t : $\cos \omega t = \frac{x}{A_1}$, а $\sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}$. Разложим косинус во втором из уравнений (5.2.6)

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cdot \sin \varphi. \quad (5.2.7)$$

Тогда

$$y = A_2 [\cos \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cdot \sin \varphi] = A_2 \left[\frac{x}{A_1} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi \right]. \quad (5.2.8)$$

Перепишем это уравнение в следующем виде

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi \Rightarrow \frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi. \quad (5.2.9)$$

После преобразования, получим

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{y}{A_2} \frac{x}{A_1} \cos \varphi + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \varphi. \quad (5.2.10)$$

Используя тригонометрическое тождество $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, окончательно получим

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (5.2.11)$$

Это есть уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно. Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят от амплитуд колебаний и разности фаз.

Рассмотрим несколько частных случаев и определим форму траектории для них:

а) разность фаз равна нулю [$\varphi = 0$].

В этом случае $\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0$, откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (5.2.12)$$

Результирующее движение является гармоническим колебанием

вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

2) разность фаз равна $\pm\pi$ [$\varphi = \pm\pi$].

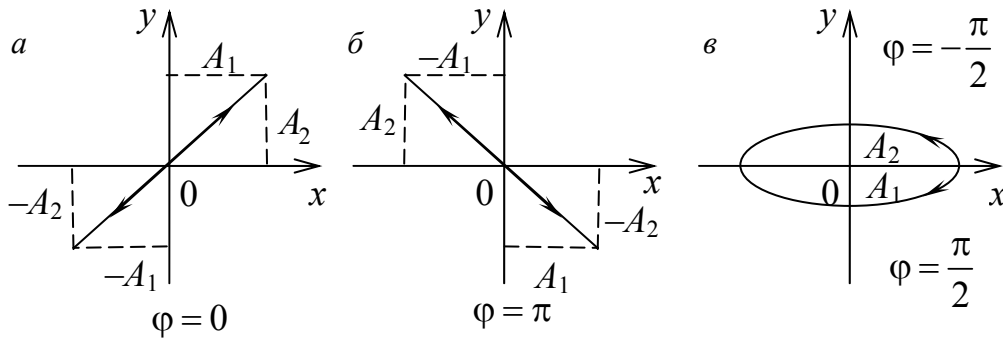


Рис. 5.2.3

В этом случае $\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$, откуда получается уравнение прямой

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x. \quad (5.2.13)$$

3) Разность фаз равна $\pm\frac{\pi}{2}$ [$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$]. Тогда

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (5.2.14)$$

Уравнение эллипса, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд колебаний эллипс вырождается в окружность. Случаи $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ отличаются направлением движения. Если $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, то уравнения колебаний имеют следующий вид: $x = A_1 \cos\omega t$, и $y = -A_2 \sin\omega t$ и движение совершается по часовой стрелке. Если $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, то уравнения колебаний имеют следующий вид: $x = A_1 \cos\omega t$, и $y = A_2 \sin\omega t$ и движение совершается против часовой стрелке.

Рассмотренные три частных случая представлены на рис. 5.2.3, а, б, в.

4) Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то траектория результирующего движения имеет вид сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. Форма этих кривых определяется соотношением амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний.

На рис. 5.2.4 показаны фигуры Лиссажу, которые получаются при соотношении частот 1:2 и различной разности фаз колебаний.

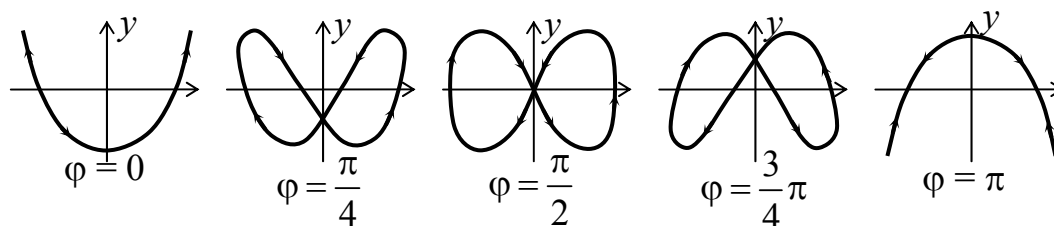


Рис. 5.2.4

По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной частоте или определить соотношение частот складываемых колебаний.

5.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение

Продифференцируем по времени уравнение гармонических колебаний

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (5.3.1)$$

и получим выражение для скорости

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (A \cos(\omega t + \varphi_0)) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Из сравнения уравнений (5.3.1) и (5.3.2) следует, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$. Амплитуда скорости равна $A\omega$.

Продифференцировав уравнение (2) еще раз по времени, получим выражение для ускорения

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (-A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = \\ &= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

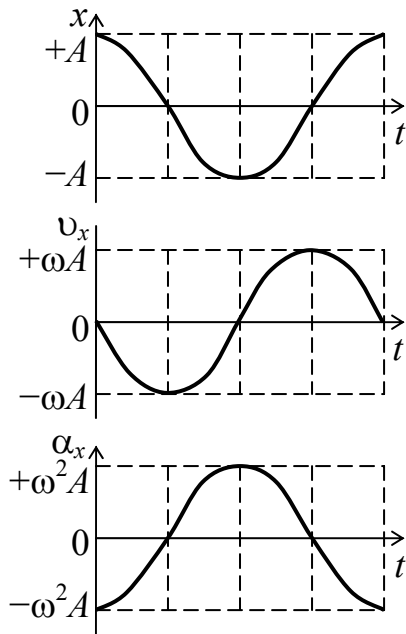


Рис. 5.3.1

Как следует из уравнения (5.3.3), ускорение и смещение находятся в противофазе. Это означает, что в тот момент времени, когда смещение достигает наибольшего, положительного значения, ускорение достигает наибольшего по величине отрицательного значения, и наоборот. Амплитуда ускорения равна $A\omega^2$ (рис. 5.3.1).

Из выражения (5.3.3) следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0, \quad (5.3.4)$$

где $x = A\cos(\omega t + \alpha)$.

Результирующая сила, действующая на материальную точку массой m , определяется с помощью второго закона Ньютона. Проекция этой силы

$$F = ma = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2x. \quad (5.3.5)$$

Эта сила пропорциональна смещению точки из положения равновесия и направлена в сторону противоположную этому смещению, т. е. она стремится вернуть точку в положение равновесия, и поэтому называется *возвращающей силой*. Таким образом, гармонические колебания происходят под действием силы F , пропорциональной смещению x и направленной к положению равновесия,

$$F = -kx, \quad (5.3.6)$$

где $k = m\omega^2$ – постоянный коэффициент. Возвращающая сила подобна упругим силам, возникающим в телах при их деформации. Такая зависимость силы от смещения характерна для упругой силы, поэтому силы иной физической природы, удовлетворяющие зависимости (5.3.6) называются *квазиупругими силами*.

Материальная точка, совершающая колебания под действием квазиупругой силы, называется *линейным осциллятором*. Ее динамическое поведение описывается дифференциальным уравнением

$$F = ma = -m\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.3.7)$$

ω_0 – собственная частота осциллятора.

Решение этого уравнения дает закон движения линейного осциллятора $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

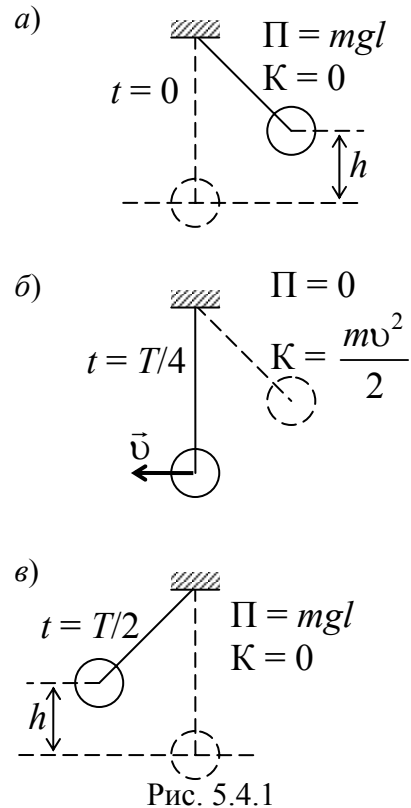
5.4. Энергия гармонических колебаний

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную энергию и обратно (рис. 5.4.1). В момент наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения. Далее при движении к положению равновесия потенциальная энергия уменьшается, при этом кинетическая энергия возрастает. При прохождении через положение равновесия полная энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в этот момент достигает своего наибольшего значения. Далее при движении к точке наибольшего отклонения происходит уменьшение кинетической и увеличение потенциальной энергии. И при наибольшем отклонении потенциальная опять максимальная, а кинетическая энергия равна нулю. И т. д.

Потенциальная энергия тела, совершающего гармонические колебания равна

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (5.4.1)$$

Кинетическая энергия тела, совершающего гармонические колебания равна



$$K = \frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0). \quad (5.4.2)$$

Таким образом, полная энергия гармонического колебания, состоящая из суммы кинетической и потенциальной энергий, определяется следующим образом

$$E = K + \Pi = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2. \quad (5.4.3)$$

Следовательно, полная энергия гармонического колебания

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{const}. \quad (5.4.4)$$

оказывается постоянной в случае гармонических колебаний.

Найдем среднее значение потенциальной энергии за период колебания

$$\begin{aligned} \langle \Pi \rangle &= \frac{1}{2} k A^2 \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2} k A^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \right] = \frac{1}{4} k A^2. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Аналогично получается для среднего значение кинетической энергии

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} k A^2 \langle \sin^2 \varphi \rangle = \frac{1}{4} k A^2. \quad (5.4.6)$$

Таким образом, и потенциальная, и кинетическая энергии изменяются относительно своих средних значений по гармоническому закону с частотой 2ω и амплитудой $\frac{1}{4} k A^2$.

5.5. Пружинный, математический и физический маятники

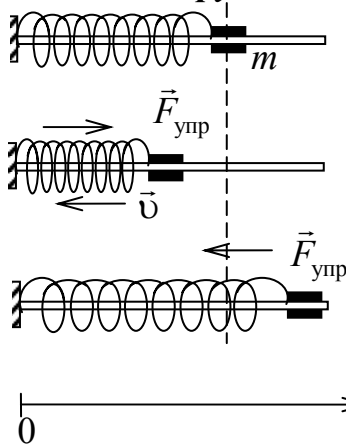


Рис. 5.5.1

Рассмотрим несколько простейших систем, совершающих свободные гармонические колебания.

1) *Пружинный маятник* – это материальная точка массой m , подвешенная (или

расположенная горизонтально) на абсолютно упругой пружине жесткостью k и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы. Пусть шайба массой m , прикрепленная к пружине, совершает колебания. Для составления дифференциального уравнения колебаний запишем второй закон Ньютона в проекции на ось Ox $F_{\text{упр}} = ma$. Упругая сила $F_{\text{упр}} = -kx$. Приравнявая последние два уравнения и, используя определение ускорения тела, получим

$$ma = -kx \quad \text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (5.5.1)$$

Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.5.2)$$

Сравнивая уравнения (5.3.7) и (5.5.2) получаем, что пружинный маятник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.5.3)$$

Так как период колебаний определяется по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, то *период колебаний пружинного маятника*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.5.4)$$

2) *Математический маятник* – это идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена материальная точка массой m . Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом φ , образованным нитью с вертикалью.

При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент \vec{M} , равный по величине $mglsin\varphi$. Он имеет такое же направление, что стремится вернуть маятник в положение равно-

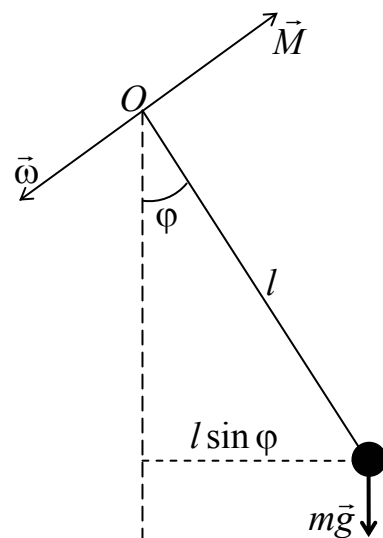


Рис. 5.5.2

веса. Следовательно, выражение для вращательного момента имеет вид: $M = -mgl \sin \varphi$. Применим основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon, \quad (5.5.5)$$

где $I = ml^2$ – момент инерции материальной точки. Тогда, учитывая, что угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, получим

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (5.5.6)$$

Если рассматривать малые колебания, то $\sin \varphi \approx \varphi$. Получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (5.5.7)$$

То есть при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется по гармоническому закону с частотой

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.5.8)$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.5.9)$$

3) *Физический маятник* – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку, не совпадающую с центром масс тела. При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен $M = -mgl \sin \varphi$.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения получаем

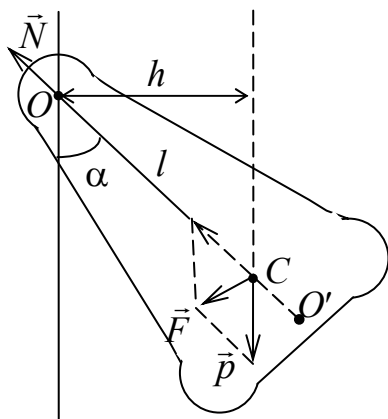


Рис. 5.5.3

$$I\varepsilon = M \Rightarrow I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi, \quad (5.5.10)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Если рассматривать малые колебания, то $\sin \varphi \approx \varphi$. Получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (5.5.11)$$

То есть при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется по гармоническому закону с частотой

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \quad (5.5.12)$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (5.5.13)$$

Из сопоставления формул периодов колебаний математического и физического маятников $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ и $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$ получается, что математический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml}. \quad (5.5.14)$$

будет иметь такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

Величина $l_{\text{пр}}$ (отрезок OO') называется *приведенной длиной физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника. Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, и лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качания (O') физического маятника. Точка подвеса O и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания.

5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Лекция № 8

5.6. *Затухающие гармонические колебания.*

5.7. *Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания.*

5.8. *Вынужденные колебания.*

5.9. *Резонанс.*

5.6. Затухающие гармонические колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, то колебания будут затухать. *Затухающие колебания* – это колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается. В простейшем, и вместе с тем наиболее часто встречающемся случае, сила сопротивления, вызывающая затухание, зависит от скорости колебательного движения, т. е. ее можно считать прямо пропорциональной скорости

$$\vec{F}_c = -\mu\vec{v}, \quad (5.6.1)$$

где μ – постоянная, называемая коэффициентом сопротивления.

Знак «минус» обусловлен тем, что сила и скорость имеют противоположные направления. Тогда второй закон Ньютона для гармонических колебаний при наличии сил сопротивления имеет вид

$$ma = -kx - r\upsilon. \quad (5.6.2)$$

Учитывая, что $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, а $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, и разделив на массу m , получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.6.3)$$

Применив обозначения $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{\mu}{m} = 2\beta$ получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 - \quad (5.6.4)$$

дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Отметим, что ω_0 представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свобод-

ные колебания системы в отсутствие сопротивления среды. Эта частота называется *собственной частотой*.

Для решения уравнения (5.6.4) сделаем подстановку

$$x = z \cdot e^{-\beta t} . \quad (5.6.5).$$

Проведем замену переменных

$$\frac{dx}{dt} = -\beta z \cdot e^{-\beta t} + \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} \quad \text{и}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-\beta z \cdot e^{-\beta t} + \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} \right) = \beta^2 z \cdot e^{-\beta t} - 2\beta \frac{dz}{dt} \cdot e^{-\beta t} + \frac{d^2 z}{dt^2} e^{-\beta t} . \quad (5.6.6)$$

Подставим (5.6.5 и 5.6.6) в выражение (5.6.4)

$$\beta^2 z \cdot e^{-\beta t} - 2\beta \frac{dz}{dt} \cdot e^{-\beta t} + \frac{d^2 z}{dt^2} e^{-\beta t} + 2\beta \left(-\beta z \cdot e^{-\beta t} + \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} \right) + \omega_0^2 z \cdot e^{-\beta t} = 0 . \quad (5.6.7)$$

Преобразуем, сократив на $e^{-\beta t}$

$$\beta^2 z - 2\beta \frac{dz}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\beta \left(-\beta z + \frac{dz}{dt} \right) + \omega_0^2 z = 0 \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) z = 0 . \quad (5.6.8)$$

Рассмотрим случай, когда сопротивление среды настолько мало, что $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ есть величина положительная, и мы можем ввести обозначение $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$, после чего уравнение (5.6.8) принимает вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0 . \quad (5.6.9)$$

В случае большого сопротивления среды $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$, движение становится неперiodическим.

Решение уравнения (5.6.8) можно записать в виде

$$z = A_0 \cos(\omega t + \varphi) . \quad (5.6.10)$$

Окончательно, подставляя последнее уравнение в выражение (5.6.5), получаем общее решение дифференциального уравнения зату-

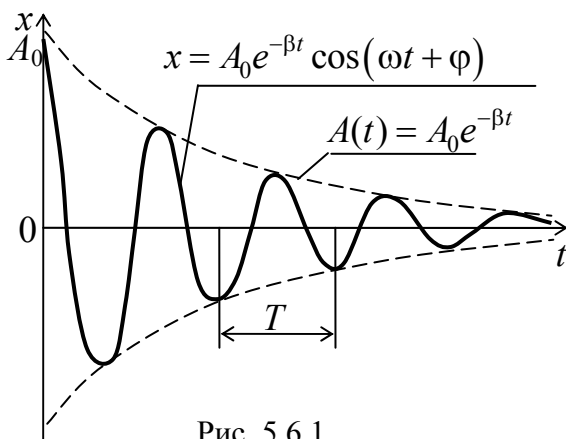


Рис. 5.6.1

хающих колебаний (5.6.4)

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad x = A(t) \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.6.11)$$

В соответствии с видом полученной функции движение можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2}, \quad (5.6.12)$$

периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2}} \quad (5.6.13)$$

и амплитудой, изменяющейся по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (5.6.14)$$

На рисунке показан график данной функции. Пунктирными линиями показаны пределы, в которых находится смещение колеблющейся точки. Верхняя из пунктирных кривых дает график функции $A(t)$, причем величина A_0 представляет собой амплитуду в начальный момент времени. Начальное смещение зависит от A_0 и также от начальной фазы φ , т. е. $x_0 = A_0 \cos \varphi$.

5.7. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

Отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \quad (5.7.1)$$

и называется *декрементом затухания*.

Для характеристики колебательной системы обычно используется *логарифмический декремент затухания*, т. е. логарифм декремента затухания

$$\delta = \ln \Delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (5.7.2)$$

Скорость затухания колебаний определяется величиной называемым коэффициентом затухания $\beta = \frac{\mu}{2m}$.

Найдем время, называемое *временем релаксации* τ , за которое амплитуда уменьшается в e раз

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e \Rightarrow \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e^1 \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (5.7.3)$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{1}{\tau}, \quad (5.7.4)$$

т. е. коэффициент затухания обратен по величине промежутку времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

За время релаксации τ система успевает совершить $N_e = \frac{\tau}{T}$ колебаний

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau\beta}{\delta} = \frac{1}{\delta}. \quad (5.7.5)$$

Следовательно, $\delta = \frac{1}{N_e}$ логарифмический декремент затухания

обратно пропорционален по величине числу колебаний, за которые амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Для характеристики колебательной системы используется величина

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e, \quad (5.7.6)$$

которая называется *добротностью колебательной системы*.

Величина Q , пропорциональная числу колебаний, совершаемых системой за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

5.8. Вынужденные колебания

До сих пор мы рассматривали свободные колебания, когда выведенная из положения равновесия система совершает колебания будучи предоставленной самой себе. Рассмотрим колебательную систе-

му, которая подвергается действию внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону $F = F_0 \cos \omega t$. Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы, называются вынужденными колебаниями. В этом случае уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$ma = -kx - \mu v + F_0 \cos \omega t. \quad (5.8.1)$$

Учитывая, что $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, а $v = \frac{dx}{dt}$ и разделив на массу m , получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (5.8.2)$$

Применив обозначения $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{\mu}{m} = 2\beta$ и $\frac{F_0}{m} = f_0$ получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (5.8.3)$$

дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

Будем искать решение уравнения (5.8.3) в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.8.4)$$

предполагая, что результирующее колебание будет совершаться с частотой внешней вынуждающей силы.

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi); \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.8.5)$$

Подставим (5.8.4) и (5.8.5) в уравнение (5.8.3)

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A\omega \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t. \quad (5.8.6)$$

$$(A\omega_0^2 - A\omega^2) \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A\omega \sin(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t. \quad (5.8.7)$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi; \quad (5.8.8)$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \sin \varphi + \sin \omega t \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} & (A\omega_0^2 - A\omega^2)(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) - \\ & - 2\beta A\omega(\cos \omega t \sin \varphi + \sin \omega t \cos \varphi) = f_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (5.8.9)$$

Чтобы уравнение (69) обратилось в тождество необходимо, чтобы коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ были равны нулю.

$$\begin{aligned} (A\omega_0^2 - A\omega^2) \cos \varphi - 2\beta A\omega \sin \varphi &= f_0 \quad \text{и} \\ -(A\omega_0^2 - A\omega^2) \sin \varphi - 2\beta A\omega \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5.8.10)$$

Из выражения (71) получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.8.11)$$

Возведем в квадрат уравнения (70) и сложим

$$\begin{aligned} (A\omega_0^2 - A\omega^2)^2 + (2\beta A\omega)^2 &= f_0^2. \quad (5.8.12) \\ A^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] &= f_0^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A^2 &= \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (5.8.13) \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения (71) и (73) в выражение (64) получим уравнение вынужденных колебаний

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos \left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (5.8.14)$$

5.9. Резонанс

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы называется *резонансом*, а соответствующая частота — *резонансной частотой*.

Найдем резонансную частоту. Амплитуда вынужденных колебаний будет max, когда выражение $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$ в уравнении

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (5.8.13) \text{ будет минимальным.}$$

Продифференцируем это выражение по ω и приравняем к нулю

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \right] = 0 &\Rightarrow -2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 8\beta^2\omega = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega \left[-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

Полученное уравнение имеет три решения: $\omega = 0$ и $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Первое решение соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное не имеет физического смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, резонансная циклическая частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} . \quad (5.9.2)$$

Подставив это значение в выражение для амплитуды (5.8.13), получим выражение для амплитуды при резонансе

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} . \quad (5.9.3)$$

Из последнего уравнения (5.9.3) следует, что при отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность, а резонансная частота, согласно (5.9.2), при тех же условиях (при $\beta = 0$), совпадала бы с собственной частотой колебаний системы ω_0 .

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 . \quad (5.9.4)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы показана графически на рис. 5.9.1. В соответствии с (5.9.2) и (5.9.3), чем меньше параметр β , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Изображенная на рис. 5.9.1 совокупность графиков функций (5.8.13), соответствующих различным значениям параметра β , называется *резонансными кривыми*.

При стремлении ω к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению, равному f_0/ω_0^2 . Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы величины F_0 .

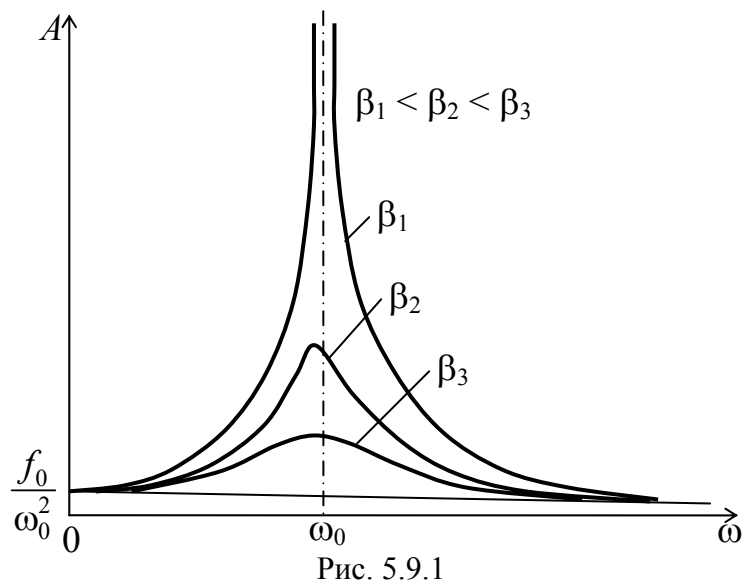


Рис. 5.9.1

При стремлении ω к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при большой частоте сила так быстро изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия.

Наконец, отметим, что чем меньше β , тем сильнее изменяется с частотой амплитуда вблизи резонанса, тем «острее» получается максимум. При малом затухании (т. е. $\beta \ll \omega_0$) амплитуда при резонансе приближенно равна $A_{\text{рез}} \approx f_0/2\beta\omega_0$. Разделим это выражение на смещение x_0 из положения равновесия под действием постоянной силы F_0 , равное $x_0 = f_0/\omega_0^2$. В результате получим

$$\frac{A_{\text{рез}}}{x_0} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \frac{\omega_0^2}{f_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta} = Q, \quad (5.9.5)$$

где $\delta = \beta T$ – логарифмический декремент затухания (5.7.2); Q – добротность колебательной системы (5.7.6).

Таким образом, добротность Q показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы. Следует отметить, что это справедливо лишь при небольшом затухании.

6. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Лекция № 9

- 6.1. Распространение колебаний в упругой среде.
- 6.2. Уравнение плоской волны.
- 6.3. Волновое уравнение.
- 6.4. Скорость распространения волн в различных средах.

6.1. Распространение колебаний в упругой среде

Механические колебания, распространяющиеся в упругой среде (твердой, жидкой или газообразной), называются механическими или упругими волнами.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется волновым процессом или волной. Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение. Они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому *основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.*

В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают *продольные* и *поперечные* волны.

Упругая волна называется *продольной*, если колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемной деформацией растяжения – сжатия среды, поэтому они могут распространяться как в твердых телах, так и в жидкостях и газообразных средах.

Упругая волна называется *поперечной*, если колебания частиц

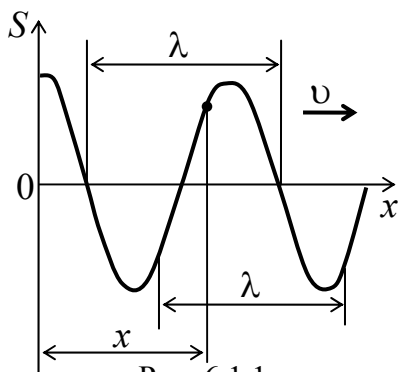


Рис. 6.1.1

среды происходят в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Поперечные волны могут возникать только в такой среде, которая обладает упругостью формы, т. е. способна сопротивляться деформации сдвига. Этим свойством обладают только твердые тела.

На рис. 6.1.1 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся вдоль оси Ox . График волны дает за-

висимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени. Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны*. Длина волны также равна тому расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период колебаний

$$\lambda = \nu T = \frac{\nu}{\nu} . \quad (9.1.1)$$

Колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси Ox , а совокупность частиц, заключенных в некотором объеме. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется *фронтом волны*. Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической. В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей, а в сферической – множество концентрических сфер.

6.2. Уравнение плоской волны

Уравнением плоской волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы как функцию ее координат x, y, z и времени t

$$S = S(x, y, z, t) . \quad (6.2.1)$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени t , так и относительно координат x, y, z . Периодичность по времени вытекает из того, что смещение S описывает колебания частицы с координатами x, y, z , а периодичность по координатам следует из того, что точки, отстоящие друг от друга на расстоянии, равном длине волны, колеблются одинаковым образом.

Предположим, что колебания носят гармонический характер, а ось Ox совпадает с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярны оси Ox и, поскольку все

точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение S будет зависеть только от координаты x и времени t

$$S = S(x, t). \quad (6.2.2).$$

Рассмотрим некоторую частицу среды, находящуюся от источника колебаний O на расстоянии x . Пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$ имеют вид

$$S(0; t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (6.2.3)$$

Найдем вид колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению x . Для того, чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до плоскости x , волне требуется время $\tau = x/v$. Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости x , будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$ и описываться уравнением

$$S(x; t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]. \quad (6.2.4)$$

где A — амплитуда волны; φ_0 — начальная фаза волны (определяется выбором начал отсчета x и t).

Зафиксируем какое-либо значение фазы $\omega(t - x/v) + \varphi_0 = \text{const}$. Это выражение определяет связь между временем t и тем местом x , в котором фаза имеет фиксированное значение. Продифференцировав данное выражение, получим

$$\omega\left(dt - \frac{1}{v} dx\right) = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt}. \quad (6.2.5)$$

Таким образом, скорость распространения волны есть скорость перемещения фазы, и называется *фазовой скоростью*.

При $v > 0$ волна распространяется в сторону возрастания x . Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, описывается уравнением

$$S(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]. \quad (6.2.6)$$

Придадим уравнению плоской волны симметричный относительно x и t вид. Для этого введем величину $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, которая называ-

ется *волновым числом*, которое можно представить в виде

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{\nu}. \quad (6.2.7)$$

Тогда уравнение плоской волны будет иметь вид

$$S(x;t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\nu}x + \varphi_0\right) \Rightarrow S(x;t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (6.2.8)$$

Мы предполагали, что амплитуда колебаний не зависит от x . Для плоской волны это наблюдается в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении в поглощающей среде интенсивность волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается, т. е. наблюдается затухание волны. В однородной среде такое затухание происходит по экспоненциальному закону $A = A_0 e^{-\beta x}$. Тогда уравнение плоской волны для поглощающей среды имеет вид

$$S(x,t) = A_0 e^{-\beta x} \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (6.2.9)$$

6.3. Волновое уравнение

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, будет иметь вид

$$S = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0), \quad (6.3.1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, точки волны; $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$ – *волновой вектор*; \vec{n} – единичный вектор нормали к волновой поверхности.

Волновой вектор – это вектор, равный по модулю волновому числу k и имеющий направление нормали к волновой поверхности называется.

Перейдем от радиус-вектора точки к ее координатам x, y, z

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (6.3.2)$$

Тогда уравнение (6.3.1) примет вид

$$S(x, y, z; t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0). \quad (6.3.3)$$

Установим вид волнового уравнения. Для этого найдем вторые частные производные по координатам и времени выражение (6.3.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2 S; \\
\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= -k_x^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_x^2 S \\
\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= -k_y^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_y^2 S; \\
\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= -k_z^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_z^2 S
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Сложив производные по координатам, и с учетом производной по времени, получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) S = -k^2 S = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \tag{6.3.5}$$

Произведем замену $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{v^2} \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$ и получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \tag{6.3.6}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

6.4. Скорость распространения волн в различных средах

Для определения скорости упругих волн в упругой среде рассмотрим продольную плоскую волну, распространяющуюся в направлении оси Ox . Выделим в среде цилиндрический объем с площадью основания S_0 и высотой dx . Смещения S частиц с разными x в каждый момент времени оказываются различными. Если основание цилиндра с координатой x имеет в некоторый момент времени смещение S , то смещение основания с координатой $x + dx$ будет $S + dS$. Тогда, рассматриваемый объем деформируется и получает удлинение dS или относительную деформацию $\varepsilon = \partial S / \partial x$ (деформации растяжения). Наличие деформации свидетельствует о существовании нормального напряжения σ , которое при малых деформациях пропорционального величине деформации. По закону Гука для деформации растяжения – сжатия

$$\sigma = \frac{F}{S_0} = E\varepsilon = E \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (6.4.1)$$

где E – модуль Юнга среды.

Из зависимости смещения от координаты x видно, что относительная деформация $\partial S/\partial x$, а также, и напряжение σ в фиксированный момент времени зависят от x . В соответствии с этим, продольная волна состоит из чередующихся разрежений и сжатий среды.

Теперь для цилиндрического объема запишем уравнение движения. Масса этого объема

$$dm = \rho S_0 dx. \quad (6.4.2)$$

где ρ – плотность недеформированной среды.

Ввиду малости dx можно считать ускорение всех точек цилиндра одинаковым и равным

$$a = d^2 S / dt^2. \quad (6.4.3)$$

Тогда этот участок объема будет растянут под влиянием сил F_1 и F_2 , приложенных к основаниям цилиндра в данный момент времени. Силы, действующие на левое и правое основание цилиндра равны, соответственно

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_1 S_0 = E\varepsilon_1 S_0 = E \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_x S_0 \\ F_2 &= \sigma_2 S_0 = E\varepsilon_2 S_0 = E \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x+dx} S_0 \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

После разложения силы F_2 в ряд, получим

$$F_2 = ES_0 \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x+dx} = ES_0 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) \Big|_x dx \right) = ES_0 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_x + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_x dx \right), \quad (6.4.5)$$

и результирующая F_1 , F_2 сил, действующая на элемент объема равна

$$F = F_2 - F_1 = ES_0 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_x + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_x dx \right) - ES_0 \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_x = ES_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_x dx. \quad (6.4.6)$$

Используя основное уравнение динамики поступательного движения (2.1.2) и, подставив значения массы, ускорения и силы, получим

$$\begin{aligned} \rho S_0 dx \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= S_0 E \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} dx \Rightarrow \\ \rho \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= E \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Из сравнения этого уравнения с волновым уравнением для плоской волны (6.3.6) $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$, получим

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\rho}{E} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.4.8)$$

где E – модуль Юнга.

Полученное уравнение определяет *фазовую скорость продольных упругих волн*.

Если проделать аналогичные преобразования для поперечных упругих волн, то *фазовая скорость поперечных упругих волн* будет иметь следующий вид

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (6.4.9)$$

где G – модуль сдвига.

6. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Лекция № 10

6.5. Волновой перенос энергии и его характеристики: поток, плотность потока, интенсивность.

6.6. Фазовая и групповая скорости волн.

6.7. Интерференция упругих волн.

6.8. Стоячие волны.

6.5. Волновой перенос энергии и его характеристики: поток, плотность потока, интенсивность

Пусть в некоторой среде распространяется в направлении оси Ox плоская продольная волна $S = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$. Выделим в среде элементарный объем ΔV , настолько малый, чтобы скорость движения и деформацию во всех точках этого объема можно было считать одинаковыми и равными. Выделенный объем обладает кинетической энергией $K = \frac{1}{2} m v^2$. Если масса $m = \rho \Delta V$, а $v = \frac{\partial S}{\partial t}$, то

$$K = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \Delta V. \quad (6.5.1)$$

Потенциальная энергия упругой деформации рассматриваемого объема

$$\Pi = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{ESl_0}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 = \frac{E\Delta V}{2} \varepsilon^2, \quad (6.5.2)$$

где $k = \frac{ES}{l_0}$; l_0 – первоначальная длина рассматриваемого объема;

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ – относительная деформация объема; $\Delta V = Sl_0$ – первоначальный объем. Используя формулу (6.4.8) и, учитывая, что $\varepsilon = \partial S / \partial x$, получим

$$\Pi = \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \Delta V. \quad (6.5.3)$$

Тогда полная энергия упругой волны

$$W = K + \Pi = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V. \quad (6.5.4)$$

Определим плотность энергии, разделив (6.5.4) на объем ΔV

$$w = \frac{W}{\Delta V} = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (6.5.5)$$

Продифференцируем уравнение плоской продольной волны (6.2.8) по времени t и по координате x и подставим выражения в формулу (6.5.5) учтя, что $k^2 v^2 = \omega^2$

$$\begin{aligned} w &= \frac{\rho}{2} \left[A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi) + v^2 k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi) \right] = \\ &= \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi) \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

Среднее значение квадрата синуса равно 1/2. Соответственно среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды равно

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (6.5.7)$$

Таким образом, плотность энергии и среднее значение плотности энергии пропорциональны плотности среды ρ , квадрату частоты ω и квадрату амплитуды волны A .

Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется *поток энергии* через эту поверхность. Поток энергии Φ через данную поверхность равен энергии dW переносимой за время dt

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (6.5.8)$$

Φ измеряется в ваттах.

Для характеристики распространения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, называемая *плотностью потока энергии*. Плотность потока энергии численно равна потоку энергии через единичную площадку ΔS , помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением

ем переноса энергии.

Если через площадку ΔS , перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится энергия ΔW за время Δt , то плотность потока энергии равна

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} = \frac{\Delta W}{\Delta S \Delta t}. \quad (6.5.9)$$

Рассмотрим объем цилиндра с основанием ΔS и высотой $v \Delta t$ (v – фазовая скорость волны). В случае малого объема цилиндра, плотность энергии во всех точках цилиндра можно было считать одинаковой и поэтому энергию можно найти как произведение плотности энергии w на объем $\Delta V = \Delta S v \Delta t$

$$\Delta W = w \Delta V = w \Delta S v \Delta t. \quad (6.5.10)$$

Подставив выражение (6.5.10) в последнее выражение, получим

$$j = \frac{w \Delta S v \Delta t}{\Delta S \Delta t} = w v \quad \text{или} \quad \vec{j} = \omega \vec{v}, \quad (6.5.11)$$

где \vec{j} – вектор плотности потока энергии, называемый *вектором Умова*.

Интенсивность волны равна

$$I = \langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (6.5.12)$$

Данное выражение справедливо для волны любого вида.

Определим поток энергии через поверхность S . Для этого разобьем поверхность на элементарные участки dS . За время dt через площадку dS пройдет энергия dW . Объем цилиндра, где вычисляется энергия, равен $dV = v dt dS \cos \varphi$. Тогда в этом объеме содержится энергия

$$dW = w dV = w v dt dS \cos \varphi = j dS \cos \varphi = \vec{j} d\vec{S} dt, \quad (6.5.13)$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности dS .

Поток энергии через элементарную поверхность dS

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{j} d\vec{S} dt}{dt} = \vec{j} d\vec{S}. \quad (6.5.14)$$

Поток энергии через поверхность S равен

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (6.5.15)$$

6.6. Фазовая и групповая скорости волн

Скорость распространения волны есть скорость перемещения фазы и называется фазовой скоростью. Фазовая скорость равна

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (6.6.1)$$

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности, и к ним применим принцип суперпозиции волн: при распространении в линейной среде (т. е. среде с неизменяющимися свойствами) нескольких волн, каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.

Используя принципа суперпозиции, любая волна может быть представлена в виде волнового пакета. Волновым пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства. Простейший волновой пакет двух распространяющихся вдоль положительного направления оси X гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами, причем

$$d\omega \ll \omega \quad \text{и} \quad dk \ll k. \quad (6.6.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} S &= A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

Эта волна отличается от гармонической тем, что ее амплитуда

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \quad (6.6.4)$$

медленно изменяющаяся функция координаты x и времени t .

За скорость распространения волнового пакета принимают ско-

рость перемещения максимума амплитуды волны. При условии, что $td\omega - xdk = \text{const}$, получим

$$d(td\omega - xdk) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = v_{\text{гр}}, \quad (6.6.5)$$

где $v_{\text{гр}}$ – групповая скорость. Рассмотрим связь между групповой и фазовой скоростями. Учитывая, что волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и

$$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{k}{\lambda} d\lambda, \text{ получим}$$

$$v_{\text{сп}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \left(\frac{dv}{-\frac{k}{\lambda} d\lambda} \right) = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (6.6.6)$$

В теории относительности доказывается, что групповая скорость $v_{\text{гр}} \leq c$, в то время как для фазовой скорости ограничений не существует.

6.7. Интерференция упругих волн

Для того чтобы рассмотреть интерференцию волн, введем понятие *когерентности*. Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов связано с понятием когерентности. Волны называются *когерентными*, если разность их фаз остается постоянной во времени. При наложении в пространстве двух или нескольких когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется интерференцией волн, и заключается в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других ослабляют друг друга.

Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками S_1 и S_2 , колеблющимися с одинаковыми амплитудой, частотой, нулевой начальной фазой и постоянной разностью фаз. Запишем уравнения колебаний:

$$S_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1) = \frac{A_0}{r_1} \cos \varphi_1, \quad S_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2) = \frac{A_0}{r_2} \cos \varphi_2, \quad (6.7.1)$$

где r_1 и r_2 – расстояния от источников волн до рассматриваемой точки.

Амплитуда результирующей волны равна (сложение одинаково направленных колебаний)

$$A^2 = \frac{A_0^2}{r_1^2} + \frac{A_0^2}{r_2^2} + \frac{2A_0^2}{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{A_0^2}{r_1^2} + \frac{A_0^2}{r_2^2} + \frac{2A_0^2}{r_1 r_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right). \quad (6.7.2)$$

Так как разность начальных фаз $(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \text{const}$, то результат наложения двух волн в различных точках зависит от величины $\Delta = r_2 - r_1$, называемой разностью хода волн.

В точках, где выполняется условие $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \pm 2m\pi \Rightarrow \Delta = \pm m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$ – порядок максимума)

$$A^2 = \left(\frac{A_0^2}{r_1^2} + \frac{A_0^2}{r_2^2} + \frac{2A_0^2}{r_1 r_2}\right) \Rightarrow A = \frac{A_0}{r_1} + \frac{A_0}{r_2}. \quad (6.7.3)$$

Так как квадрат амплитуды колебаний пропорционален интенсивности волны, то получаем

$$I = (I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}) > (I_1 + I_2). \quad (6.7.4)$$

То есть наблюдается усиление интенсивности (увеличение амплитуды) результирующей волны или интерференционный максимум.

2) В точках, где выполняется условие $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) = -1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \pm(\pi + 2m\pi) \Rightarrow \Delta = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$)

$$A^2 = \left(\frac{A_0^2}{r_1^2} + \frac{A_0^2}{r_2^2} - \frac{2A_0^2}{r_1 r_2}\right) \Rightarrow A = \frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2}. \quad (6.7.5)$$

$$I = (I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}) < (I_1 + I_2) \quad (6.7.6)$$

То есть наблюдается ослабление интенсивности (уменьшение амплитуды) результирующей волны или интерференционный минимум.

Таким образом, в результате наложения двух когерентных волн в среде возникают колебания, амплитуда которых различна в разных

точках среды, при этом в каждой точке среды получается или максимум амплитуды, или минимум амплитуды, или ее промежуточное значение – в зависимости от значения разности расстояний точки до когерентных источников. Интерференция света приводит к перераспределению энергии волны между соседними областями, хотя в среднем для больших областей энергия остается неизменной.

6.8. Стоячие волны

Рассмотрим интерференцию стоячих волн. Стоячие волны – это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Запишем уравнение двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси X в противоположных направлениях

$$S_1 = A \cos(\omega t - kx) \quad \text{и} \quad S_2 = A \cos(\omega t + kx). \quad (6.8.1)$$

Сложив вместе эти уравнения и преобразовав результат по формуле для суммы косинусов, получим уравнение стоячей волны

$$S = S_1 + S_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t. \quad (6.8.2)$$

Из данного уравнения видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда зависит от координаты x

$$A(x) = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}. \quad (6.8.3)$$

Точки, в которых амплитуда колебаний достигает максимального значения и координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm m\pi \Rightarrow x = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad (6.8.4)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ называются пучностями стоячей волны.

Точки, в которых амплитуда колебаний обращается в нуль и координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \Rightarrow x = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad (6.8.5)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ называются узлами стоячей волны.

7. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Лекция № 11

7.1. *Границы применимости классической механики.*

7.2. *Постулаты Эйнштейна.*

7.3. *Преобразования Лоренца.*

7.4. *Следствия из преобразований Лоренца.*

7.5. *Теорема сложения скоростей в СТО.*

7.1. Границы применимости классической механики

Классическая механика (иначе механика Ньютона) предопределило развитие физической науки, так как в ней были сформулированы количественные закономерности механического движения. В классической механике устанавливается способ описания движения материальных точек, что дает возможность теоретического объяснения механических явлений, встречающихся в природе.

Механика Ньютона покоится на прочном фундаменте экспериментальных фактов, однако все они относятся к медленным движениям макроскопических тел. Под *медленными* или *нерелятивистскими движениями* понимают движения, скорости которых очень малы по сравнению со скоростью света в вакууме $c = 300\,000$ км/с. Движения, скорости которых приближаются к скорости света в вакууме, называют *быстрыми* или *релятивистскими*. В этом смысле движение спутника или космического корабля со скоростью $v = 8$ км/с является еще очень медленным.

Теория относительности Эйнштейна предсказала, а опыт подтвердил это предсказание, что механика Ньютона не может быть применима к движениям частиц, скорости которых близки к скорости света в вакууме. На основе теории относительности была создана новая механика, применимая не только к медленным, но и к сколь угодно быстрым движениям. Она называется *релятивистской механикой*.

Согласно механике Ньютона скорость, до которой можно ускорить тело из состояния покоя, в принципе ничем не ограничена. По релятивистской механике значение скорости ускоряемого тела не может перейти через определенный предел, равный скорости света в вакууме c . В этом смысле скорость света c является *предельной*. Скорость тела не может ее достигнуть, но в принципе может подойти к ней сколь угодно близко.

Теория относительности установила границы применимости ньютоновской механики со стороны *больших скоростей*. Другое огра-

ничество, и притом не только ньютоновской, но и релятивистской макроскопической механики, было получено в результате изучения *микромира* – мира атомов, молекул, электронов.

При изучении микромира физики сначала применяли понятия и законы, введенные и установленные для макроскопических тел. Электрон, например, рассматривался как твердый или деформируемый шарик, по объему которого как-то распределен электрический заряд. Считалось, что поведение электрона управляется теми же законами механики и электродинамики, которые были экспериментально установлены для макроскопических электрически заряженных тел. Считалось, что все понятия и законы макроскопической физики применимы и имеют смысл для тел сколь угодно малых размеров и для сколь угодно малых промежутков времени. Считалось, что для понимания явлений микромира не требуется новых понятий и законов, помимо тех, которыми располагает макроскопическая физика. Короче, микромир рассматривался просто как уменьшенная копия макромира. Такой подход к изучению явлений природы и теории, основанные на нем, называются *классическими*.

Опыты показали, что *классический подход к изучению явлений микромира не применим*, или точнее, *его применимость к этому кругу явлений ограничена*. Адекватное описание явлений микромира (применимое, конечно, также в каких-то пределах) дает *квантовая механика*, существенно отличающаяся от механики классической. Движение в микромире является более сложной формой движения, чем механическое перемещение тел в пространстве.

Таким образом, механика Ньютона имеет очень широкую и практически важную область применимости. В пределах этой области она никогда не утратит своего научного и практического значения. Отказываться от механики Ньютона надо лишь вне области ее применимости, когда она приводит либо к неверным, либо к недостаточно точным результатам. Такова, например, задача о движении заряженных частиц в ускорителях, где надо пользоваться релятивистской механикой. Таковы задачи о движении электронов в атомах, которые надо решать с помощью квантовой механики.

В классической механике состояние движения частицы в любой момент времени характеризуется положением (координатой x при одномерном движении) и скоростью \vec{v} . Вместо скорости можно пользоваться также импульсом, т. е. величиной $\vec{p} = m\vec{v}$, равной произ-

ведению массы частицы m на ее скорость). Образом частицы является геометрическая точка, описывающая с течением времени непрерывную траекторию. В квантовой механике показано, что такой способ описания движения имеет принципиальные границы применимости.

Согласно квантовой механике состояние частицы в каждый момент времени нельзя характеризовать точными значениями ее координаты и импульса в этот момент времени. Если в каком-либо состоянии координата известна с неопределенностью δx , а импульс – с неопределенностью δp , то обе эти величины одновременно не могут быть сделаны сколь угодно малыми. Они связаны соотношением

$$\delta x \cdot \delta p \geq h, \quad (7.1.1)$$

где h – универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка* в честь немецкого физика-теоретика Макса Планка (1858–1947).

Соотношение (7.1.1) называется *принципом неопределенностей Гайзенберга* по имени немецкого физика-теоретика Вернера Гайзенберга (1901–1976). Это соотношение определяет принципиальный предел точности одновременного измерения координаты и импульса частицы, который не может быть превзойден никаким усовершенствованием приборов и методов измерения. Дело здесь не в ошибках измерений. Такова природа реальных частиц, что мгновенные состояния их движения не могут быть охарактеризованы классически – точными значениями координат и импульсов. Частицы ведут себя более сложно, чем материальные точки классической механики. Классическая картина движения по непрерывным траекториям лишь приближенно соответствует законам природы. Границы ее применимости определяются соотношением неопределенностей (7.1.1). Из него следует, что мгновенное состояние движения частицы нельзя также характеризовать абсолютно точными значениями координаты и скорости. Неопределенности этих величин должны удовлетворять условию

$$\delta x \cdot m\delta v \geq h. \quad (7.1.2)$$

Таким образом, применимость классической механики имеет следующие границы:

- 1) классическая механика применима для описания механических систем, в которых скорость составляющих ее объектов намного меньше скорости света ($v \ll c$);
- 2) классическая механика применима для описания только тех

объектов, для которых динамические величины с размерностью действия намного больше постоянной Планка.

7.2. Постулаты Эйнштейна

В основе специальной теории относительности А. Эйнштейна лежат *два постулата*, смысл которых можно выразить так:

1. При одинаковых условиях, реализованных по отдельности в двух системах отсчета некоторой инерциальной системы K (I) и системы K' (II), движущейся равномерно и прямолинейно относительно системы I любые физические процессы в этих системах отсчета протекают одинаково, а описывающие их математические соотношения не изменяют своего вида при переходе из одной системы в другую. Этот постулат является обобщением механического принципа относительности Галилея на все без исключения физические явления.

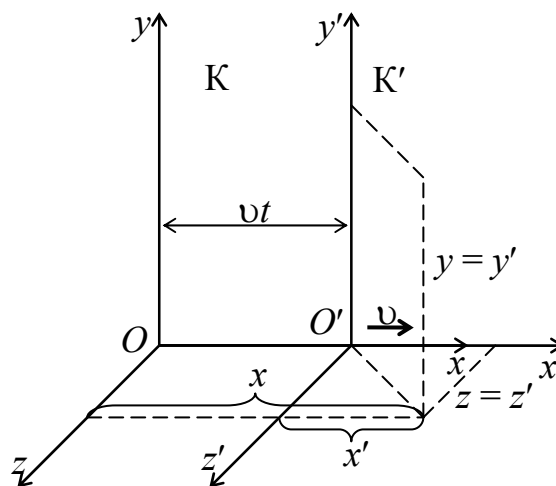


Рис. 7.2.1

2. В природе существует предельная (максимальная) скорость распространения физических сигналов (взаимодействий), одна и та же во всех инерциальных системах отсчета. Эта максимальная скорость совпадает со скоростью света в вакууме, она не зависит от движения источника и приемника света и равна $c = 300\,000$ км/с.

$$c = \text{inv.} \quad (7.2.1)$$

Из первого принципа следует: если для данной задачи (некоторого класса задач) найдена инерциальная система отсчета I, то для этой задачи существует и бесчисленное множество инерциальных систем типа II, движущихся равномерно прямолинейно относительно I. Скорости всех систем II меньше c . Системы отсчета необходимо связывать с телами, а скорости тел не могут равняться или превосходить максимальную скорость света в вакууме, равную c . Скорости тел строго меньше максимальной.

Развитие науки показало, что оба принципа Эйнштейна подтверждаются всей совокупностью экспериментальных и теоретиче-

ских знаний современной физики.

7.3. Преобразования Лоренца

Любой физический процесс – это последовательность событий. Событие определяется местом (координатами), где оно произошло, и моментом времени, когда оно произошло.

Пусть координаты некоторого события в системе отсчета I равны x, y, z , а в системе II они x', y', z' (рис. 7.2.1). Установим связь между ними, исходя из принципов Эйнштейна, которая должна быть линейной, т. к. закон инерции подтверждается при всех скоростях, вплоть до максимальной скорости c (движение по прямой линии в системе I остается таковым и в системе II). Поэтому форма связи должна быть следующей:

$$x' = \alpha(x - vt), \quad x = \alpha(x' + vt'), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (7.3.1)$$

Множитель α в обеих формулах один и тот же, т. к. системы I и II совершенно равноправны. Формулы (7.3.1) относятся к любым событиям, а множитель α можно определить, рассматривая какое-либо частное событие. Для определения α , рассмотрим распространение света в направлении оси абсцисс от начала координат приход света в точку x_1 в момент t_1 (в системе I), что также означает приход его в точку x'_1 в момент t'_1 (в системе II).

В соответствии со вторым принципом Эйнштейна, путь света в системе I и II равен

$$x_1 = ct_1, \quad x'_1 = ct'_1 \quad (7.3.2)$$

и два равенства должны выполняться на основе формул (7.3.1)

$$x'_1 = \alpha(x_1 - vt_1), \quad x_1 = \alpha(x'_1 + vt'_1). \quad (7.3.3)$$

Если два равенства (7.3.3) перемножить $x_1 x'_1$ и заменить на основании (7.3.2) через $c^2 t_1 t'_1$, то, после сокращения на $t_1 t'_1$, получим $c^2 = \alpha^2(c^2 - v^2)$, откуда

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (7.3.4)$$

Подставляя найденное значение α в формулы (7.3.1), получим

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (7.3.5)$$

Из второй формулы (7.3.5) легко определить t' (после подстановки x'). Тогда окончательно имеем

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (7.3.6)$$

Такова связь между координатами (включая время) одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета I и II (штрихованная система I движется относительно не штрихованной II со скоростью v в направлении оси x).

Не составляет труда преобразовать формулы (7.3.6) к виду

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (7.3.7)$$

что означает, что относительно системы K' система K движется в отрицательном направлении оси x' с той же самой скоростью v .

Формулы (7.3.6) известны в науке как *прямые преобразования Лоренца*, а формулы (7.3.7) *обратные преобразования Лоренца*. Вся физическая теория (механика, электродинамика и др.) подлежала после их открытия такой перестройке, чтобы связи (7.3.6) и (7.3.7) были учтены. Это было осуществлено в специальной теории относительности (сначала в электродинамике Эйнштейном; позже – в механике).

7.4. Следствия из преобразований Лоренца

1) *Относительность одновременности.* Одновременность пространственно разделенных событий относительна. По определению, два события, которые происходят в разных точках x_1 и x_2 системы K , являются одновременными, если они происходят в один и тот же момент времени $t_1 = t_2$ ($\Delta t = 0$) по часам, расположенным в

этих точках. При этом предполагается, что часы синхронизированы согласно определению Эйнштейна. В системе K' эти же события произойдут в точках с координатами x'_1 и x'_2 в моменты времени t'_1 и t'_2 . Используя преобразования Лоренца, покажем, что события, одновременные в системе K , в системе K' будут происходить в разные моменты времени. Воспользуемся преобразованиями Лоренца (7.3.6)

$$t'_1 = \frac{t_1 - x_1 v / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad t'_2 = \frac{t_2 - x_2 v / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (7.4.1)$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (x_2 - x_1) v / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad \Delta t' = \frac{(x_2 - x_1) v / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq 0 . \quad (7.4.2)$$

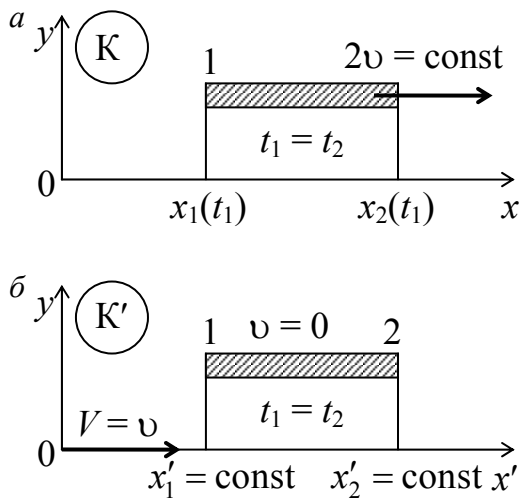


Рис. 7.4.1

Поэтому наблюдатели в системе K' зафиксируют эти события как неодновременные $t'_1 \neq t'_2$. Справедливо и обратное утверждение – события, одновременные в ИСО K' , не одновременны в ИСО K . Это явление известно как *относительность одновременности* и возникает из-за ограниченности скорости распространения взаимодействий.

2) *Сокращение длины движущихся тел.* Длиной движущегося тела в некоторой системе отсчета,

по определению, называется расстояние между двумя точками этой системы координат, с которыми совпадают начало и конец тела в один и тот же момент времени по часам, расположенным в этих же точках используемой системы (рис. 7.4.1). Это значит, что $l = x_2 - x_1$, если $t_2 = t_1$. В собственной системе отсчета K' , в которой рассматриваемый объект покоится, собственная длина тела, $l_0 = x'_2 - x'_1$. Воспользуемся преобразованиями Лоренца (7.3.6).

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7.4.3)$$

Соответственно, длина l линейки, измеренная в ИСО K , всегда меньше l_0 – так называемой собственной длины, измеренной в системе покоя линейки K' . Это явление называется *релятивистским сокращением длин* и помимо данного кинематического рассмотрения может быть выведено также и динамически из изменения сил, действующих между частицами вещества при его движении.

3) *Интервал времени между двумя событиями.* Собственным временем τ_0 называется интервал времени между двумя событиями, которые произошли в одной и той же точке собственной системы: отсчета, связанной с движущимся со скоростью v объектом. Это значит, что в системе K' время $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ определяется при условии, что $x'_2 = x'_1$, т. е. события происходят в одной и той же точке системы K' , которая движется равномерно и прямолинейно с скоростью v . С учетом сказанного из преобразования Лоренца следует

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + x'_2 v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + x'_1 v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.4.4)$$

7.5. Теорема сложения скоростей в СТО

Формула преобразования скоростей в СТО устанавливает связь между проекциями скорости точки в двух произвольных инерциальных системах отсчета. Пусть в системах отсчета K и K' движение материальной точки определяется координатным способом

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad \text{и} \quad x' = x'(t'), y' = y'(t'), z' = z'(t'). \quad (7.5.1)$$

Тогда проекции скорости

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad \text{и} \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (7.5.2)$$

Воспользуемся преобразованиями Лоренца (7.3.7) и продифференцируем

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + dx'v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.5.3)$$

и получим

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + dx'v/c^2} = \frac{v'_x + v}{1 + v'_x v/c^2}, \quad (7.5.4)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt' + dx'v/c^2} = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + v'_x v/c^2}, \quad (7.5.5)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + v'_x v/c^2}. \quad (7.5.6)$$

Выражения (7.5.4–7.5.6) являются формулами преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета в другую (*релятивистский закон сложения скоростей*).

Если аналогичные действия проделать с обратными преобразованиями Лоренца в форме (7.3.6), то получим выражение для скоростей в системе K' через скорости в системе K .

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - v_x v/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - v_x v/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - v_x v/c^2}. \quad (7.5.7)$$

7. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Лекция № 12

7.6. Импульс в релятивистской механике.

7.7. Релятивистские законы Ньютона.

7.8. Энергия релятивистской частицы. Закон взаимосвязи массы и энергии.

7.9. Связь между энергией и импульсом частицы.

7.6. Импульс в релятивистской механике

Принцип относительности СТО предполагает, что все уравнения релятивистской динамики должны быть инвариантными относительно преобразований Лоренца. Поэтому инвариантность формулируемых законов движения в релятивистской механике является определяющим критерием того, что они правильно отражают физическую реальность.

В классической механике Ньютона импульс определяется соотношением $\vec{p} = m\vec{v}$. Требование, что в релятивистской механике (как и в механике Ньютона) для изолированной системы тел в любой инерциальной системе отсчета выполнялся закон сохранения импульса, и учет законов преобразования скоростей при переходе из одной системы отсчета в другую, приводит к тому, что импульс релятивистской частицы будет определяться выражением

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.6.1)$$

где $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ – релятивистская масса движущейся частицы; m_0 –

массой покоя частицы, т. е. масса частицы в собственной системе отсчета.

Выражение (7.6.1) позволяет сделать важнейший вывод: в релятивистской динамике масса частицы зависит от скорости ее движения. При $v \ll c$ (это соотношение всегда выполняется в классической механике), получаем $m = m_0 = \text{const}$.

7.7. Релятивистские законы Ньютона

Первый закон Ньютона, являющийся выражением принципа

относительности, сохраняет свою классическую формулировку в релятивистской динамике.

Выражение для *второго закона Ньютона* в релятивистской механике также сохраняет свою классическую формулировку при условии, что импульс определяется по формуле (7.6.1)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (7.7.1)$$

Релятивистское уравнение (7.7.1) инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Третий закон Ньютона в релятивистской динамике справедлив только для контактных сил. В классической механике для сил, действующих на расстоянии, предполагается мгновенная передача взаимодействия без материального посредника. Это несовместимо с релятивистским положением о том, что максимальная скорость передачи взаимодействия не может быть больше скорости света в вакууме. Поэтому для взаимодействий с конечной скоростью распространения третий закон Ньютона в своей классической формулировке неприменим.

7.8. Энергия релятивистской частицы. Закон взаимосвязи массы и энергии

Понятие энергии в релятивистской механике сохраняет тот же смысл, что и в классической механике. Однако требование инвариантности уравнений релятивистской механики относительно преобразований Лоренца приводит к установлению взаимосвязи между энергией E и массой m частицы, а также к изменению выражения для ее кинетической энергии K .

Найдем выражение для кинетической энергии материальной точки в релятивистской механике. Изменение кинетической энергии материальной точки при элементарном перемещении $d\vec{r}$ равно работе, совершаемой силой \vec{F} , действующей на точку, при этом перемещении

$$dK = dA = \vec{F} d\vec{r}. \quad (7.8.1)$$

Воспользуемся релятивистским выражением второго закона Ньютона (7.7.1), и с учетом $d\vec{r} = \vec{v} dt$ получаем

$$dK = \vec{F}d\vec{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) d\vec{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \vec{v} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dK = \vec{v} d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (7.8.2)$$

С учетом $\vec{v}d\vec{v} = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$ из выражения (7.8.2) получаем

$$K = \vec{v} d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{v} \left(\frac{m_0 d\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m_0 \vec{v} (\vec{v}d\vec{v}/c^2)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right) =$$

$$= \vec{v} \left(\frac{m_0 d\vec{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} - \frac{m_0 (v^2 d\vec{v}/c^2)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right) = \vec{v} \left(\frac{m_0 d\vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right) = \frac{m_0 d(v^2/2)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{m_0 c^2 d(v^2/c^2)}{2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow dK = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (7.8.3)$$

Интегрирование уравнения (7.8.3) приводит к выражению

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + C, \quad (7.8.4)$$

где C – постоянная интегрирования.

Найдем постоянную интегрирования C . Для этого воспользуемся условием, что при $v = 0$ кинетическая энергия K должна быть тоже равна нулю. С учетом этого из выражения (7.8.4) получаем $C = -m_0 c^2$. Таким образом, *релятивистское выражение для кинетической энергии* имеет вид

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \quad (7.8.5)$$

Величина

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \quad (7.8.6)$$

называется *полной энергией свободной частицы* (при отсутствии внешних полей).

Величина

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (7.8.7)$$

называется *энергией покоя* (при $v = 0$).

С учетом формул (7.8.6, 7.8.7) выражение для кинетической энергии (7.8.5) можно записать в виде

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2. \quad (7.8.8)$$

При $v \ll c$, с учетом $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$, получаем выра-

жение для кинетической энергии в классической механике

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2}. \quad (7.8.9)$$

Таким образом, при малых скоростях движения материальной точки ее кинетическая энергия, вычисленная по релятивистской формуле (7.8.5), совпадает с выражением (7.8.9) для энергии в классической механике.

Из соотношения (7.8.6) следует также важный вывод: энергия тела пропорциональна его релятивистской массе. Всякое изменение энергии тела сопровождается изменением его релятивистской массы и, наоборот, всякое изменение релятивистской массы сопровождается изменением энергии тела

$$\Delta E = \Delta mc^2. \quad (7.8.10)$$

Это утверждение носит название *закона взаимосвязи релятивистской массы и энергии*.

7.9. Связь между энергией и импульсом частицы

Для установления взаимосвязи между энергией и импульсом частицы возведем в квадрат выражение для релятивистской массы

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Тогда получим

$$\left(m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 = m_0^2 \Rightarrow m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2. \quad (7.9.1)$$

Умножим выражение (7.9.1) на c^2 и преобразуем

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4 \Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = E_0^2 \Rightarrow E^2 = E_0^2 + p^2 c^2. \quad (7.9.2)$$

Используя выражение (7.9.2) можно выразить энергию частицы через ее импульс

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}, \quad (7.9.3)$$

или импульс частицы через ее энергию

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2}. \quad (7.9.4)$$

А с учетом выражения (7.8.8) из (7.9.4) получим

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(E - E_0)(E + E_0)} = \frac{1}{c} \sqrt{K(K + 2E_0)}. \quad (7.9.5)$$

8. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Лекция № 13

8.1. *Корпускулярно-волновой дуализм материи.*

8.2. *Волновые свойства микрочастиц. Опыт Дэвиссона и Джермера.*

8.3. *Волновая функция и ее статистический смысл.*

8.4. *Уравнение Шредингера.*

Квантовая механика – механика микромира. Она представляет собой физическую теорию, которая описывает явления атомного масштаба, т. е. явления, лежащие в основе свойств атомов, молекул, атомных ядер.

8.1. Корпускулярно-волновой дуализм материи.

В результате изучения свойств света выяснилось, что в оптических явлениях обнаруживается своеобразная двойственность природы света. С одной стороны, известно, что в экспериментах по интерференции и дифракции света наглядно проявляются его волновые свойства. С другой стороны, в других экспериментах обнаруживаются его корпускулярные свойства (фотоэффект, явление Комптона). Объяснение этой ситуации можно найти, если принять, что свет имеет *двойственную природу*: в одних экспериментах свет проявляет себя как поток частиц, в других – как типичный волновой процесс. Двойственная природа света нашла свое отражение в *принципе дополнительности*, который был сформулирован Н. Бором. Он является *фундаментальным принципом квантовой механики*, поскольку позволяет понять процессы, которые происходят в микромире. Согласно принципу дополнительности, корпускулярные и волновые свойства света как бы дополняют друг друга и только вместе дают полное понимание того, что представляет собой свет. Двойственная природа света получила название *корпускулярно-волнового дуализма* и явилась исходным пунктом для становления квантовой механики.

В 1924 г. французский физик Луи де Бройль, опираясь на представления о симметрии свойств в природе, высказал гипотезу том, что *поскольку свет ведет себя в одних случаях как волна, а в других как квазичастица, то и материальные частицы должны обладать волновыми свойствами*. Де Бройль предположил, что каждой частице, обладающей импульсом p , должна соответствовать длина волны, связанная с модулем импульса p тем же соотношением, что и для фотона,

т. е. дебройлевская длина волны частицы

$$\lambda_{\text{Бр}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\nu}. \quad (8.1.1)$$

Смелость мысли де Бройля заключалась не только в ее новизне и необычности, но и в универсальности. Ведь, согласно де Бройлю, любой материальный объект, имеющий импульс, обладает одновременно корпускулярными и волновыми свойствами, ненаблюдаемость волновых свойств у классических объектов обусловлена тем, что типичные волновые явления – интерференция и дифракция проявляются только тогда, когда размеры этих объектов сопоставимы с длиной волны де Бройля. Например, для пылинки массой 10^{-12} кг движущейся со скоростью $\nu \sim 10^{-4}$ м/с длина волны де Бройля равна $\sim 6,63 \cdot 10^{-18}$ м. Но в природе нет предметов или щелей, размеры которых сопоставимы с такой длиной волны. Поэтому нельзя наблюдать волновые свойства объектов, изучаемых в классической физике. А например, для электрона, ускоренного разностью потенциалов $U = 50$ В, длина волны де Бройля равна $1,74 \cdot 10^{-10}$ м, что уже сопоставимо с межатомными расстояниями в кристалле.

8.2. Волновые свойства микрочастиц. Опыт Дэвиссона и Джермера

Волновые свойства электронов экспериментально были обнаружены в 1927 г. независимо К. Дэвиссоном и Л. Джермером, а также Дж. Томсоном и П. Тартаковским.

Опыт Дэвиссона и Джермера заключалось в том, что они исследовали отражение медленных электронов (с энергией около 50 эВ) от поверхности монокристалла никеля. Схема опыта представлена на рис. 8.2.1. Пучок электронов падал на поверхность монокристалла никеля, структура которого была хорошо известна из данных рентгеноструктурного анализа. Рассеянные электроны улавливались специальным электродом С, подключенным к чувствительному гальванометру. Электрод мог перемещаться так, чтобы улавливать электроны под различными угла-

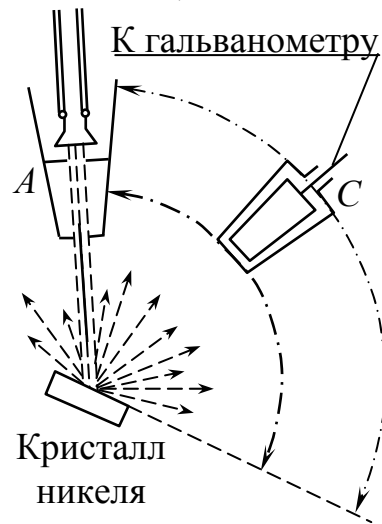


Рис. 8.2.1

ми. В частности при энергии 54 эВ, получался максимум интенсивности отраженный электронов для угла отражения 50° . Длина волны де Бройля для электронов с такой энергией составляет, согласно формуле (8.1.1), $\lambda_{\text{Бр}} = 16,7$ нм. Под таким углом можно было наблюдать максимум интенсивности рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 16,7$ нм. Данные результаты прекрасно доказывали правильность идеи де Бройля.

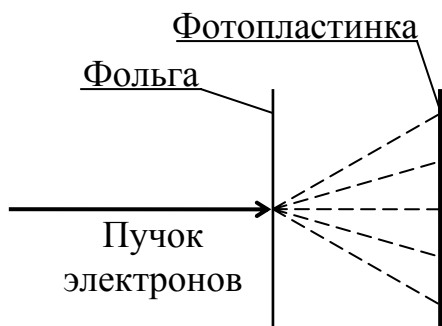


Рис. 8.2.2

Томсон и Тартаковский в своих опытах пропускали пучок более быстрых электронов (с энергией в несколько десятков кэВ) через металлическую фольгу. Схема опыта на рис. 8.2.2. Пучок ускоренных электронов проходил через тонкую металлическую фольгу и попадал на фотопластинку. Электрон при ударе о фотопластинку оказывает на нее такое же действие, как и фотон. Полученная таким

способом электронограмма (рис. 8.2.3, а) была сопоставлена с полученной в аналогичных условиях рентгенограммой (рис. 8.2.3, б). Сходство обеих картин поразительно. Пользуясь подобными фотографиями, Томсон проверил формулу де Бройля и определил по полученным значениям и формуле (8.1.1) период кристаллической решетки металла, через который проходили электроны. Результаты совпали с известными ранее данными рентгеноструктурного анализа.

За исследования, блестяще подтвердившие представления квантовой механики, Дэвиссон и Томсон были награждены в 1937 г. Нобелевской премией по физике. Однако их работы не просто подтвердили идею де Бройля, а привели к созданию таких мощных и распространенных методов исследования вещества, как *дифракция медленных электронов и просвечивающая электронная микроскопия*. В настоящее время дифракция электронов на кристаллической решетке является мощным инструментом изучения структуры твердого тела. Как показали более позд-

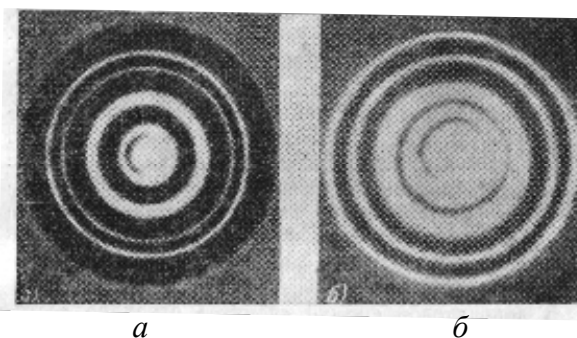


Рис. 8.2.3

ние эксперименты, волновыми свойствами обладают также протоны, нейтроны и другие элементарные частицы.

8.3. Волновая функция и ее статистический смысл

Соотношение между импульсом p частицы и длиной волны де Бройля $\lambda_{\text{Бр}}$, справедливость которого подтверждена экспериментально, привело к убеждению, что для описания состояния микрочастицы нужно воспользоваться некоторым волновым образованием. В квантовой механике такому волновому образованию соответствует функция координат и времени, получившая название *волновой функции* $\Psi(x, y, z, t)$. Она выступает как основной *носитель информации* о корпускулярных и волновых свойствах микрочастицы. Поясним смысл волновой функции на примере интерпретации опыта по прохождению электронов через две щели.

Пусть на экран, где имеются две щели, расстояние между которыми сравнимо с дебройлевской длиной волны, направлен поток ускоренных электронов со строго фиксированным импульсом (рис. 8.3.1, а). Причем интенсивность потока настолько мала, что на экран в каждый относительно малый промежуток времени, необходимый для регистрации

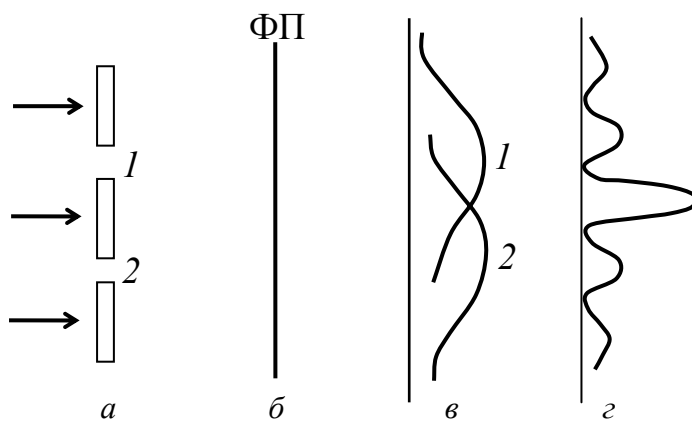


Рис. 8.3.1

отдельной частицы, попадает только один электрон. Прошедшие через две щели электроны можно регистрировать различными методами, но во всех случаях они проявляют себя как отдельные частицы, случайно попадающие в различные места экрана. Однако за длительный промежуток времени пространственное распределение интенсивности (например, степени почернения фотопластинки ФП), которая пропорциональна количеству электронов, попавших на единичный участок фотопластинки, имеет вид регулярно чередующихся минимумов и максимумов рис. 8.3.1, г. Если оставить открытой только первую или вторую щель, то распределение интенсивностей будет определяться кривыми, изображенными на рис. 8.3.1, в (кривые 1 и 2). Сопоставление кривых показывает, что распределение интенсивности (рис.

8.3.1, в) не является суммой интенсивностей I_1 и I_2 . В этом случае кривая распределения интенсивности от двух щелей имеет вид, соответствующий типичной интерференционной картине, когда в одних точках экрана наблюдается *усиление*, а в других – *ослабление* интенсивности. Объяснить наблюдаемое распределение интенсивности электронов можно только в рамках двух следующих предположений, не имеющих аналога в классической физике.

1. Электрон при прохождении через экран, в котором открыты обе щели, проявляет себя как *волновой объект*, одновременно проходящий через обе щели: волновая функция электрона, попадающего на экран, является суммой волновых функций Ψ_1 и Ψ_2 , каждая из которых описывает состояние электрона, когда открыта соответственно только первая и только вторая щель:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (8.3.1)$$

Это утверждение совпадает с правилом сложения волн и является частным случаем одного из важнейших принципов квантовой механики – *принципа суперпозиции для волновых функций*: *если для физической системы возможно состояние с волновой функцией Ψ_1 и состояние с волновой функцией Ψ_2 может реализоваться и смешанное состояние с волновой функцией*

$$\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2, \quad (8.3.2)$$

где a и b – некоторые комплексные или действительные числа.

В рассмотренном эксперименте (рис. 8.3.1) волновая функция электрона в случае с обеими открытыми щелями является суперпозицией волновых функций электрона в опытах с поочередно открытой первой или второй щелью. Справа от экрана со щелями эти волновые функции накладываются и дают типичную интерференционную картину. Так можно объяснить механизм прохождения электронами щелей.

Различие принципов суперпозиции квантовой и классической физики состоит в следующем. Если в классической физике имеются, например, два одинаковых колебания, то в результате их суперпозиции получается новое колебание. Причем физические величины в новом колебании имеют, вообще говоря, иные значения, чем в исходных колебаниях. В квантовой теории сложение двух одинаковых состояний сводится к умножению волновой функции на постоянную величину и, следовательно, приводит к тому же состоянию, потому что волновые функции, отличающиеся постоянным множителем, описы-

вают одно и то же состояние. Физические величины в результате такой суперпозиции не изменяют своих значений, потому что не изменяется состояние. Принцип суперпозиции показывает, что из имеющихся квантовых состояний можно образовать многими способами новые состояния и каждое состояние можно рассматривать как результат суперпозиции двух или многих других состояний, причем бесконечным числом способов. Суперпозиция квантовых состояний является физическим принципом, но представление состояния как результата суперпозиции других состояний является чисто математической процедурой и всегда независимо от физических условий. Однако насколько это целесообразно, и какое именно представление целесообразно, зависит от конкретных физических условий.

2. Квадрат амплитуды световой волны определяет плотность вероятности попадания фотона в соответствующую точку пространства. Точно так же квадрат модуля волновой функции $\Psi(x, y, z, t)$ определяет *плотность вероятности* того, что в заданный момент времени t квантовая частица находится в точке пространства с координатами x, y, z :

$$|\Psi|^2 = f(x, y, z, t). \quad (8.3.3)$$

Это выражение получило название *постулата Борна*.

Квадрат модуля комплексной волновой функции определяется соотношением

$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*. \quad (8.3.4)$$

Это важное и, как оказалось, правильное утверждение М. Борна, высказанное в 1926 г., *дает статистическую, т. е. вероятностную, интерпретацию квадрата модуля волновой функции*.

Тем самым удалось совместить свойства микрочастиц интерферировать со свойством регистрироваться по отдельности. Предложенная Борном трактовка сущности волновой функции, и в частности волны де Бройля для свободной частицы, принципиально отличает ее от упругой волны в сплошной среде и электромагнитных волн. Вместе с тем аналогия волновых процессов различной природы позволяет обосновать утверждение (8.3.3) с точки зрения обычных волн.

Вероятность dp того, что частица находится в элементе объема dV равна

$$dp = f dV = |\Psi|^2 dV. \quad (8.3.5)$$

Вероятность найти частицу в конечном объеме V определяют как

$$p = \int_V dp = \int_V |\Psi|^2 dV. \quad (8.3.6)$$

Если частица находится в неограниченном пространстве, то вероятность ее обнаружения в нем равна единице, отсюда следует условие нормировки волновой функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1. \quad (8.3.7)$$

8.4. Уравнение Шредингера

Построение квантовой механики невозможно без уравнения, которое позволило бы по заданным внешним силовым полям и начальным условиям описывать движение частицы в пространстве и во времени. Состояние квантовой частицы определяется плотностью вероятности нахождения частицы в момент времени t в точке с координатами x, y, z . Плотность вероятности задается квадратом модуля волновой функции $|\Psi(x, y, z, t)|^2$. Поэтому искомое уравнение должно быть уравнением относительно волновой функцией $\Psi(x, y, z, t)$. Также это уравнение должно обладать некоторыми чертами, присущими волновому уравнению для упругих волн, поскольку оно призвано учитывать волновые свойства микрочастиц. Эту задачу решил Шредингер, который написал в 1926 г. уравнение, решая которое можно находить волновую функцию:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi, \quad (8.4.1)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; m – масса частицы; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле.

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (8.4.2)$$

Выражение (8.4.1) называют *временным уравнением Шредингера*. Оно является основным уравнением нерелятивистской квантовой механики. Как и уравнение для второго закона Ньютона, не выводится, а постулируется. Критерием его справедливости является хорошее согласие результатов, полученных на основе формулы (8.4.1), с экспе-

риментальными данными в атомной и ядерной физике.

В тех случаях, когда частица находится в стационарных потенциальных силовых полях (потенциальная энергия U не зависит от времени), то решение уравнения (8.4.1) можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координат, а другая только от времени

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} = \psi(x, y, z) \cdot e^{-\frac{iEt}{\hbar}}, \quad (8.4.3)$$

где E – полная энергия частицы, которая в случае стационарности поля остается неизменной.

Подставим функцию (8.4.3) во временное уравнение Шредингера (8.4.1)

$$i\hbar \left(-\frac{iE}{\hbar} \right) \psi(x, y, z) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} + U \psi(x, y, z) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (8.4.4)$$

Сократив выражение (8.4.4) на величину $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ получим

$$E\psi(x, y, z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + U\psi(x, y, z). \quad (8.4.5)$$

Преобразуем выражение (10.4.5)

$$\Delta \psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi(x, y, z) = 0. \quad (8.4.6)$$

Выражение (8.4.6) называется *стационарным уравнением Шредингера*.

Функции $\psi(x, y, z)$, являющиеся решениями уравнения (8.4.6), называются *собственными функциями*. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнения вида (8.4.6) в ряде случаев имеют решения не при всех значениях энергии E , а лишь при определенных ее значениях. Значения энергии E , при которых имеет место решение уравнения Шредингера, называют *собственными значениями энергии*. Собственные значения энергии E могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд значений энергии. В первом случае говорят о *непрерывном*, во втором – о *дискретном спектре энергии*.

Лекция № 14

8.6. Волновая функция свободной частицы.

8.7. Соотношение неопределенностей.

8.8. Уровни энергии и волновая функция частицы, находящейся в прямоугольной потенциальной яме.

8.6. Волновая функция свободной частицы

Рассмотрим волновую функцию свободной микрочастицы, которая имеет определенные значения импульса p и энергии E , т. е. движется со скоростью v , например, вдоль оси Ox ($p_y = p_z = 0$). Так как из опытов следует, что параллельный пучок элементарных частиц обладает свойствами плоской волны распространяющейся в направлении скорости частиц, то рассмотрим в общем виде плоскую волну распространяющуюся вдоль Ox . Запишем волновую функцию свободной частицы в комплексном виде по аналогии с уравнением плоской волны

$$\Psi = Ae^{-i(\omega t - kx)} = A \cos(\omega t - kx) - i \sin(\omega t - kx). \quad (8.6.1)$$

Преобразуем выражение (8.6.1), используя формулы взаимосвязи импульса p и энергии E частицы (корпускулярных характеристик) с волновым числом k и циклической частотой ω (с волновыми характеристиками частицы)

$$E = h\nu = h \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{E}{h} = \frac{E}{\hbar}, \quad (8.6.2)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h/p} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}. \quad (8.6.3)$$

Подставим (8.6.2–8.6.3) в уравнение (8.6.1) и получим

$$\Psi = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}, \quad (8.6.4)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка.

Представим уравнение (8.6.4) в виде

$$\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}px} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = \psi e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (8.6.5)$$

где $\psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}px}$ – амплитудная часть волновой функции, зависящая

только от координаты.

Применим к ψ оператор Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(A e^{\frac{i}{\hbar} px} \right) = A \left(\frac{i}{\hbar} p \right)^2 e^{\frac{i}{\hbar} px} = \\ &= -\frac{m^2 v^2}{\hbar^2} \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{mv^2}{2} \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} K \psi \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

и получим уравнение Шредингера для свободной частицы

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} K \psi = 0. \quad (8.6.7)$$

Обобщим это уравнение для несвободной частицы, заменив кинетическую энергию K на разность между полной энергией E и потенциальной энергией U :

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0, \quad (8.6.8)$$

где U – потенциальная энергия частицы в стационарных потенциальных силовых полях.

Уравнение (8.6.8) является стационарным уравнением Шредингера. Изложенные выше рассуждения не могут рассматриваться как вывод уравнения Шредингера. Однако они показывают, на примере свободной частицы, каким образом можно прийти к установлению этого уравнения.

8.7. Соотношение неопределенностей

Открытие корпускулярно-волнового дуализма стало важным шагом для понимания того, что присущее классической физике противопоставление частиц и волн не имеет места для объектов микромира. Электроны, фотоны, нейтроны и другие микрочастицы в одних случаях ведут себя как частицы, в других проявляют свои волновые свойства. Это значит, что объекты микромира не являются ни классическими частицами, ни классическими волнами и для изучения их свойств не применимы ни классические методы описания частиц, ни классические методы описания волн. В этом случае состояние микрочастиц описывается волновой функцией Ψ (волнами материи).

Рассмотрим состояния свободной микрочастицы, описываемой волной де Бройля (8.6.1), запишем волновую функцию для частицы и

комплексно сопряженную ее волновую функцию

$$\Psi = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}, \quad \Psi^* = Ae^{+\frac{i}{\hbar}(Et-px)}. \quad (8.7.1)$$

Найдем плотность вероятности обнаружения микрочастицы на оси Ox :

$$f(x,t) = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} Ae^{+\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = A^2. \quad (8.7.2)$$

Таким образом, свободная микрочастица с импульсом p и энергией E с одинаковой плотностью вероятности может быть обнаружена в любой точке оси Ox .

Из выражения (8.7.2) следует, если вектор импульса \vec{p} постоянен (свободная частица), то ее квантово-механическое состояние описывается плоской волной де Бройля (8.6.1), которая приводит к однородному распределению плотности вероятности. Поскольку плотность вероятности обнаружить такую квантовую частицу в каждой точке бесконечного пространства одинакова, мы фактически ничего не можем сказать о ее координате x в любой заданный момент времени t , т. е. при *фиксированном* значении импульса координатах частицы *не определена*. Это один из примеров «парадоксов квантовой механики» (в классической механике Ньютона каждому значению координаты x соответствует определенное значение импульса движущейся частицы).

Таким образом, частица не имеет определенных значений координаты, импульса, энергии. Можно лишь в общем случае утверждать, что значения x, y, z, p, E лежат в пределах соответствующих интервалах координат $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, импульса $(\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z)$ и энергии (ΔE) , которые связаны *соотношениями неопределенностей Гейзенберга*:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar, \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar, \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar, \\ \Delta t \Delta E &\geq \hbar. \end{aligned} \quad (8.7.3)$$

В соответствии с формулами (8.7.3) принцип Гейзенберга гласит: *любая квантовая система не может находиться в состояниях, в которых координаты ее центра инерции (для частицы – координаты частицы) и импульс одновременно принимают вполне определенные значения.*

Это значит, что для квантовой частицы нельзя одновременно указать точные значения координат и проекций импульса. В квантовой механике теряет смысл понятие траектории движения частицы, так как если мы точно определим значения координат, то ничего не сможем сказать о направлении ее движения (т. е. импульсе), и наоборот.

8.8. Уровни энергии и волновая функция частицы, находящейся в прямоугольной потенциальной яме

Уравнения (8.4.1) и (8.4.6) являются сложными дифференциальными уравнениями в частных производных. Известны аналитические решения только для очень простых зависимостей потенциальной энергии.

Рассмотрим следующую задачу: частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (рис. 8.8.1). Потенциальной ямой с бесконечно высокими стенками называется область пространства, в которой потенциальная энергия определена соотношениями

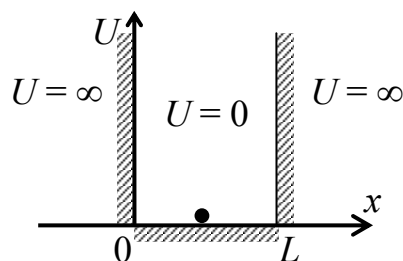


Рис. 8.8.1

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & x > L \end{cases} \quad (8.8.1)$$

В одномерном случае $U = U(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2}$, поэтому стационарное уравнение Шредингера (8.4.6) примет вид

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))\psi(x) = 0. \quad (8.8.2)$$

Поскольку потенциальная энергия U за границами ямы бесконечно велика, то вероятность нахождения частицы за пределами ямы равна нулю. Тогда значения функции ψ на границах ямы (в точках с координатами $x = 0 = L$) должны быть равны нулю, т. е. получаем *граничные условия* для собственной волновой функции $\psi(x)$:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(L) = 0. \quad (8.8.3)$$

Так как внутри ямы $U = 0$, то уравнение (8.8.2) примет вид

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) = 0. \quad (8.8.4)$$

Обозначим

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{mv^2}{2} = \frac{(2\pi)^2 p^2}{h^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k^2, \quad (8.8.5)$$

с учетом этого получает дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2 \psi(x) = 0. \quad (8.8.6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (8.8.6) имеет вид

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx. \quad (8.8.7)$$

Подставим в формулу (8.8.7) первое граничное условие из (8.8.3)

$$\psi(x) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0. \quad (8.8.8)$$

С учетом второго граничного условия из (8.8.3) решение уравнения (8.8.8) будет иметь вид

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (8.8.9)$$

Подставим второе граничное условие (8.8.3) в выражение (8.8.9)

$$\psi(L) = A \sin kL = 0. \quad (8.8.10)$$

Выполнения условия (8.8.10), возможно лишь в случае, если

$$kL = \pm n\pi, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (8.8.11)$$

Значение $n = 0$ отпадает, поскольку при этом получается $\psi = 0$ — частица нигде не находится.

Подставим в выражение (8.8.11) выражение (8.8.5)

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E} L = \pm n\pi \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (8.8.12)$$

Из выражения (8.8.12) видно, что *спектр собственных энергий* частицы в рассматриваемой потенциальной яме является дискретным. Этот результат согласуется с гипотезой Планка о квантовании энергии и является характерным свойством уравнения Шредингера. Также следует отметить то факт, что энергия микрочастицы в состоянии с наименьшим значением $n = 1$ (*в основном состоянии*) не

равна нулю.

Число n , определяющее допустимые значения энергий микро-частицы, называется *главным квантовым числом*. Квантовое стационарное состояние с заданным значением n имеет фиксированное значение энергии E_n ($E_n = \text{const}$). Состояние с фиксированной энергией соответствует в классическом случае движению частицы некоторой орбите, параметры которой удовлетворяют закону сохранения энергии ($K + \Pi = \text{const}$).

Из выражения (8.8.11) следует, что волновое число

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (8.8.13)$$

Так как волновое число k связано с длиной волны де Бройля $\lambda_{\text{Бр}}$ соотношением

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{Бр}}} = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, 4, \dots, \quad (8.8.14)$$

то соответствующие длины волн де Бройля должны удовлетворять условию, при котором

$$L = n \frac{\lambda_{\text{Бр}}}{2} \Rightarrow \lambda_{\text{Бр}} = \frac{2L}{n}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, 4, \dots, \quad (8.8.15)$$

т. е. на ширине L потенциальной ямы должно укладываться целое число полуволн де Бройля, (или целое число стоячих волн де Бройля).

Найдем выражение для волновой функции частицы, находящейся в бесконечной потенциальной яме. Подставим выражение (8.8.14) в выражение (8.8.9)

$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (8.8.16)$$

Для нахождения значения A воспользуемся условием нормировки волновой функции (8.3.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1 \Rightarrow \int_0^L A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{A^2}{2} \int_0^L (1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x) dx = 1 \Rightarrow \frac{A^2}{2} \left(\int_0^L dx - \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x\right) dx \right) = 1 \Rightarrow$$

$$A^2 \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow A^2 = \frac{2}{L} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (8.8.17)$$

Подставим (8.8.17) в выражение (8.8.16) и получим

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (8.8.18)$$

Полное выражение для волновой функции будет иметь вид

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (8.8.19)$$

Квадрат модуля волновой функции, который является плотностью вероятности нахождения частицы заданной точке пространства, равен

$$f(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi}{L} x. \quad (8.8.20)$$

Построим для четырех первых квантовых состояний ($n = 1, 2, 3, 4$) уровни спектра энергий (рис. 8.8.2, а), волновые функции (рис. 8.8.2, б) и плотность вероятности нахождения частицы заданной точке (рис. 8.8.2, в).

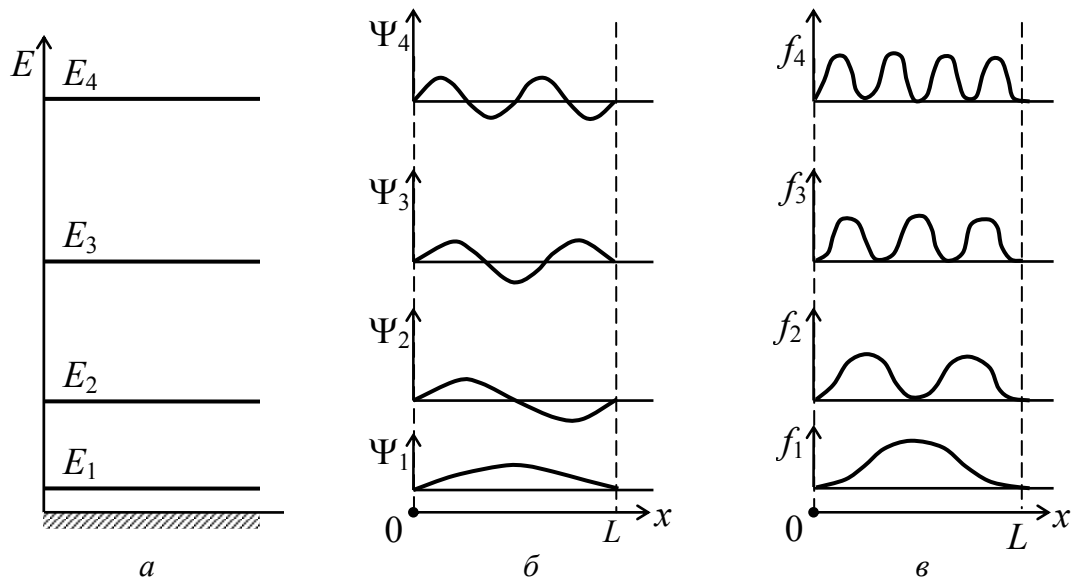


Рис. 8.8.2

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

9. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

Лекция № 15

- 9.1. *Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.*
- 9.2. *Внутренние степени свободы молекул.*
- 9.3. *Закон распределения энергии молекулы по степеням свободы.*
- 9.4. *Внутренняя энергия идеального газа.*

Молекулярная физика представляет собой раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений о природе материальных тел. Согласно этим представлениям, что любое тело состоит из большого количества весьма малых обособленных частиц – молекул, атомов, ионов. Эти частицы находятся в беспорядочном, хаотическом, не имеющем преимущественного направления движении (т. е. все направления движения частиц равноправны). Также учитывается, что все частицы взаимодействуют между собой.

Для исследования макроскопических процессов в телах, связанных с огромным числом содержащихся в них атомов и молекул применяются два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода: *молекулярно-кинетический (статистический) и термодинамический*. Первый лежит в основе статистической физики, а второй – термодинамики.

Молекулярно-кинетическая теория ставит своей целью объяснить свойства тел, непосредственно наблюдаемые на опыте, как суммарный эффект действия большого числа взаимодействующих частиц. Законы поведения огромного числа частиц изучают с помощью статистического метода. При этом методе интересуются не движением отдельных частиц, а поведением таких физических величин, средние значения которых характеризуют движение огромной совокупности частиц.

9.1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

В молекулярно-кинетической теории пользуются идеализированной моделью идеального газа, согласно которой:

1) собственный объем молекул пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находятся молекулы;

- 2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- 3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда являются абсолютно упругими;
- 4) время столкновения молекул друг с другом пренебрежимо мало по сравнению со временем свободного пробега молекул.

Рассмотрим экспериментальные законы, описывающие поведение идеального газа:

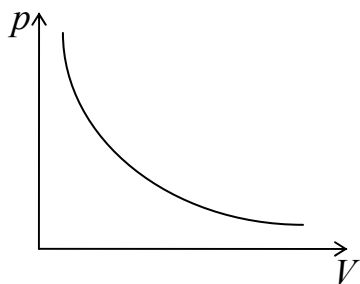


Рис. 9.1.1

1) *закон Бойля-Мариотта*: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$pV = \text{const.} \quad (9.1.1)$$

Процесс, протекающий при постоянной температуре, называется *изотермическим*. Кривая, изображающая зависимость между параметрами p и V , характеризующими состояние газа при постоянной температуре называется *изотермой* (рис. 9.1.1).

2) *закон Гей – Люссака*: объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой.

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad \text{или} \quad \frac{V}{T} = \text{const}, \quad (9.1.2)$$

где V_0 – объем при 0°C ; t – температура по шкале Цельсия; α – коэффициент, равный $\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1}$.

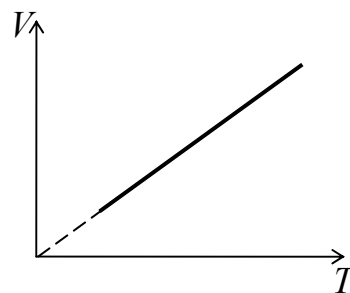


Рис. 9.1.2

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется *изобарическим*. На диаграмме в координатах V, T этот процесс изображается прямой линией, называемой *изобарой* (рис. 9.1.2).

3) *закон Шарля*: давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой.

$$p = p_0(1 + \alpha t) \quad \text{или} \quad \frac{p}{T} = \text{const}, \quad (9.1.3)$$

где p_0 – давление при 0°C ; t – температура по шкале Цельсия; α – коэффициент, равный $\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1}$.

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется *изохорическим*. На диаграмме в координатах p, T этом процессе изображается прямой линией, называемой *изохорой* (рис. 9.1.3).

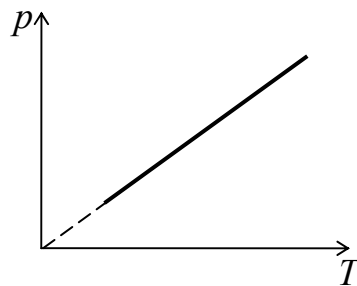


Рис. 9.1.3

4) *закон Авогадро*: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен $22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$. В одном моле различных веществ содержится одно и тоже число молекул, равное *постоянной Авогадро*: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

5) *закон Дальтона*: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n. \quad (9.1.4)$$

Парциальное давление – давление, которое оказывал бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

Состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением, объемом и температурой, между которыми существует связь, называемая *уравнением состояния* $f(p, V, T) = 0$, где каждая из переменных является функцией двух других. Французский физик и инженер Клапейрон, объединив законы Бойля-Мариотта, Шарля и Гей – Люссака, вывел *уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона)*: для данной массы газа величина pV/T остается постоянной, т. е.

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \quad (9.1.5)$$

Менделеев Д. И. объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся уравнение Клапейрона к одному молю газа и используя молярный объем V_m . Согласно закону Авогадро, при одинаковых давлении и температуре, моли всех газов занимают одинаковый молярный объем, поэтому газовая постоянная будет одинаковой для всех газов. Эту общую для всех газов постоянную обозначили $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ и назвали *универсальной газовой постоянной*. Таким образом, уравнение Клапейрона приобрело вид

$$\frac{pV_m}{T} = R \Rightarrow pV_m = RT. \quad (9.1.6)$$

Выражение (9.1.6) называют *уравнением состояния идеального газа* или *уравнение Менделеева – Клапейрона*.

От уравнения состояния идеального газа можно перейти к уравнению для произвольной массы газа. Молярный объем равен

$$V_m = V/\nu, \quad (9.1.7)$$

где $\nu = \frac{m}{M}$ – количество вещества; m – масса газа; M – молярная масса газа.

Молярной массой называется масса 1 моля вещества, и она равна

$$M = N_A m_0, \quad (9.1.8)$$

где m_0 – массы одной молекулы.

Таким образом, получаем

$$\frac{pV}{\nu} = RT \Rightarrow pV = \nu RT \Rightarrow pV = \frac{m}{M} RT. \quad (9.1.9)$$

Пользуются также другой формой уравнения состояния идеального газа, вводя постоянную Больцмана $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К:

$$\begin{aligned} pV = \nu RT &\Rightarrow pV = \nu N_A kT \Rightarrow pV = NkT \Rightarrow \\ &\Rightarrow p = \frac{N}{V} kT \Rightarrow p = nkT, \end{aligned} \quad (9.1.10)$$

где $n = N/V$ – концентрации молекул газа.

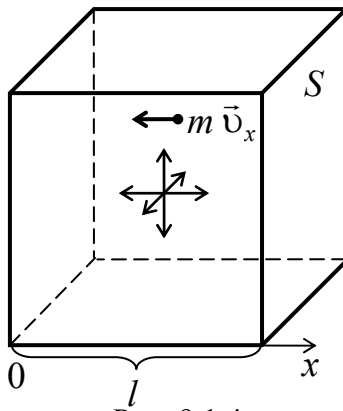


Рис. 9.1.4

Теперь рассмотрим идеальный газ и определим давление газа на основе молекулярно-кинетической теории. Представим себе, что молекулы содержатся в прямоугольном сосуде, грани которого имеют площадь S , а длина его ребер равна l . Согласно этой модели, давление газа на стенки сосуда обусловлено столкновениями молекул с ними. Рассмотрим стенку площадью S с левой стороны сосуда и выясним, что происходит, когда одна молекула ударяется об нее. Эта молекула действует на стенку, а

стенка в свою очередь действует на молекулу с равной по величине и противоположной по направлению силой. Величина этой силы, согласно второму закону Ньютона, равна скорости изменения импульса молекулы, т. е.

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (9.1.11)$$

Так как столкновение является абсолютно упругим, то изменяется лишь составляющая импульса молекулы по оси Ox , т. е. от $-m_0 v_x$ до $+m_0 v_x$. Таким образом, изменение импульса для одного столкновения равно

$$\Delta p = m_0 v_x - (-m_0 v_x) = 2m_0 v_x. \quad (9.1.12)$$

Эта молекула будет много раз сталкиваться со стенкой, причем столкновения будут происходить через промежуток времени, который требуется молекуле для того, чтобы пересечь сосуд и вернуться обратно, т. е. пройти расстояние $2l$. Тогда $2l = v_x \Delta t$, откуда

$$\Delta t = 2l/v_x. \quad (9.1.13)$$

При этом средняя сила равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m_0 v_x}{2l/v_x} = \frac{m_0 v_x^2}{l}. \quad (9.1.14)$$

Во время движения по сосуду туда и обратно молекула может сталкиваться с верхними и боковыми стенками сосуда, однако проекция ее импульса на ось Ox при этом остается без изменения (т. к. удар абсолютно упругий). Чтобы вычислить силу, действующую со стороны всех молекул в сосуде, просуммируем вклады каждой из них.

$$F = \frac{m_0}{l} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \dots + v_{x_n}^2). \quad (9.1.15)$$

Среднее значение квадрата v_x равно $\langle v_x^2 \rangle = (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \dots + v_{x_n}^2) / N$, следовательно

$$F = \frac{m_0}{l} \langle v_x^2 \rangle N. \quad (9.1.16)$$

Для любой скорости выполняется соотношение $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, или $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$. Так как молекулы движутся хаотически, то все направления движения равноправные и $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. Значит

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3. \quad (9.1.17)$$

$$F = \frac{m_0}{l} \langle v_x^2 \rangle N \Rightarrow F = \frac{m_0}{l} N \frac{\langle v^2 \rangle}{3}. \quad (9.1.18)$$

Давление на стенку сосуда примет вид

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{3} \frac{m_0 N \langle v^2 \rangle}{Sl} = \frac{1}{3} \frac{m_0 N \langle v^2 \rangle}{V} \Rightarrow p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle, \quad (9.1.19)$$

где $N/V = n$ – концентрации молекул газа. Выражение (9.1.19) является *основным уравнением молекулярно-кинетической теории газов*. Его можно представить в следующем виде

$$p = \frac{2}{3} \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} n \Rightarrow p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_n \rangle, \quad (9.1.20)$$

где $\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}$ – среднее значение кинетической энергии поступательного движения одной молекулы.

Сравнивая выражение (9.1.20) с уравнением (9.1.10), получаем что

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (9.1.21)$$

т. е. *абсолютная температура есть величина, пропорциональная средней энергии поступательного движения молекул*.

9.2. Внутренние степени свободы молекул

Число степеней свободы – это число независимых координат (переменных), которые полностью определяют положение системы в пространстве.

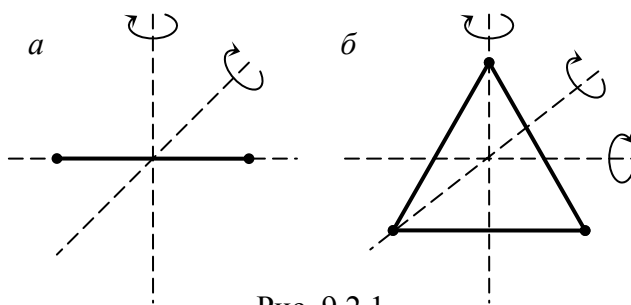


Рис. 9.2.1

Молекулу одноатомного газа рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения. Молекула двухатомного газа рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко

связанных недеформированной связью. Эта система кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси, которая проходит через оба атома, не меняет положение молекулы в пространстве (рис. 9.2.1, *a*). Трехатомная молекула имеет шесть степеней свободы: три поступательные и три вращательные (рис. 9.2.1, *б*). Столько же степеней свободы будут иметь и многоатомные молекулы (четырёх, пяти и т. д.).

9.3. Закон распределения энергии молекулы по степеням свободы

Так как на поступательное движение приходится три степени свободы, то согласно выражению (9.1.21) на одну поступательную степень свободы в среднем приходится энергия

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{1}{2} kT. \quad (9.3.1)$$

Возникает вопрос, какая энергия в среднем приходится на вращательную степень свободы. В классической статистической физике выводится закон (теорема) Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2} kT$.

Таким образом, кинетическая энергия одной молекулы, с жестко связанными атомами равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (9.3.2)$$

где i – число степеней свободы.

Естественно, что жесткой связи между атомами не существует, поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения. Колебательная степень обладает вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая, но и потенциальная энергия. Причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Поэтому на каждую колебательную степень свободы – в среднем приходится энергия равная kT .

В этом случае полное число степеней свободы для молекулы га-

за равно

$$i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_k, \quad (9.3.3)$$

где $i_{\text{п}}$ – число поступательных степеней свободы; $i_{\text{вр}}$ – число вращательных степеней свободы; $2i_k$ – число колебательных степеней свободы.

9.4. Внутренняя энергия идеального газа

В середине XIX в. было доказано, что наряду с механической энергией макроскопические тела обладают еще и энергией, заключенной внутри самих тел. С точки зрения молекулярно-кинетической теории *внутренняя энергия макроскопического тела* равна сумме кинетических энергий теплового движения всех молекул и потенциальных энергий взаимодействия всех молекул друг с другом.

Внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетических энергий теплового движения всех молекул газа, т. к. потенциальная энергия взаимодействия равна нулю (отсутствуют силы взаимодействия).

Внутренняя энергия идеального газа равна

$$U = N \cdot \langle \varepsilon \rangle = N \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \frac{N}{N_A} k N_A T = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT. \quad (9.4.1)$$

где $kN_A = R$ – универсальная газовая постоянная.

Малое изменение внутренней энергии определяется соотношением

$$dU = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R dT = \frac{i}{2} \nu R dT, \quad (9.4.2)$$

конечное изменение внутренней энергии соотношением

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{i}{2} \nu R \Delta T. \quad (9.4.3)$$

10. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Лекция №16

10.1. *Понятие статистического распределения, функция распределения. Распределение Максвелла молекул газа по скоростям.*

10.2. *Барометрическая формула.*

10.3. *Распределение Больцмана.*

10.1. Понятие статистического распределения, функция распределения. Распределение Максвелла молекул газа по скоростям

В соответствии с молекулярно-кинетической теорией молекулы газа совершают хаотическое движение. Это позволяет предположить, что в состоянии термодинамического равновесия все направления скоростей молекул в пространстве равновероятны, хотя значения этих скоростей не являются равновероятными (опыт Штерна).

Разобьем общее число молекул N на небольшие группы из dN_v молекул, значение скорости которых лежат в пределах от v до $v + dv$. Тогда $dp = dN_v/N$ это вероятность того, что молекула газа имеет скорость в заданном интервале от v до $v + dv$ (или доля частиц от общего числа скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$). Согласно теории вероятности, *плотность вероятности* (а в статистической физике ее называют *функцией распределения*) будет иметь

$$f(v) = \frac{dp}{dv}. \quad (10.1.1)$$

В каждую такую группу при заданной температуре T попадает число молекул

$$dN_v = Nf(v)dv. \quad (10.1.2)$$

Функция $f(v)$, зависящая от модуля скорости v , называется *функцией распределения молекул по скоростям*. В 1859 г. Джеймс Максвелл получил в явном виде эту функцию. Функция распределения молекул газа по скоростям (*функция распределение Максвелла*) имеет вид

$$f(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2. \quad (10.1.3)$$

Число молекул, скорости которых имеют значения, заключенные в пределах от v до $v + dv$ равно

$$dN_v = Nf(v)dv = N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv. \quad (10.1.4)$$

А вероятность того, что молекула газа имеет скорость в заданном интервале от v до $v + dv$ (или доля частиц от общего числа, скорости которых лежат в заданном интервале от v до $v + dv$) определяется выражением

$$dp_v = \frac{dN_v}{N} = f(v)dv = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv. \quad (10.1.5)$$

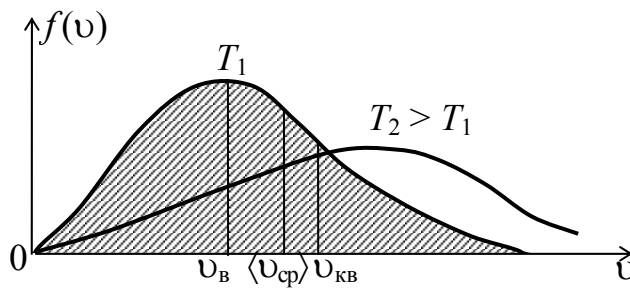


Рис. 10.1.1

График функции распределения молекул газа по скоростям представлен на рис. 10.1.1. Скорость, отвечающая максимуму функции распределения молекул газа по скоростям, называют *наиболее вероятной скоростью*. Этой скоростью обладает наибольшее

количество частиц при заданной температуре T . Найдем наиболее вероятную скорость. Для этого возьмем производную по v от выражения (10.1.3) и приравняем к нулю.

$$\begin{aligned} \frac{df(v)}{dv} &= \frac{d}{dv} \left(4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) v^2 \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) \left(2 - \frac{m_0 v^2}{kT} \right) v &= 0 \Rightarrow 2 - \frac{m_0 v^2}{kT} = 0. \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2kTN_A}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (10.1.7)$$

Найдем *среднюю арифметическую скорость* молекул газа:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) v^3 dv. \quad (10.1.8)$$

Интегрирование данного выражения по частям приводит к тому, что

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (10.1.9)$$

Найдем *среднее значение квадрата скорости* молекул газа:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) v^4 dv = \frac{3kT}{m_0}. \quad (10.1.10)$$

Корень квадратный из среднего значения квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ называется *средней квадратичной скоростью*, и она равна

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \Rightarrow v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (10.1.11)$$

Для определения доли Δp частиц, скорости которых лежат в некотором интервале скоростей от v_1 до v_2 , необходимо вычислить интеграл

$$\Delta p = \frac{\Delta N_v}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_{v_1}^{v_2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) v^2 dv. \quad (10.1.12)$$

С точки зрения математики величина Δp – это площадь под криволинейной трапеции ограниченной интервалом от v_1 до v_2 (рис. 10.1.2).

Вероятность того скорость молекулы газа лежит в интервале от 0 до ∞ равна

$$\Delta p = \frac{\Delta N_v}{N} = \int_0^{\infty} f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) v^2 dv = 1. \quad (10.1.13)$$

Условие (10.1.13) является условие нормировки для функции распределение Максвелла.

Так как в конечных пределах вычисление интеграла (10.1.12) затруднено, то используют приближенные методы расчета. Для расчетов часто используют *распределения Максвелла по относительным скоростям*. *Относительной скоростью молекулы* называют вели-

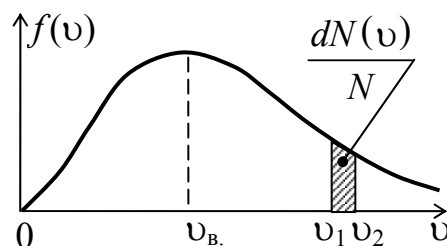


Рис. 10.1.2

чину $u = v/v_B$. Чтобы получить распределения Максвелла по относительным скоростям перейдем от переменной v к переменной u . Произведя подстановку $v = uv_B = u \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$, и $dv = du v_B = du \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$ в выражении (10.1.5) получим

$$\frac{dN_u}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) u^2 du. \quad (10.1.14)$$

Исходя из распределения Максвелла по скоростям, можно также найти *распределение молекул по значениям кинетической энергии поступательного движения*. Для этого перейдем от переменной v к переменной

$$\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}. \quad \text{Произведя подстановку } v = \left(\frac{2\varepsilon}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{и}$$

$dv = (2m_0\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} d\varepsilon$ в выражении (10.1.5) получим

$$\frac{dN_\varepsilon}{N} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) (kT)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (10.1.15)$$

где dN_ε/N – доля молекул, кинетическая энергия поступательного движения которых имеет значения, заключенные в пределах от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$, или вероятность того, что кинетическая энергия поступательного движения молекулы имеет значение, заключенное в пределах от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$.

Выражение (10.1.15) называют *распределением молекул по значениям кинетической энергии поступательного движения*.

С помощью этой функции можно вычислить среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) (kT)^{-\frac{3}{2}} e \int_0^\infty \varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{3kT}{2}. \quad (10.1.16)$$

Полученный результат согласуется с законом Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы.

10.2. Барометрическая формула

Атмосферное давление на какой-либо высоте обусловлено силой тяжести вышележащих слоев газа. Допустим, что на высоте h давление будет p . Тогда давление на высоте $h + dh$ будет $p + dp$, причем если dh больше нуля, то $dp < 0$, так как давление с высотой убывает. Разность давлений равна давлению силы тяжести газа dmg , заключенного в объеме цилиндра с площадью основания S и высотой dh , т. е.

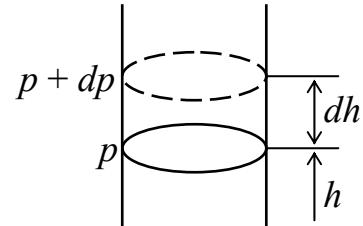


Рис. 10.2.1

$$p - (p + dp) = dmg/S \Rightarrow -dp = \rho S dh g/S \Rightarrow dp = -\rho g dh, \quad (10.2.1)$$

где ρ – плотность газа на высоте h .

В условиях, близких к нормальным, воздух мало чем отличается по своему поведению от идеального газа. Поэтому, применив уравнение Менделеева – Клапейрона для произвольной массы газа, выразим его плотность

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \frac{pM}{RT} = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}. \quad (10.2.2)$$

Подставим выражение (10.2.2) в (10.2.1) и получим

$$dp = -\frac{pMg}{RT}dh \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh. \quad (10.2.3)$$

Предположим, что температура воздуха не зависит от высоты (*изотермическая атмосфера*) и на высоте $h = 0$ давление равно p_0 . Тогда проинтегрировав выражение (10.2.3) получим

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^h \frac{Mg}{RT}dh \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mgh}{RT}. \quad (10.2.4)$$

Потенцируя выражение (10.2.4) получим выражение

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right), \quad (10.2.5)$$

которое называют *барометрической формулой*.

Полученная барометрическая формула дает зависимость давления от высоты над поверхностью Земли для воображаемой изотермической атмосферы.

Если учесть, что

$$M/R = (m_0 N_A) / (k N_A) = m_0 / k, \quad (10.2.6)$$

где m_0 – масса одной молекулы, k – постоянная Больцмана.

Тогда

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right). \quad (10.2.7)$$

10.3. Распределение молекул идеального газа во внешнем силовом поле

Учитывая, что $p = nkT$, а следовательно $p_0 = n_0 kT$, от формулы (10.2.7) придем к формуле для концентраций частиц

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right). \quad (10.3.1)$$

Так как молекулы воздуха находятся в поле тяготения Земли, то на разной высоте молекулы обладают различным запасом потенциальной энергии $\Pi = m_0 g h$. Следовательно, распределение молекул по высоте является и распределением молекул по значениям потенциальной энергии

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right), \quad (10.3.2)$$

где n_0 – концентрация молекул в том месте, где потенциальная энергия молекул равна нулю.

Больцман доказал, что распределение (10.3.2) справедливо не только в случае поля тяготения Земли, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения. В соответствии с этим выражение (10.3.2) получило название *распределение Больцмана*.

Например, для частиц находящихся в поле центробежных сил $\Pi = -m_0 \omega^2 r^2 / 2$ (где r – расстояние от оси вращения до частицы). Тогда выражение (10.3.2) примет вид

$$n = n_0 \exp\left(\frac{m_0 \omega^2 r^2}{2kT}\right). \quad (10.3.3)$$

Для частиц, взвешенных в жидкости (частицы суспензии или эмульсии), в выражении для потенциальной энергии необходимо учитывать действие силы Архимеда. Поэтому потенциальная энергия та-

ких частиц будет иметь вид:

в поле силы тяжести

$$\Pi = (m_0 - m_{\text{ж}})gh = (\rho_0 - \rho_{\text{ж}})Vgh, \quad (10.3.4)$$

в поле центробежных сил

$$\Pi = -(m_0 - m_{\text{ж}})\frac{\omega^2 r^2}{2} = -(\rho_0 - \rho_{\text{ж}})V\frac{\omega^2 r^2}{2}, \quad (10.3.5)$$

где $m_{\text{ж}}$ – масса жидкости, вытесненной частицей массой m_0 ; ρ_0 – плотность вещества частиц; $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости; V – объем частицы.

Распределение Больцмана для частиц суспензии или эмульсии будет иметь вид:

поле силы тяжести

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{(m_0 - m_{\text{ж}})gh}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{(\rho_0 - \rho_{\text{ж}})Vgh}{kT}\right). \quad (10.3.6)$$

в поле центробежных сил

$$n = n_0 \exp\left(\frac{(m_0 - m_{\text{ж}})\omega^2 r^2}{2kT}\right) = n_0 \exp\left(\frac{(\rho_0 - \rho_{\text{ж}})V\omega^2 r^2}{2kT}\right). \quad (10.3.7)$$

Для идеального газа в любом внешнем потенциальном поле распределение молекул будет подчиняться распределению Больцманом. В общем случае функция распределения Больцмана будет иметь вид

$$f(x, y, z) = A \exp\left(-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT}\right), \quad (10.3.8)$$

где $\Pi(x, y, z)$ – потенциальная энергия молекулы в точке с координатами x, y, z ; A – нормировочная постоянная.

Общее распределение молекул идеального газа во внешнем поле по их значениям проекций скоростей и координат x, y, z имеет вид

$$f(\varepsilon) = B \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right), \quad (10.3.9)$$

– функция распределения Максвелла – Больцмана,

где $\varepsilon = \frac{m_0 v_x^2}{2} + \frac{m_0 v_y^2}{2} + \frac{m_0 v_z^2}{2} + \Pi(x, y, z) = \frac{m_0 v^2}{2} + \Pi(x, y, z)$ – полная энергия молекулы; B – нормировочная постоянная.

11. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Лекция № 17

11.1. *Явления переноса: диффузия, теплопроводность, внутреннее трение.*

11.2. *Длина свободного пробега и среднее число столкновений молекул идеального газа.*

11.3. *Коэффициенты переноса для идеального газа.*

В изолированной макроскопической системе равновесное состояние характеризуется однородным распределением концентрации, температуры и отсутствием упорядоченного движения текучей среды (газа или жидкости). Система с неоднородным распределением полей этих параметров будет стремиться к равновесию, т.е. к состоянию, в котором градиенты этих величин равны нулю. Поскольку в неравновесном состоянии градиенты плотности, температуры и проекций скоростей не равны нулю, можно предположить, что скорость приближения системы к равновесию должна быть связана с градиентами соответствующих параметров состояния. Опыт подтверждает это положение, которое позволяет описать явления *диффузии* (выравнивание концентрации за счет переноса массы в объеме), *теплопроводности* (выравнивание температуры по объему в результате переноса тепловой энергии хаотического движения частиц системы) и *вязкости* (выравнивание скоростей движения различных слоев текучей среды в связи с переносом импульса частиц). Законы переноса массы, энергии и импульса положены в основу *теории неравновесных процессов*, или *физической кинетики*.

11.1. Явления переноса: диффузия, теплопроводность, внутреннее трение

Рассмотрим системы, в которых неоднородное распределение плотности (концентрации), температуры и скорости упорядоченного движения наблюдается только вдоль одной оси (одномерная неоднородность).

Диффузия

Явление диффузии для химически однородного вещества подчиняется *закону Фика*

$$dm = -D \frac{d\rho}{dx} dSdt, \quad (11.1.1)$$

где D – коэффициент диффузии ($[D] = 1 \text{ м}^2/\text{с}$); $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины в направлении оси Ox , перпендикулярном к площадке dS . Знак «минус» показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности.

Внутреннее трение

Сила внутреннего трения между двумя слоями газа или жидкости подчиняется закону *Ньютона*

$$dF = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| dS, \quad (11.1.2)$$

где η – коэффициент динамической вязкости ($[\eta] = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$), $\frac{dv}{dx}$ – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости жидкости или газа в направлении оси Ox , перпендикулярном к направлению движения слоев, dS – площадь поверхности, на которую действует сила.

Согласно II закону Ньютона силу взаимодействие двух слоев можно рассматривать как процесс передачи импульса от одного слоя к другому в единицу времени ($Fdt = dp$).

С учетом этого, получаем

$$dp = -\eta \frac{dv}{dx} dSdt, \quad (11.1.3)$$

где dp – импульс, передаваемый за время dt от слоя к слою через поверхность площадью dS .

Теплопроводность

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется закону *Фурье*

$$dQ = -\alpha \frac{dT}{dx} dSdt, \quad (11.1.4)$$

где α – коэффициентом теплопроводности ($[\alpha] = 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$), $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины в направлении Ox , перпендикулярном к площадке dS . Знак «минус» показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры.

11.2. Длина свободного пробега и среднее число столкновений молекул идеального газа

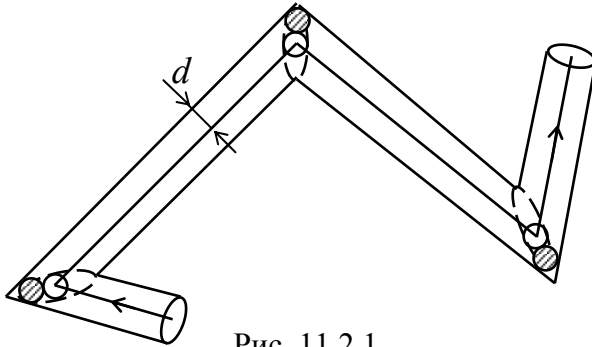


Рис. 11.2.1

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Под *столкновением* молекул подразумевают процесс взаимодействия между молекулами, в результате которого молекулы изменяют направление своего движения. Минимальное расстояние d , на которое сбли-

жаются при столкновении центры двух молекул, называется *эффективным диаметром молекулы*. Величина $\sigma = \pi d^2$ называется *эффективным сечением молекулы*. Эффективный диаметр молекул зависит от их энергии молекул, а, следовательно, и от температуры. С повышением температуры эффективный диаметр молекул уменьшается. Предположим вначале, что все молекулы, кроме выбранной, застыли неподвижно на своих местах. Рассмотрим движение выделенной молекулы. Ударившись об одну из неподвижных молекул, она будет лететь прямолинейно до тех пор, пока не столкнется с какой-либо другой неподвижной молекулой. Это соударение произойдет в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется на прямой, вдоль которой летит молекула, на расстоянии, меньшем эффективного диаметра молекулы. В результате столкновения молекула изменит направление своего движения, после чего некоторое время опять будет двигаться прямолинейно, пока на ее пути не встретится молекула, центр которой будет находиться в пределах цилиндра радиуса d (см. рис. 11.2.1). Число соударений с молекулами, происходящих за время t , равно количеству молекул, центры которых попадают внутрь ломаного цилиндра длины $l = \langle v_{\text{отн}} \rangle t$ и радиуса d . Где $\langle v_{\text{отн}} \rangle$ – средняя скорость движения молекул по отношению друг к другу (а не средней скоростью молекул относительно стенок сосуда). Объем цилиндра можно считать равным

$$V = \pi d^2 \langle v_{\text{отн}} \rangle t. \quad (11.2.1)$$

Если взять время $t = 1$ с, то объем будет равен

$$V = \pi d^2 \langle v_{\text{отн}} \rangle. \quad (11.2.3)$$

Умножив этот объем на число молекул в единице объема n , получим среднее число столкновений молекулы за единицу времени (1 секунду)

$$\langle z \rangle = \pi d^2 \langle v_{\text{отн}} \rangle n. \quad (11.2.4)$$

Найдем $\langle v_{\text{отн}} \rangle$. Относительная скорость двух произвольно взятых молекул равна $v_{\text{отн}} = v_2 - v_1$. Возведя это соотношение в квадрат, получим: $v_{\text{отн}}^2 = (v_2 - v_1)^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_1v_2$. Среднее значение суммы нескольких величин равно сумме средних значений складываемых величин. Поэтому $\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle - 2\langle v_1v_2 \rangle$. Событие, заключающиеся в том, что первая молекула имеет скорость v_1 , а вторая – скорость v_2 , являются статистически независимыми. Поэтому $\langle v_1v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle$. Для газа, находящегося в равновесии, каждый из этих сомножителей равен нулю. Таким образом $\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle = 2\langle v^2 \rangle$. Полученный результат означает, что $v_{\text{отн.ср.кв.}} = \sqrt{2}v_{\text{ср.кв.}}$. Средние квадратичные скорости пропорциональны средним арифметическим, следовательно

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle. \quad (11.2.5)$$

Тогда среднее число столкновений за секунду

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n. \quad (11.2.6)$$

Средняя длина свободного пробега – это среднее расстояние, которое проходит молекула между двумя последовательными столкновениями. Если за время $t = 1$ с молекула проходит путь $L = \langle v \rangle t = \langle v \rangle$ и претерпевает при этом в среднем $\langle z \rangle$ столкновений, то средняя длина свободного пробега будет равна

$$\lambda = \frac{L}{\langle z \rangle} = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}. \quad (11.2.7)$$

Учитывая формулу (11.2.6) для среднего числа столкновений, окончательно получим

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (11.2.7)$$

В случае, когда длина свободного пробега молекул превышает

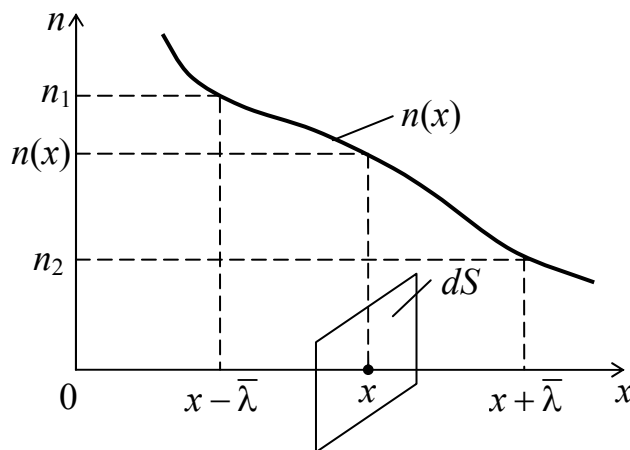
линейные размеры сосуда, говорят, что в сосуде достигнут *вакуум*. Газ в этом случае называют *ультраразреженным*. Хотя в буквальном смысле слова вакуум означает «пустоту», в ультраразреженном газе содержится в единице объема большое число молекул. Так, при давлении в 10^{-6} мм. рт. ст. в 1 м^3 находится примерно 10^{16} молекул. Более того, в очень малых порах состояние, определяемое как вакуум, может быть достигнуто и при атмосферном давлении.

Поведение ультраразреженных газов отличается целым рядом особенностей. В вакууме молекулы обмениваются импульсами только со стенками сосуда, так что имеет смысл лишь понятие давления газа на стенку. Внутреннее трение в газе также отсутствует. Однако тело, движущееся в ультраразреженном газе, будет испытывать действие силы трения, обусловленной тем, что молекулы, ударяясь об это тело, будут изменять его импульс. Коэффициент теплопроводности оказывается в ультраразреженном газе пропорциональным плотности газа. Теплопередача от одной стенки к другой будет с понижением давления уменьшаться, в то время как теплопроводность газа при обычных условиях не зависит от давления.

11.3. Коэффициенты переноса для идеального газа

Диффузия

Пусть в газе имеется неравномерное распределение концентрационных частиц $n = n(x)$ (рис. 11.3.1). Тогда вследствие хаотичности движения молекул будет происходить выравнивание концентрации по объему. Согласно упрощенным представлениям, количество молекул, переходящих через площадку за время dt из одного слоя в другой равно



$$dN = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS dt. \quad (11.3.1)$$

Число молекул первой компоненты, пролетающих через площадку dS за время dt в направлении оси Ox равно dN_1 , а число молекул, пролетающих в противоположном направлении — dN_2 . Разность этих чисел дает поток молекул через площадку dS

$$dN = dN_1 - dN_2. \quad (11.3.2)$$

Согласно формуле (11.3.1), $dN_1 = \frac{1}{6}n_1\langle v \rangle dSdt$, а $dN_2 = \frac{1}{6}n_2\langle v \rangle dSdt$.

Таким образом,

$$dN = \frac{1}{6}\langle v \rangle dSdt(n_1 - n_2). \quad (11.3.3)$$

Через поверхность dS будут пролетать молекулы, претерпевшие последнее соударение на расстоянии от площадки, равном средней длине свободного пробега. Поэтому n_1 и n_2 разумно представить как

$$n_1 = n(x - \lambda) = n(x) - \frac{dn}{dx}\lambda \quad \text{и} \quad n_2 = n(x + \lambda) = n(x) + \frac{dn}{dx}\lambda. \quad (11.3.4)$$

$$n_1 - n_2 = [n(x - \lambda) - n(x + \lambda)] = -\frac{dn}{dx}2\lambda, \quad (11.3.5)$$

$$dN = -\frac{1}{6}\langle v \rangle dS \frac{dn}{dx} 2\lambda dt = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \frac{dn}{dx} dSdt. \quad (11.3.6)$$

Умножим уравнение (11.3.6) на массу одной молекулы m_0

$$dNm_0 = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \frac{d(nm_0)}{dx} dSdt. \quad (11.3.7)$$

Учитывая, что $dm = dNm_0$, а $\rho = nm_0$ окончательно получим

$$dm = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \frac{d\rho}{dx} dSdt. \quad (11.3.8)$$

Сопоставление с формулой (11.1.1) дает для коэффициента диффузии следующее выражение

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda. \quad (11.3.9)$$

Внутреннее трение

Рассмотрим газ, у которого слои движутся с различными скоростями. Каждая молекула участвует в двух движениях: хаотическом тепловом, средняя скорость которого равна $\langle v \rangle$ и упорядоченном движении со скоростью u , которая много меньше средней скорости. Пусть различные слои газа имеют разную скорость упорядоченного движения $u = u(x)$ (рис. 11.3.2). В этом случае при переходе молекул из одного слоя в

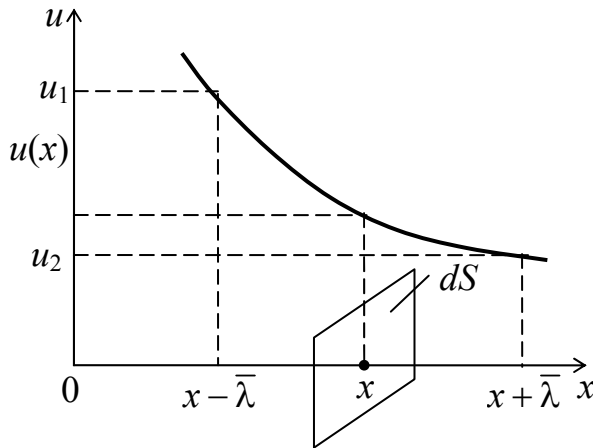


Рис. 11.3.2

другой они будут переносить различные значения импульса $m_0 u$, соответствующего направлению движению слоев газа. Попад в другой слой, молекула претерпевает соударения с молекулами этого слоя. В результате соударений она либо отдает избыток своего импульса другим молекулам, либо увеличивает свой импульс за счет других молекул. В итоге импульс более быстро движущегося слоя

убывает, а более медленно движущегося – возрастает. Таким образом, слои ведут себя так, как если бы к первому слою (скорость которого больше) была приложена тормозящая его движение сила, а ко второму слою (скорость которого меньше) – такая же по величине ускоряющая его движение сила.

Импульс, переносимый молекулами за время dt в направлении оси Ox будет равен $dp_1 = m_0 dN_1 u_1$, а в противоположном направлении $dp_2 = m_0 dN_2 u_2$.

Результирующий импульс, переносимый молекулами за время dt , будет равен

$$dp = dp_1 - dp_2 = m_0 (u_1 dN_1 - u_2 dN_2). \quad (11.3.10)$$

Если учесть, что поток частиц в обе стороны приблизительно одинаковый $dN_1 \cong dN_2 = dN$, получим

$$dp = m_0 dN (u_1 - u_2). \quad (11.3.11)$$

С учетом формулы (11.3.1) импульс, переносимый молекулами за время dt

$$p = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS m_0 (u_1 - u_2) dt. \quad (11.3.12)$$

Так как в среднем, последнее соударение происходит на расстоянии, равном длине свободного пробега молекулы. Поэтому молекулам, летящим в направлении оси Ox , припишем значение скорости $u_1 = u(x - \lambda)$, а молекулам, летящим в противоположном направлении, – значение скорости $u_2 = u(x + \lambda)$.

Учитывая, что $v_1 - v_2 = [v(x - \lambda) - v(x + \lambda)] = -\frac{dv}{dx} 2\lambda$, и приняв во внимание, что $nm_0 = \rho$ – плотность газа, получим

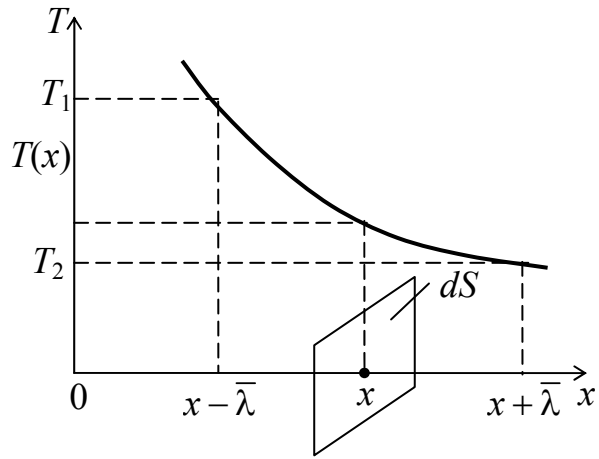
$$dp = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dSm_0 [u_1 - u_2] = -\frac{1}{6} \langle v \rangle \rho dS \frac{dv}{dx} 2\lambda dt = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho \frac{dv}{dx} dS dt. \quad (11.3.12)$$

Сравнивая полученную формулу с соотношением (11.1.3) получим выражение для коэффициента динамической вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho. \quad (11.3.13)$$

Теплопроводность

Перемещаясь вследствие теплового движения, молекулы переносят запасенную ими энергию. Рассмотрим газ, в котором каким-то способом поддерживается градиент температуры вдоль направления Ox . Мысленно представим площадку dS , перпендикулярную к этому направлению. Будем исходить из предположения, что каждая молекула несет с собой энергию $\varepsilon = \frac{i}{2} kT$. Эта энергия



соответствует температуре того места, где произошло ее последнее столкновение с другой молекулой. В среднем это соударение происходит на расстоянии от площадки, равном средней длине свободного пробега λ . Поэтому молекулам, летящим в направлении оси Ox , припишем энергию $\varepsilon_1 = \frac{i}{2} kT_1 = \frac{i}{2} kT(x - \lambda)$, а молекулам, летящим в противоположном направлении, – энергию $\varepsilon_2 = \frac{i}{2} kT_2 = \frac{i}{2} kT(x + \lambda)$.

Тогда для потока тепла через площадку dS получается выражение

$$dQ = dN_1 \varepsilon_1 - dN_2 \varepsilon_2. \quad (11.3.14)$$

Учитывая, что $dN_1 \cong dN_2 = dN$ из выражения (11.3.14) получаем

$$dQ = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS \left(\frac{i}{2} k T_1 - \frac{i}{2} k T_2 \right) dt = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS \frac{i}{2} k (T_1 - T_2) dt. \quad (11.3.15)$$

Учитывая, что $T_1 - T_2 = [T(x - \lambda) - T(x + \lambda)] = -\frac{dT}{dx} 2\lambda$, получим

$$dQ = -\frac{1}{6} n \langle v \rangle dS \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx} 2\lambda dt = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \left(\frac{i}{2} kn \right) \frac{dT}{dx} dS dt. \quad (11.3.15)$$

Выражение $\frac{i}{2} kn$ можно представить, как $\frac{i}{2} kn = \frac{i}{2} kn \frac{m_0 N_A}{m_0 N_A} = \frac{i}{2} \frac{k N_A \cdot n m_0}{m_0 N_A} = \frac{i}{2} \frac{R \cdot \rho}{M} = \rho c_V^{yd}$ ($c_V^{yd} = \frac{iR}{2M}$ – удельная теплоемкость при $V = \text{const}$).

$$dQ = -\frac{1}{6} n \langle v \rangle dS \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx} 2\lambda dt = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho c_V^{yd} \frac{dT}{dx} dS dt. \quad (11.3.16)$$

Сравнивая с формулой (11.1.4), получим выражение для коэффициента теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle c_V^{yd} \lambda \rho. \quad (11.3.17)$$

12. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Лекция № 18

12.1. *Теплота и работа. Первое начало термодинамики.*

12.2. *Теплоемкость тела и вещества.*

12.3. *Первое начало термодинамики при изохорическом, изобарическом и изотермическом процессах.*

12.4. *Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона.*

12.5. *Политропические процессы.*

12.1. Теплота и работа. Первое начало термодинамики

Процесс передачи внутренней энергии от одного тела к другому без совершения работы (без изменения объема) называется *теплообменом*. Количество энергии, передаваемое системе внешними телами при теплообмене, называют *количеством теплоты* Q . Сообщение системе теплоты Q не связано с макроскопическими перемещениями тел системы. Изменение внутренней энергии при теплообмене состоит в том, что отдельные молекулы более нагретого тела в процессе неупругих столкновений передают часть своей кинетической энергии молекулам менее нагретого тела.

Существует три вида теплообмена: *теплопроводность, конвекция, излучение*.

Теплопроводностью называется процесс теплообмена между телами при их непосредственном контакте, обусловленный хаотическим движением частиц тела.

Конвекцией называется процесс переноса энергии, который осуществляется перемещением слоев жидкости и газа от места с более высокой температурой к месту с более низкой температурой. Конвекция наблюдается только в жидкостях и газах.

Излучением называется перенос энергии от одного тела к другому (а также между частями одного и того же тела) путем обмена электромагнитным излучением, т. е. теплообмен, обусловленный процессами испускания, распространения, рассеяния и поглощения электромагнитных волн. Передача энергии излучением может осуществляться при отсутствии материальной среды, разделяющей поверхности теплообмена, т. е. в вакууме.

Внутреннюю энергию можно также изменить путем совершения работы. Передача внешними телами энергии в форме работы сопровождается макроскопическими перемещениями внешних тел. Например:

1) Если внешняя сила вызывает деформацию тела, то при этом изменяются расстояния между частицами, из которых оно состоит, а

следовательно, изменяется потенциальная энергия взаимодействия частиц. При неупругих деформациях, кроме того, изменяется температура тела, т. е. изменяется кинетическая энергия теплового движения частиц. При деформации тела совершается работа, которая и является мерой изменения внутренней энергии тела.

2) Внутренняя энергия тела изменяется также при его неупругом соударении с другим телом. При неупругом соударении тел их кинетическая энергия уменьшается, она превращается во внутреннюю. Мерой изменения кинетической энергии тела является, согласно теореме о кинетической энергии, работа действующих сил.

3) Изменение внутренней энергии тела происходит под действием силы трения, поскольку, как известно из опыта, трение всегда сопровождается изменением температуры трущихся тел. Работа силы трения может служить мерой изменения внутренней энергии.

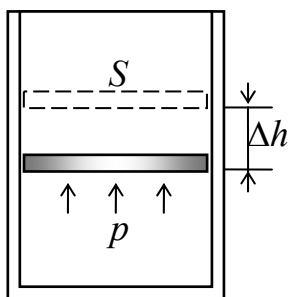


Рис. 12.1.1

Определим в общем виде внешнюю работу, совершаемую газом при малом изменении его объема. Пусть газ заключен в цилиндрический сосуд, закрытый плотно пригнанным легко скользящим поршнем (рис. 12.1.1). Если по каким-либо причинам газ станет расширяться, он будет перемещать поршень и совершать над ним работу. Элементарная работа, совершаемая газом при перемещении поршня на отрезок dh , равна

$$dA = Fdh, \quad (12.1.1)$$

где $F = pS$ – сила давления, с которым газ действует на поршень.

Заменив эту силу произведением давления газа p на площадь поршня S , получим:

$$dA = pSdh = pdV. \quad (12.1.2)$$

При конечном изменении объема работа должна вычисляться как сумма элементарных работ, т. е.

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} dA = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (12.1.3)$$

Выражение (12.1.3) справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

В отличие от внутренней энергии системы, которая является функцией состояния системы, понятия теплоты и работы имеют смысл

только в связи с процессом изменения состояния системы. Теплота и работа – энергетические характеристики термодинамического процесса, обуславливающего переход системы из одного состояния в другое.

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Допустим, что некоторая система (газ, заключенный в цилиндр под поршнем) обладая внутренней энергией U_1 получила некоторое количество теплоты Q_1 , и перейдя в новое состояние, которое характеризуется внутренней энергией U_2 совершила работу A над внешней средой. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе, а работа – положительной, когда система совершает ее против внешних сил.

В соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из одного состояния в другое изменение ΔU внутренней энергии будет одинаковым. Это изменение будет равно разности между количеством теплоты, полученной системой, и работой, совершенной системой против внешних сил, т. е. $\Delta U = Q - A$ или

$$Q = \Delta U + A. \quad (12.1.4)$$

Первое начало термодинамики: теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил. В дифференциальной форме первое начало термодинамики имеет вид:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (12.1.5)$$

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии равно нулю ($\Delta U = 0$). Тогда согласно первому началу термодинамики $A = Q$, т. е. *невозможен вечный двигатель первого рода* – периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия.

12.2. Теплоемкость тела и вещества

Теплоемкостью какого-либо тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин. Если при сообщении телу количества теплоты dQ , его температура повышается на dT , то теплоемкость по определению равна

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (12.2.1)$$

Единица измерения теплоемкости [Дж/К].

Из определения следует, что теплоемкость тела будет зависеть от химического состава, массы, температуры, а также от вида процесса, определяющего изменение состояния тела при сообщении ему теплоты dQ .

Теплоемкость моля вещества называется *молярной теплоемкостью* – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного моля вещества на один Кельвин:

$$C^M = \frac{dQ}{\nu dT}. \quad (12.2.2)$$

Единица измерения молярной теплоемкости [Дж/(моль · К)].

Теплоемкость единицы массы вещества называется *удельной теплоемкостью* – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного килограмма вещества на один Кельвин:

$$c^{уд} = \frac{dQ}{m dT}. \quad (12.2.3)$$

Единица измерения удельной теплоемкости [Дж/(кг · К)].

Если разделим (12.2.2) на (12.2.3), то получим связь между молярной и удельной теплоемкостями одного и того же вещества

$$\frac{C^M}{c^{уд}} = \frac{m}{\nu} \Rightarrow C^M = c^{уд} M, \quad (12.2.4)$$

где $M = \frac{m}{\nu}$ – молярная масса вещества.

Величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Если нагревание происходит при постоянном объеме, то теплоемкость называется *теплоемкостью при постоянном объеме* и обозначается.

$$C_V^M = \left(\frac{dQ}{\nu dT} \right)_{V=\text{const}} \quad \text{и} \quad c_V^{уд} = \left(\frac{dQ}{m dT} \right)_{V=\text{const}}. \quad (12.2.5)$$

Если же нагревание происходит при постоянном давлении – *теплоемкость при постоянном давлении* и обозначается

$$C_P^M = \left(\frac{dQ}{\nu dT} \right)_{p=\text{const}} \quad \text{и} \quad c_P^{уд} = \left(\frac{dQ}{m dT} \right)_{p=\text{const}}. \quad (12.2.6)$$

12.3. Первое начало термодинамики при изохорическом, изобарическом и изотермическом процессах.

Изохорический процесс

Если газ нагревается или охлаждается при постоянном объеме (рис.12.3.1), то $dV = 0$ и работа внешних сил равна нулю

$$\delta A = pdV \Rightarrow A_{12} = \int_1^2 \delta A = 0. \quad (12.3.1)$$

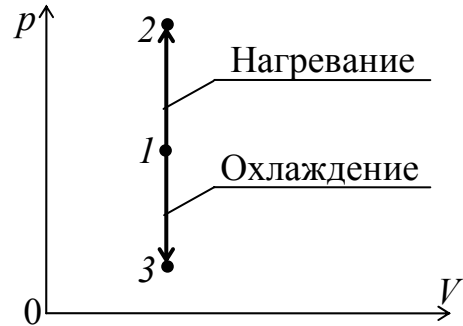


Рис. 12.3.1

Сообщаемая газу извне теплота пойдет только на увеличение его внутренней энергии, т. е.

$$\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow \delta Q = dU. \quad (12.3.2)$$

С учетом выражения (12.2.5)

$$\delta Q = dU \Rightarrow C_V^M \nu dT = dU \quad \text{или} \quad dU = \nu C_V^M dT. \quad (12.3.3)$$

Изменение внутренней энергии газа определяется соотношением

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V^M \nu dT. \quad (12.3.4)$$

Если $C_V^M = \text{const}$ (что справедливо для идеального газа), то соотношение (12.3.4) можно записать в виде

$$\Delta U = \nu C_V^M \int_{T_1}^{T_2} dT = C_V^M \nu (T_2 - T_1). \quad (12.3.5)$$

Получим выражения для молярной и удельной теплоемкостей идеального газа при постоянном объеме. Для идеального газа изменение внутренней энергии определяется соотношением

$$dU = \frac{i}{2} \nu R dT. \quad (12.3.6)$$

Подставим выражение (12.3.6) в (12.3.3) и выразим C_V^M

$$\frac{i}{2} \nu R dT = \nu C_V^M dT \Rightarrow C_V^M = \frac{i}{2} \frac{\nu R dT}{\nu dT} = \frac{i}{2} R. \quad (12.3.7)$$

Удельная теплоемкость соответственно равна

$$c_V^{уд} = \frac{C_V^M}{M} = \frac{i}{2} \frac{R}{M}. \quad (12.3.8)$$

Изобарический процесс

Работа, совершаемая газом при изобарическом процессе (рис. 12.3.2), равна

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 = \\ &= \nu RT_2 - \nu RT_1 = \nu R(T_2 - T_1). \end{aligned} \quad (12.3.9)$$

Сообщаемая газу извне теплота, согласно выражению (12.2.6), равна

$$\delta Q = C_p^M \nu dT. \quad (12.3.10)$$

Первое начало термодинамики запишем в следующем виде

$$\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow C_p^M \nu dT = dU + p dV. \quad (12.3.11)$$

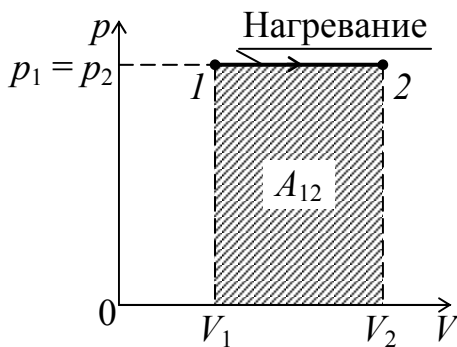


Рис. 12.3.2

Продифференцировав уравнение Менделеева – Клапейрона при условии, что $p = \text{const}$, получим

$$p dV = \nu R dT. \quad (12.3.12)$$

Подставим выражение (12.3.12) в (12.3.11)

$$C_p^M \nu dT = \frac{i}{2} \nu R dT + \nu R dT. \quad (12.3.13)$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении равна

$$C_p^M = \frac{i\nu R dT + 2\nu R dT}{2\nu dT} = \frac{i+2}{2} R. \quad (12.3.14)$$

А удельная теплоемкость равна

$$c_p^{уд} = \frac{C_p^M}{M} = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}. \quad (12.3.15)$$

Из уравнений (12.3.7) и (12.3.15) можно получить формулу Майера

$$C_p^M = \frac{i+2}{2} R = \frac{i}{2} R + R = C_V^M + R. \quad (12.3.16)$$

Изотермический процесс

Работа, совершаемая газом при изотермическом процессе (рис. 12.3.3), равна $A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$. Выразим давление из уравнения Менделеева – Клапейрона ($p = \nu RT/V$) и подставим

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \nu RT \frac{dV}{V} = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.3.17)$$

Эту формулу можно преобразовать и к иному виду, если учесть, что при изотермическом процессе выполняется закон Бойля – Мариотта

$p_1 V_1 = p_2 V_2$, откуда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$. Тогда

$$A_{12} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (12.3.18)$$

Так как для идеального газа при $T = \text{const}$ ($dU = 0$), то первое начало термодинамики можно записать в следующем виде

$$\delta Q = \delta A \Rightarrow Q_{12} = A_{12} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (12.3.19)$$

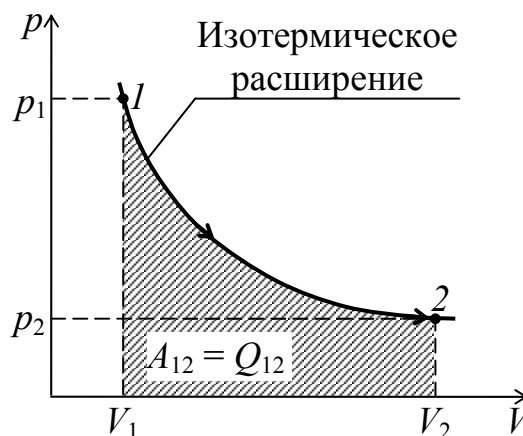


Рис. 12.3.3

12.4. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона

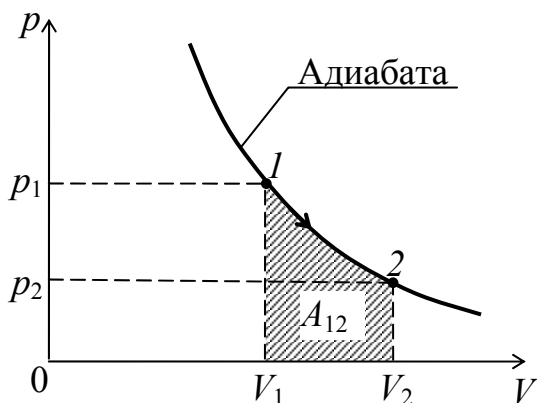


Рис. 12.4.1

Адиабатическим называется процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой. Определим уравнение, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе. Так как по условию $\delta Q = 0$, то первое начало термодинамики можно записать в следующем виде

$$0 = \delta A + dU \Rightarrow \delta A = -dU. \quad (12.4.1)$$

Работа газа при адиабатическом процессе происходит за счет убыли внутренней энергии.

Учитывая, что $dU = \frac{i}{2}URdT = \nu C_V^M dT$, а $\delta A = pdV$, получим

$$pdV = -\nu C_V^M dT. \quad (12.4.2)$$

Выразим давление из уравнения Менделеева – Клапейрона $p = \frac{\nu RT}{V}$ и подставим в (12.4.1)

$$-\nu C_V^M dT = \nu RT \frac{dV}{V} \Rightarrow -C_V^M dT = RT \frac{dV}{V}. \quad (12.4.3)$$

Приведем полученное выражение (12.4.3) к виду

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V^M} \frac{dV}{V}. \quad (12.4.4)$$

Проинтегрируем выражение (12.4.4) в пределах от T_1 до T_2 , и от V_1 до V_2 :

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V^M} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = -\frac{R}{C_V^M} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.4.5)$$

$$\frac{R}{C_V^M} = \frac{C_p^M - C_V^M}{C_V^M} = \frac{C_p^M}{C_V^M} - 1 = \gamma - 1 \Rightarrow \gamma = \frac{C_p^M}{C_V^M} = \frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i}, \quad (12.4.6)$$

где γ – *адиабатическая постоянная*.

Выражение (12.4.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \ln \frac{T_2}{T_1} = -(\gamma - 1) \ln \frac{V_2}{V_1} &\Rightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

или

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (12.4.8)$$

Перейдем от этого уравнения к уравнению в переменных p , V . Для этого выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона температуру: $T = \frac{pV}{\nu R}$ и подставим в уравнение (12.4.8)

$$\frac{pV}{\nu R} V^{\gamma-1} = \text{const} \Rightarrow \frac{pV^\gamma}{\nu R} = \text{const}. \quad (12.4.9)$$

Учитывая, что ν и R – постоянные величины, получим

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (12.4.10)$$

Выражение (12.4.10) получило название *уравнение Пуассона*.

Теперь перейдем к уравнению в переменных p, T . Из уравнения Менделеева – Клапейрона выразим объем $V = \frac{\nu RT}{p}$. Тогда подставив в уравнение (12.4.10) получим:

$$p \left(\frac{\nu RT}{p} \right)^\gamma = \text{const}. \quad (12.4.11)$$

Так как ν и R – постоянные, получим

$$p \left(\frac{T}{p} \right)^\gamma = \text{const} \quad \text{или} \quad p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}. \quad (12.4.12)$$

Определим работу, совершаемую газом при адиабатическом процессе. Так как при адиабатическом процессе $\delta A = -dU$, и учитывая, что $dU = \nu C_V^M dT$, получим

$$\delta A = -\nu C_V^M dT. \quad (12.4.13)$$

Проинтегрировав полученное выражение от T_1 до T_2 , получим:

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} -\nu C_V^M dT = -\nu C_V^M \int_{T_1}^{T_2} dT = \nu C_V^M (T_1 - T_2) = \frac{m}{M} C_V^M (T_1 - T_2). \quad (12.4.14)$$

Формулу (12.4.14) можно преобразовать следующим образом $C_V^M = \frac{R}{\gamma - 1}$, а $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$.

Отсюда

$$T_2 = \frac{T_1 V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}. \quad (12.4.15)$$

Подставим (12.4.15) в выражение (12.4.14), и получим

$$A = \nu \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \quad \text{или} \quad A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right], \quad (12.4.16)$$

учитывая, что $\nu RT_1 = p_1 V_1$.

12.5. Политропические процессы

Рассмотренные изохорный, изобарный, изотермический и адиабатический процессы происходят при постоянной теплоемкости. Процесс, при котором теплоемкость тела остается постоянной называется *политропическим*. Таким образом, условие, которое выполняется в ходе политропического процесса, заключается в том, что

$$C = \text{const.} \quad (12.5.1)$$

Найдем уравнение политропы для идеального газа. Для этого запишем уравнение первого начала термодинамики для идеального газа в виде

$$\nu C dT = \nu C_V^M dT + p dV. \quad (12.5.2)$$

В полученное уравнение входят все три параметра: p , V и T . Исключим параметр T , и получим уравнение политропы в переменных p , V . Для этого продифференцируем соотношение $pV = \nu RT$:

$$d(pV) = \nu R dT \Rightarrow p dV + V dp = \nu R dT. \quad (12.5.3)$$

Выразим из уравнения (12.5.3) dT и подставим в уравнение (12.5.2)

$$(C - C_V^M) \frac{p dV + V dp}{R} = p dV. \quad (12.5.4)$$

$$(C - C_V^M - R) p dV + (C - C_V^M) V dp = 0. \quad (12.5.5)$$

Заменив в данном уравнении $C_V^M + R$ через C_p^M и разделив на pV , придем к дифференциальному уравнению вида:

$$(C - C_p^M) \frac{dV}{V} + (C - C_V^M) \frac{dp}{p} = 0. \quad (12.5.6)$$

Интегрирование уравнения (12.5.6) приводит к соотношению

$$(C - C_p^M) \ln V + (C - C_V^M) \ln p = \text{const}. \quad (12.5.7)$$

Разделив данное соотношение на $(C - C_V^M)$ (что возможно, если $C \neq C_V^M$), получаем

$$\left(\frac{C - C_p^M}{C - C_V^M} \right) \ln V + \ln p = \text{const} \Rightarrow n \ln V + \ln p = \text{const}, \quad (12.5.8)$$

где $n = \frac{C - C_p^M}{C - C_v^M}$ – показатель политропы.

Произведя потенцирование, получим

$$pV^n = \text{const} \quad - \quad \text{уравнение политропы.} \quad (12.5.9)$$

При $C = C_v^M$ из (12.5.7) получим

$$(C - C_p^M) \ln V = \text{const} \Rightarrow V = \text{const.} \quad (12.5.10)$$

Откуда следует, что это изохорический процесс. При этом процессе показатель политропы $n \rightarrow \infty$.

Для изобарического процесса $n = 0$, для изотермического $n = 1$, для адиабатического $n = \gamma$.

Определим работу, которая совершается при политропическом процессе. Выразим давление через объем, применив уравнение политропы (12.5.9):

$$pV^n = p_1V_1^n = p_2V_2^n, \quad (12.5.11)$$

где p_1, V_1 и p_2, V_2 – значения давления и объема газа соответственно в начальном и конечном состояниях; p и V – давление и объем в любом промежуточном состоянии.

Отсюда $p = p_1V_1^n/V^n$. Тогда работа равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}. \quad (12.5.12)$$

Для случая, когда $n \neq 1$, интеграл (12.5.12) равен

$$A = p_1V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_1V_1^n}{n-1} \left(\frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}} \right) = \frac{p_1V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right], \quad (12.5.13)$$

или учитывая, что $p_1V_1 = \nu RT_1$, получим

$$A = \nu \frac{RT_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (12.5.14)$$

Лекция № 19

12.6. *Второе начало термодинамики.*

12.7. *Обратимые и необратимые термодинамические процессы. Круговой процесс.*

12.8. *Тепловые и холодильные машины.*

12.9. *Идеальная тепловая машина Карно и ее КПД.*

12.6. Второе начало термодинамики

Анализ различных термодинамических процессов свидетельствует о том, что первый закон термодинамики не указывает направление протекания термодинамического процесса. Действительно, самопроизвольный процесс передачи энергии от холодного тела горячему не противоречит первому закону термодинамики, если только уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, полученной вторым телом. Однако в природе такой процесс не наблюдается. Основываясь на первом законе термодинамики, можно было бы попытаться построить периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет непрерывного охлаждения одного и того же источника теплоты, например за счет внутренней энергии океанов. Однако такой процесс, хотя он и удовлетворяет первому началу термодинамики, реализовать невозможно, что равноценно утверждению о невозможности построения так называемого *вечного двигателя второго рода*. Неоднократные попытки создания такого двигателя привели к открытию *второго начала термодинамики*. Его содержание, являясь обобщением огромного экспериментального материала, указывает на направленность самопроизвольного термодинамического процесса в замкнутой системе. Существует ряд эквивалентных формулировок второго начала термодинамики:

1. Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от менее нагретого тела более нагретому (*формулировка Клаузиуса*).

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную работу (*формулировка Кельвина*).

Второй закон термодинамики указывает на неравноценность двух форм передачи энергии – работы и теплоты. Этот закон учитывает тот факт, что процесс перехода энергии упорядоченного движения тела как целого (механической энергии) в энергию неупорядоченного движения его частиц (тепловую энергию) необратим. Например,

механическая энергия при трении переходит в теплоту без каких-либо дополнительных (компенсирующих) процессов. Переход же энергии неупорядоченного движения частиц (внутренней энергии) в работу возможен лишь при условии, что он сопровождается каким-либо дополнительным процессом.

12.7. Обратимые и необратимые термодинамические процессы. Круговой процесс

Термодинамический процесс называется *обратимым*, если он может быть проведен как в прямом, так и в обратном направлении через одни и те же состояния. При этом в окружающих термодинамическую систему телах никаких изменений не должно произойти. В противном случае процесс называется *необратимым*.

В качестве примера обратимого процесса в механике можно привести движения математического маятника. При отсутствии сил трения в подвесе и сопротивления среды колебательное движение маятника обратимо во времени. Механические процессы при наличии сопротивления и трения необратимы, поскольку связаны с необратимыми изменениями состояния окружающей среды.

Примерами необратимых процессов в молекулярной физике могут служить расширение газа в пустоту и переход теплоты от более нагретого тела к менее нагретому. Если с помощью каких-то механизмов осуществить эти процессы в обратном направлении и вернуть систему в исходное состояние, то в окружающих телах обязательно возникнут изменения, связанные с превращением некоторого количества механической энергии в тепловую.

Пусть, например, имеется идеальный газ в объеме (рис. 12.7.1), отделенном перегородкой от объема, в котором создан абсолютный вакуум. Если удалить перегородку, то газ, расширяясь без совершения работы, займет весь объем сосуда (рис. 12.7.1). Этот процесс происходит необратимо. Можно ждать сколько угодно долго, однако газ сам по себе не соберется вновь в объеме V_1 . Вернуть его опять в состояние с объемом V_1 можно, но для этого нужно правую стенку передвинуть, как поршень (рис. 12.7.1). При этом силы давления поршня совершат над газом некоторую работу

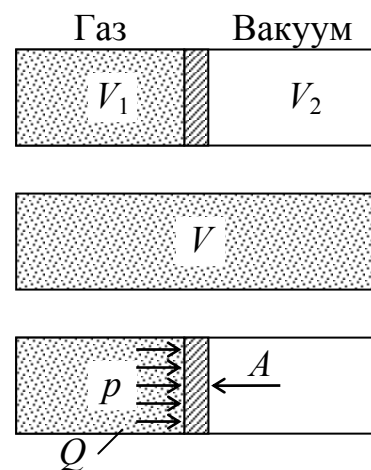


Рис. 12.7.1

A . В результате газ нагреется. Следовательно, при проведении обратного процесса от сжимаемого газа нужно будет отвести количество теплоты $Q = A$, которое увеличит энергию теплового движения молекул окружающих тел. Таким образом, при проведении обратного процесса во внешних телах произошли бы изменения (они нагрелись бы). Следовательно, рассмотренный здесь процесс расширения газа в пустоту является необратимым. Аналогично рассуждая, можно убедиться, что процесс перехода теплоты от более нагретого тела к более холодному также необратим. Все тепловые процессы, протекающие с конечной скоростью, необратимы. Однако бесконечно медленно проводимый процесс, состоящий из бесконечно большой последовательности промежуточных равновесных состояний (квазистатический процесс), является обратимым. Примером такого обратимого процесса может служить адиабатическое (или изотермическое) изменение объема идеального газа при его квазистатическом расширении или сжатии.

Циклом или круговым процессом называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное.

На термодинамической диаграмме pV равновесный цикл изображается замкнутой кривой (рис. 12.7.2).

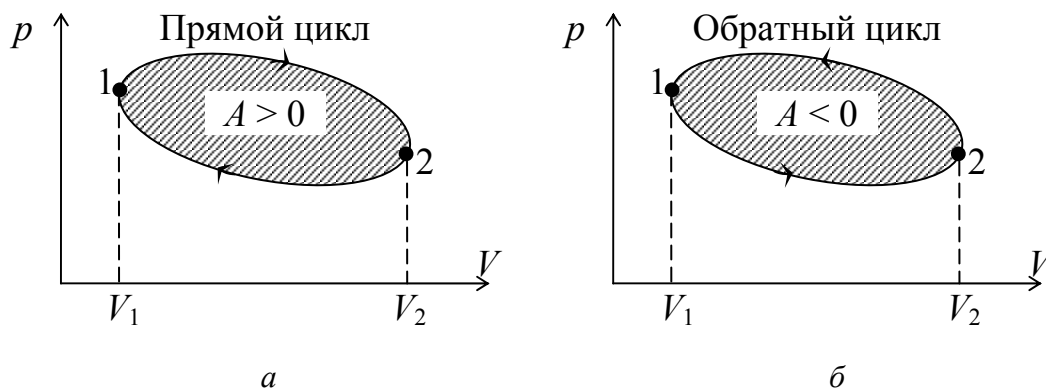


Рис. 12.7.2

Цикл, совершаемый системой, можно разбить с помощью точек 1 и 2 на процессы расширения 1–2 и сжатия 2–1. Работа расширения является положительной, а работа сжатия – отрицательной. Следовательно, суммарная работа, совершаемая за цикл, определяется площадью, охватываемой кривой цикла в переменных p, V . Если за цикл совершается положительная работа $A = \oint pdV > 0$, цикл осуществляется по ходу часовой стрелки (рис. 12.7.2, а), то он называется *прямым*. Если за цикл выполняется отрицательная работа $A = \oint pdV < 0$, цикл

протекает против хода часовой стрелки (рис. 12.7.2, б), то он называется *обратным*.

12.8. Тепловые и холодильные машины

Прямой цикл реализуется в *тепловом двигателе* – периодически действующем устройстве, которое совершает работу за счет полученной от нагревателя теплоты Q . Обратный цикл используется в *холодильных установках* – периодически действующих устройствах, в которых за счет работы A внешних сил теплота переносится от более холодного тела к телу с более высокой температурой.

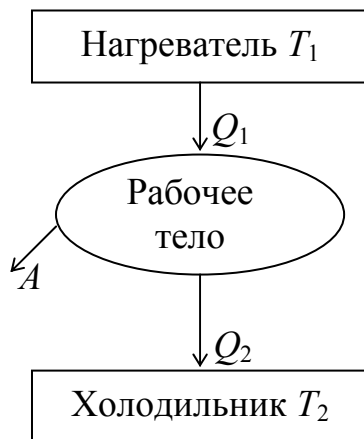


Рис. 12.8.1

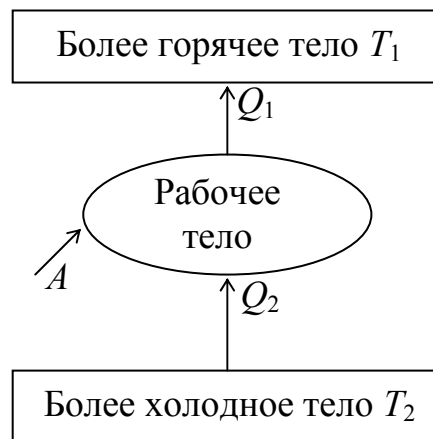


Рис. 12.8.2

Рассмотрим принцип действия теплового двигателя (рис. 12.8.1). В тепловом двигателе от нагревателя с температурой T_1 за цикл отнимается количество теплоты Q_1 , а холодильнику с более низкой температурой ($T_2 < T_1$) за цикл передается количество теплоты Q_2 . При этом совершается работа. Поскольку термодинамическая система (тепловая машина) за цикл возвращается в исходное состояние (внутренняя энергия оказывается прежней), то на основании первого начала термодинамики получим значение работы теплового двигателя за цикл:

$$A = Q_1 - |Q_2|. \quad (12.8.1)$$

Термический коэффициент полезного действия (КПД) определяется отношением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \quad (12.8.2)$$

Рассмотрим принцип действия холодильной установки (рис. 12.8.2). В холодильной установке за счет совершения внешними силами работы A от более холодного тела с температурой T_2 за цикл отни-

мается количество теплоты Q_2 и отдается во внешнюю среду с температурой ($T_1 > T_2$) количество теплоты, равное Q_1 . Для оценки эффективности работы холодильной установки используют отношение количества теплоты, отнятого за цикл от холодильной камеры, к работе A внешних сил. Эта величина называется *показателем цикла k* , или *холодильным коэффициентом*:

$$k = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2}. \quad (12.8.3)$$

12.9. Идеальная тепловая машина Карно и ее КПД

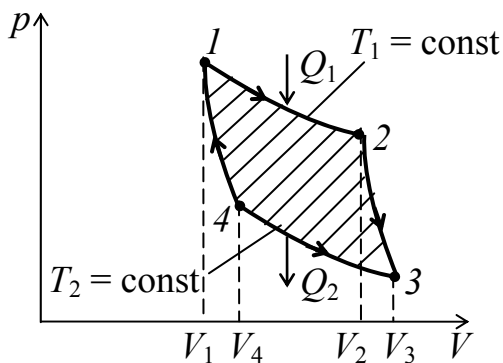


Рис. 12.9.1

При изучении работы различных тепловых машин большую роль сыграл цикл, предложенный Карно и детально рассмотренный им в 1824 г. в связи с определением КПД тепловых машин. Циклом Карно называют обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотермических и двух адиабатических равновесных процессов.

На рис. 12.9.1 изображен прямой цикл Карно, состоящий из четырех последовательных процессов: $1-2$ – изотермическое расширение при температуре T_1 ; $2-3$ – адиабатическое расширение ($Q_{23} = 0$); $3-4$ – изотермическое сжатие при температуре T_2 ; $4-1$ – адиабатическое сжатие ($Q_{41} = 0$).

Рассчитаем работу A , совершаемую идеальным газом в прямом равновесном цикле Карно. При изотермическом расширении на участке $1-2$ внутренняя энергия $U(T) = \text{const}$, поэтому количество теплоты Q_1 полученное газом от нагревателя, равно работе расширения, совершаемой газом при переходе из состояния 1 в состояние 2 :

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.9.1)$$

При адиабатическом расширении $2-3$ теплообмен с окружающей средой отсутствует, и работа расширения A_{23} совершается за счет изменения внутренней энергии газа:

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = \nu C_V^M (T_1 - T_2). \quad (12.9.2)$$

При изотермическом сжатии на участке 3–4 теплота, отданная газом холодильнику, отрицательна и равна

$$Q_2 = Q_{34} = A_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (12.9.3)$$

При адиабатическом сжатии на участке 4–1 работа A_{41} равна

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = \nu C_V^M (T_2 - T_1) = -\nu C_V^M (T_1 - T_2) = -A_{23}. \quad (12.9.4)$$

Суммарная работа равна

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|. \quad (12.9.5)$$

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 \ln(V_2/V_1) - T_2 \ln(V_3/V_4)}{T_1 \ln(V_2/V_1)}. \quad (12.9.6)$$

Применим уравнение адиабаты $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ на участках 2–3 и 4–1 цикла Карно

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad \text{и} \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (12.9.7)$$

Разделим одно выражение на второе и получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (12.9.8)$$

С учетом соотношения (12.9.8) выражение (12.9.6) для КПД цикла можно упростить:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (12.9.9)$$

Таким образом, для цикла Карно КПД определяется только температурами нагревателя и холодильника.

Сравнение КПД различных обратимых и необратимых циклов с КПД обратимого цикла Карно (идеальной тепловой машины) позволило сделать следующий вывод: *КПД любого реального обратимого или необратимого прямого кругового процесса (тепловой машины) не может превышать КПД идеальной тепловой машины с теми же температурами T_1 нагревателя и T_2 холодильника.* Принимая во внимание формулы (12.8.2) и (12.9.9), можно записать:

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (12.9.10)$$

Более общий анализ показывает, что формула (12.9.9) справедлива, если цикл Карно совершает любое рабочее тело, а не только идеальный газ. В этом случае формула (12.9.9) выражает *теорему Карно*: КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и от технических способов осуществления цикла. Единственные параметры, определяющие КПД этого цикла, – это температуры нагревателя и холодильника. Другая формулировка *теоремы Карно*: коэффициент полезного действия всех обратимых машин, работающих в идентичных условиях (т. е. при одной и той же температуре нагревателя и холодильника), одинаков и определяется только температурами нагревателя и холодильника.

Обратный цикл Карно служит основой работы идеальной холодильной установки. Для холодильного коэффициента k выполняется выражение

$$k = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (12.9.11)$$

Из этого выражения видно, что чем меньше разность между температурами окружающей среды T_1 и холодильной камеры T_2 , тем больше холодильный коэффициент k и тем эффективнее работа холодильной установки. Заметим также, что $k = T_2 / (T_1 - T_2)$ может быть больше единицы и это не противоречит тому, что КПД теплового двигателя всегда меньше 1.

Лекция № 20

12.10. *Понятие об энтропии. Энтропия идеального газа. Статистическое истолкование второго начала термодинамики.*

12.11. *Третье начало термодинамики.*

12.10. Понятие об энтропии. Статистическое истолкование второго начала термодинамики. Энтропия идеального газа

Кроме внутренней энергии U , которая является однозначной функцией параметров состояния системы T и V , в термодинамике широко используются и другие функции состояния (свободная энергия, энтальпия, энтропия и т. д.). Энтропия (от греч. entropia – поворот, превращение) как функция состояния выделяется среди других термодинамических функций тем, что имеет статистическую, т. е. вероятностную, природу.

В термодинамике понятие энтропия вводится с помощью приведенного количества теплоты Q^* . В изотермическом процессе

$$Q^* = Q/T. \quad (12.10.1)$$

Если температура не постоянна ($T \neq \text{const}$), то произвольный процесс нужно разбить на бесконечно малые участки, где температуру можно считать постоянно, и ввести элементарное приведенное количество теплоты

$$\delta Q^* = \delta Q/T. \quad (12.10.2)$$

Приведенная теплота на конечном участке $1-2$ этого процесса будет определяться интегралом:

$$Q_{12}^* = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (12.10.3)$$

В качестве примера рассчитаем приведенную теплоту для идеального цикла Карно (рис. 12.9.1):

$$Q^* = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} + \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2}. \quad (12.10.4)$$

Здесь учтено, что на изотермических участках $1-2$ и $3-4$ температура T постоянна и равна T_1 и T_2 соответственно, а в адиабатических процессах $2-3$ и $4-1$ величина $\delta Q = 0$. Поскольку

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

и $|Q_2| = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow \frac{|Q_2|}{T_2} = \nu R \ln \frac{V_3}{V_4}.$ (12.10.5)

Так как $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$, то приведенное количество теплоты $Q^* = 0$ цикла равно нулю. Оказывается, что этот результат является общим свойством приведенной теплоты для любого обратимого цикла:

$$Q^* = 0 \Rightarrow \oint \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обр}} = 0. \quad (12.10.6)$$

Отсюда следует, что подинтегральное выражение $(\delta Q/T)_{\text{обр}}$ является полным дифференциалом некоторой функции S , которую называют *энтропией*. Таким образом, для обратимого процесса изменение энтропии определяется выражениями

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow \Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (12.10.7)$$

Энтропия как функция состояния системы обладает уникальным свойством: энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать. Она остается постоянной в обратимых процессах и возрастает в необратимых. Следовательно, имеет место *закон возрастания энтропии*:

$$\Delta S \geq 0. \quad (12.10.8)$$

– статистическая формулировка второго начала термодинамики.

Большинство явлений в природе сопровождается необратимыми процессами, поэтому все самопроизвольные процессы имеют такую направленность, при которой энтропия замкнутой системы возрастает и стремится к своему максимально возможному значению, соответствующему равновесному состоянию. Необратимый характер процессов связан с переходом от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным. Поэтому энтропия, определяющая направление протекания необратимых процессов, должна быть связана с вероятностью. Больцман показал, что энтропия S пропорциональна логарифму веро-

ятности состояния:

$$S = k \ln W, \quad (12.10.9)$$

где k – постоянная Больцмана; W – вероятность данного состояния.

Изменение энтропии идеального газа

Найдем изменение энтропии идеального газа при любом произвольном процессе

$$\begin{aligned} \Delta S_{12} &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_V dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{pdV}{T} = \\ &= \nu C_V^M \ln \frac{T_2}{T_1} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R dV}{V} = \nu C_V^M \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned} \quad (12.10.10)$$

Изменение энтропия при нагревании тела

Найдем изменение энтропии тела при нагревании от температуры T_1 до T_2 :

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{c^{уд} m dT}{T} = c^{уд} m \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu C^M \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (12.10.11)$$

Изменение энтропия при плавлении и парообразовании:

Найдем изменение энтропии тела при плавлении и парообразовании:

$$\Delta S_{пл} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_{пл}} = \frac{Q_{пл}}{T_{пл}} = \frac{\lambda m}{T_{пл}} \quad \text{и} \quad \Delta S_{пар} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_{кип}} = \frac{Q_{пар}}{T_{кип}} = \frac{r m}{T_{кип}}. \quad (12.10.12)$$

где λ - удельная теплота плавления; $T_{пл}$ - температура плавления; r - удельная теплота парообразования; $T_{кип}$ - температура кипения.

12.11. Третье начало термодинамики

Третье начало термодинамики (или *теорема Нернста*) было открыто в 1906 г. В. Нернст в процессе термодинамического исследования изменения энтропии химических реакций. Оно тесно связано с поведением теплоемкости при абсолютном нуле температур. Теорема Нернста утверждает, что при приближении к абсолютному нулю энтропия системы также стремится к нулю независимо от того, какие значения принимают все остальные параметры состояния системы:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T, V) = 0 \quad - \quad (12.11.1)$$

– *третье начало термодинамики.*

Поскольку энтропия равна

$$S = \int_0^T \frac{\delta Q}{T} = \int_0^T C \frac{dT}{T}, \quad (12.11.2)$$

а температура T стремится к нулю, теплоемкость вещества также должна стремиться к нулю, причем быстрее, чем T . Отсюда следует *недостижимость абсолютного нуля температуры при конечной последовательности термодинамических процессов, т. е. конечного числа операций – циклов работы холодильной машины.*

РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ

Лекция № 21

13.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы газа Ван-дер-Ваальса.

13.2. Экспериментальные изотермы реального газа.

13.3. Критические параметры и их связь с поправками Ван-дер-Ваальса.

13.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы газа Ван-дер-Ваальса.

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что между атомами и молекулами вещества на малых расстояниях действуют силы отталкивания F_o , а на больших – силы притяжения F_n (рис. 13.1.1, а). Эти силы являются результатом квантовомеханического взаимодействия элементарных частиц (электронов, протонов), из которых состоят эти атомы или молекулы. В случае простых неполярных веществ притяжение в основном обусловлено взаимодействием наведенных дипольных моментов молекул. Эти сравнительно слабые *ван-дер-ваальсовы силы* зависят от расстояния r между молекулами по степенному закону ($F \approx r^{-n}$) и, следовательно, носят короткодействующий характер. Область их действия порядка 10^{-9} м, т. е. на расстояниях, больших нм, эти силы практически равны нулю. Переход от отталкивания на малых расстояниях к притяжению на больших расстояниях способствует появлению минимума на кривой зависимости потенциальной энергии W взаимодействия двух частиц от расстояния r между ними (рис. 13.1.1, б). На расстоянии r_0 , которое соответствует минимуму потенциальной энергии, сила взаимодействия F обращается в нуль. Положение минимума определяет равновесное расстояние для системы из двух частиц. Для двух молекул простых веществ

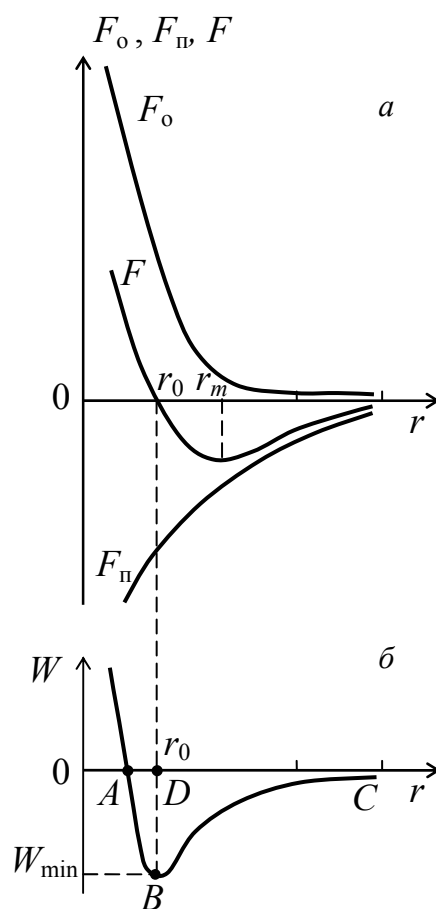


Рис. 13.1.1

явный вид потенциальной энергии $\Phi(r)$ взаимодействия, которое описывается потенциалом Леннарда – Джонса, имеет вид

$$\Phi(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]. \quad (13.11)$$

Значения величин ε и σ , которые являются параметрами этого потенциала, можно определить в результате обработки экспериментальных данных о термодинамических свойствах каждого отдельного вещества. Они содержатся в различных справочниках.

Наличие сил притяжения и отталкивания приводит к тому, что при больших давлениях (когда расстояние между молекулами уменьшается) поведение реального газа будет отличаться от модели идеального газа. Одно из наиболее известных приближенных уравнений описывающих состояние реального газа было предложено голландским физиком Ван-дер-Ваальсом. Это уравнение базируется на законе Менделеева – Клапейрона и содержит два параметра (a и b), с помощью которых учитывается вклад сил притяжения на больших расстояниях и сил отталкивания на малых расстояниях между молекулами реального газа.

Силы отталкивания противодействуют проникновению данной частицы в ту область объема сосуда, которая занята другими молекулами. Собственный объем V_0 , занятый частицей, представляется как объем шара с некоторым эффективным диаметром d . Поэтому «свободный объем» V^* , в котором могут свободно (как в идеальном газе) двигаться молекулы реального газа, будет на некоторую величину меньше, чем объем V , занимаемый газом. «Свободный объем» будет равен

$$V^* = V - vb, \quad (13.1.2)$$

где b – поправочный коэффициент для одного моля газа.

Приближенные расчеты показывают, что объем, занятый молекулой, равен учетверенному собственному объему этой молекулы V_0 . Тогда поправка b равна

$$b = 4N_a V_0. \quad (13.1.3)$$

Наличие сил притяжения между молекулами приводит к дополнительному «внутреннему» давлению p^i , которое оказывается обратно пропорциональным квадрату V

$$p_i = v^2 \frac{a}{V^2}, \quad (13.1.4)$$

где a – второй поправочный коэффициент.

В результате внешнее давление p , которое необходимо приложить к реальному газу для удержания его в заданном объеме V , уменьшается по сравнению с давлением p^* в случае идеального газа. Это значит, что

$$p = p^* - p_i = p^* - v^2 \frac{a}{V^2}. \quad (13.1.5)$$

Свободный объем V^* и давление p^* связаны уравнением Клапейрона – Менделеева

$$p^* V^* = \nu RT. \quad (13.1.6)$$

Подставляя в (13.1.6) выражения (13.1.2) и (13.1.5), получаем приближенное уравнение состояния для реального газа

$$\left(p + v^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT. \quad (13.1.7)$$

Следует отметить, что уравнение Ван-дер-Ваальса лучше согласуется с опытными данными, чем уравнение Клапейрона – Менделеева, особенно при больших давлениях.

Проведем анализ уравнения Ван-дер-Ваальса. С этой целью построим зависимости давления от объема газа при постоянной температуре для нескольких значений температуры ($T_1 < T_2 < T_k < T_3 < T_4$). Результаты представлены на рис. 13.1.2. Полученные кривые – *изотермы Ван-дер-Ваальса*, оказываются довольно своеобразными: при низких температурах они имеют волнообразные участки (максимумы и минимумы), при некоторой температуре T_k на изотерме имеется только *точка перегиба* К, при высоких температурах изотермы Ван-дер-Ваальса похожи на изотермы идеального газа.

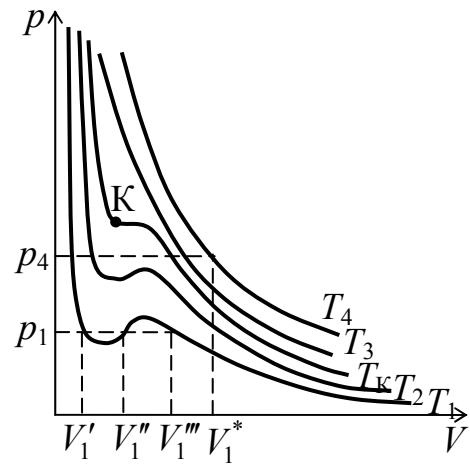


Рис. 13.1.2

С математической точки зрения такой характер изотерм объясняется очень просто. Если привести уравнение Ван-дер-Ваальса к нор-

мальному виду, то оно окажется *кубическим уравнением* относительно объема V . Кубическое уравнение может иметь либо три вещественных корня, либо один вещественный корень и два мнимых. Очевидно, что первому случаю соответствуют изотермы при низких температурах (три значения объема газа V_1', V_1'', V_1''' отвечают одному значению давления p_1), а второму случаю – изотермы при высоких температурах (одно значение объема V_4 отвечает одному значению давления p_4) (рис. 13.1.2).

13.2. Экспериментальные изотермы реального газа

Для практической проверки уравнения состояния реального газа и выяснения физического смысла своеобразного характера изотерм Ван-дер-Ваальса удобно воспользоваться результатами *опыта*, поставленного в 1869 г. незадолго до теоретических исследований Ван-дер-Ваальса английским химиком *Эндрюсом*.

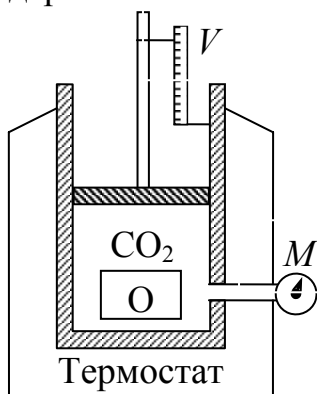


Рис. 13.2.1

Эндрюс экспериментировал с углекислым газом (CO_2). Схема опыта изображена на рис. 13.2.1. Под поршнем цилиндра помещался моль углекислого газа. Давление и объем газа при любом положении поршня определялись по манометру M и шкале объемов V . Через герметически застекленное окошко O можно было видеть пространство, занятое газом. Весь цилиндр помещался в термостат, позволявший устанавливать и поддерживать необходимую температуру газа. С помощью этой установки Эндрюс

провел с углекислым газом ряд изотермических процессов при различных температурах. Полученные им результаты представлены на рис. 13.2.2.

В опыте Эндрюса надо отметить следующее весьма важное обстоятельство. До тех пор пока газ сжимался при высоких температурах ($> 304 \text{ K}$), в пространстве под поршнем не происходило никаких видимых процессов, когда же сжатие производилось при низких температурах ($< 304 \text{ K}$), Эн-

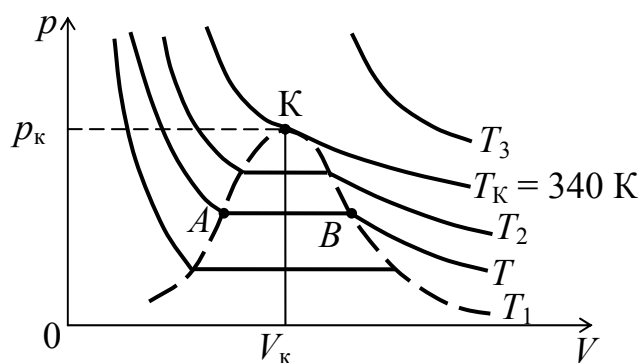


Рис. 13.2.2

дрюс увидел, что на некоторой стадии сжатия под поршнем появлялись капельки жидкости (туман), оседающие на стенки и стекающие на дно цилиндра. В конце концов весь цилиндр заполнился жидкой углекислотой. Давление на всей этой стадии, которой соответствуют горизонтальные участки изотерм, оставалось неизменным. Таким образом, горизонтальные участки («плато») экспериментальных изотерм соответствуют стадии сжижения газа, совершающегося при постоянном давлении. Иначе говоря, плато соответствует существованию жидкой и газообразной фаз.

Давление, при котором начинается сжижение газа, зависит от температуры (уменьшается с уменьшением температуры). Это давление называется *давлением насыщенного пара*. По мере уменьшения объема все большее и большее количество газа (точнее, насыщенного пара) переходит в жидкость. Жидкость трудно сжимаема. Поэтому левая ветвь изотермы, соответствующая жидкой фазе, круто поднимается вверх.

Из сравнения экспериментальных и теоретических изотерм следует (рис. 13.2.3), что они имеют одинаковый вид с той лишь разницей, что превращению газа в жидкость соответствуют: на изотермах Эндрюса – участки плато, а на изотермах Ван-дер-Ваальса – волнообразные участки.

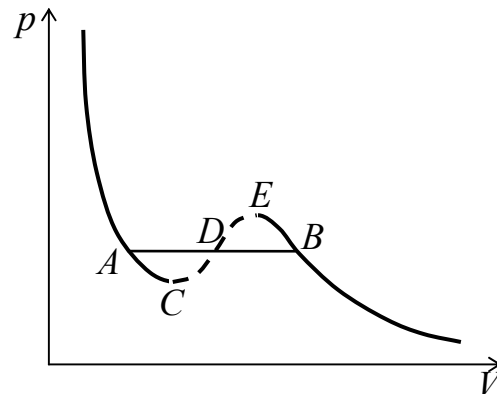


Рис. 13.2.3

Это различие объясняется следующим образом. Участок *EB* на изотерме Ван-дер-Ваальса соответствует *пересыщенному пару*, давление которого больше давления насыщенного пара при данной температуре. Участок *AC* соответствует так называемой *перегретой жидкости*, давление над которой меньше давления насыщенного пара при данной температуре. Оба эти состояния неустойчивы. Однако при тщательном проведении опыта (газ очищен от посторонних частиц – пылинок, установка не подвергается сотрясениям и колебаниям температуры, жидкость свободна от пузырьков газа и т. д.) удалось получить участки *EB* пересыщенного пара и *AC* перегретой жидкости. При несоблюдении упомянутых предосторожностей пересыщенный пар и перегретая жидкость переходят в насыщенный пар и жидкость, а волна изотермы превращается в плато. Участки *CB* и *DE* соответствуют столь неустойчивому состоянию

вещества, что их не удастся получить на опыте. Таким образом, опыт Эндрюса показывает, что уравнение Ван-дер-Ваальса хорошо отражает действительность и что его можно рассматривать как уравнение состояния реального газа, описывающее также состояние жидкости и процесс перехода газа в жидкость.

Из опыта Эндрюса и аналогичных опытов с другими газами выяснилось, что газ может быть переведен в жидкое состояние только при температурах, меньших некоторой *определенной для данного газа температуры* T_k ; при температурах, больших T_k , газ нельзя перевести в жидкое состояние никаким давлением. Температура T_k называется *критической*. Для углекислого газа $T_k = 304$ К. Итак, *критической* называется такая температура, выше которой газ нельзя превратить в жидкость никаким давлением, а ниже которой газ можно превратить в жидкость при некотором давлении, тем меньшем, чем ниже температура.

Следовательно, газ, находящийся при температуре, большей критической, отличается от газа, находящегося при температуре, меньшей критической. В этой связи газ, находящийся при температуре, меньшей критической, называется паром.

Изучая поверхностное натяжение на границе жидкости и ее пара Д. И. Менделеев в 1860 г., т. е. еще до исследований Эндрюса и Ван-дер-Ваальса, пришел к выводу о существовании критической температуры (названной им *температурой абсолютного кипения*), при которой различие в свойствах между жидкостью и газом исчезает, и коэффициент поверхностного натяжения обращается в нуль.

13.3. Критические параметры и их связь с поправками Ван-дер-Ваальса

Изотерма реального газа (рис. 13.2.2), соответствующая критической температуре, точка перегиба К и соответствующее ей состояние вещества, объем и давление, соответствующие критическому состоянию (координаты точки К), называются *критическими*. Параметры критического состояния вещества были определены для многих газов и газовых смесей.

Сравнивая изотеры Эндрюса и Ван-дер-Ваальса (рис. 13.2.3) можно выразить критические параметры через постоянные Ван-дер-Ваальса a и b :

Получим эти соотношения. Уравнение Ван-дер-Ваальса при критическом состоянии имеет вид

$$\left(p_{\kappa} + v^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - vb) = vRT_{\kappa}. \quad (13.3.1)$$

Приведем к кубическому уравнению относительно V

$$\begin{aligned} (V^2 p_{\kappa} + v^2 a)(V - vb) &= vRT_{\kappa} V^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow V^3 p_{\kappa} + v^2 a V - V^2 p_{\kappa} vb - v^3 ab &= vRT_{\kappa} V^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_{\kappa} V^3 - (p_{\kappa} vb + vRT_{\kappa}) V^2 + v^2 a V - v^3 ab &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow V^3 - \left(vb + \frac{vRT_{\kappa}}{p_{\kappa}}\right) V^2 + \frac{v^2 a}{p_{\kappa}} V - \frac{v^3 ab}{p_{\kappa}} &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

Так как при критическом режиме только один вещественный корень V_{κ} , то данное кубическое уравнение можно привести к виду

$$(V - V_{\kappa})^3 = 0 \Rightarrow V_{\kappa}^3 - 3V_{\kappa}^2 V + 3V_{\kappa} V - V_{\kappa}^3 = 0. \quad (13.3.3)$$

Сравним выражения (13.3.2) и (13.3.3), и получим

$$vb + \frac{vRT_{\kappa}}{p_{\kappa}} = 3V_{\kappa}; \quad (13.3.4)$$

$$\frac{v^2 a}{p_{\kappa}} = 3V_{\kappa}^2; \quad (13.3.5)$$

$$V_{\kappa}^3 = \frac{v^3 ab}{p_{\kappa}}. \quad (13.3.6)$$

Разделив выражение (13.3.6) на выражение (13.3.5), получим

$$V_{\kappa} = v3b. \quad (13.3.7)$$

Подставив (13.3.7) в выражение (13.3.5), получим

$$p_{\kappa} = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}. \quad (13.3.8)$$

Подставим (13.3.7) и (13.3.8) в выражение (13.3.4), получим

$$T_{\kappa} = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}. \quad (13.3.7)$$

Лекция № 22

13.4. *Внутренняя энергия реального газа.*

13.5. *Эффект Джоуля – Томпсона.*

13.4. *Внутренняя энергия реального газа*

У идеального газа внутренняя энергия $U_{\text{ид}}$ равна средней энергии поступательного, вращательного и колебательного движений его молекул. Внутренняя энергия идеального газа определяется соотношением

$$U_{\text{ид}} = \frac{i}{2} \nu RT. \quad (13.4.1)$$

В случае реальных газов внутренняя энергия равна сумме средней энергии поступательного, вращательного и колебательного движений его молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. С достаточной степенью точности можно считать, что кинетическая энергия теплового движения молекул реального газа определяется выражением (13.4.1).

$$K_{\text{реал}} = K_{\text{ид}} = U_{\text{ид}} = \frac{i}{2} \nu RT. \quad (13.4.2)$$

Учтем потенциальную энергию взаимодействия всех молекул. Вклад сил отталкивания в потенциальную энергию определяется поправкой b , которая считается независимой от T и V . Поэтому этот вклад во внутреннюю энергию можно не учитывать. Среднее значение энергии притяжения равно работе, которую нужно затратить, чтобы разнести все молекулы на бесконечно большие расстояния. Внутреннее давление в уравнении Ван-дер-Ваальса как раз и учитывает действие сил притяжения, поэтому потенциальная энергия взаимодействия равна

$$P_{\text{реал}} = -A = -\int_V^{\infty} p^i dV = \int_{\infty}^V \nu^2 \frac{a}{V^2} dV = -\nu^2 \frac{a}{V}. \quad (13.4.3)$$

Полная внутренняя энергия реального газа

$$U_{\text{реал}} = K_{\text{реал}} + P_{\text{реал}} = \nu \left(\frac{i}{2} \nu RT - \nu \frac{a}{V} \right) = \nu \left(C_V^M RT - \frac{\nu a}{V} \right). \quad 13.4.4)$$

Из формулы (13.4.4) видно, что внутренняя энергия реального газа зависит не только от температуры, но и от объема. Поэтому для

адиабатического процесса ($\delta Q = 0$), когда $dU = -pdV$, с учетом выражения (13.4.4) получим

$$v \left(C_V^M R dT + \frac{va}{V^2} dV \right) = -pdV. \quad (13.4.5)$$

Отсюда следует, что изменение температуры dT реального газа определяется не только работой сил давления газа при расширении (сжатии), но и изменением потенциальной энергии взаимодействия молекул газа. Этот тепловой эффект проявляется при расширении газа в пустоту, а также в опыте Джоуля – Томсона по дросселированию газа через пористую перегородку.

13.5. Эффект Джоуля – Томсона

Этот опыт был проведен Джоулем совместно с Томсоном. В соединительную трубку между сосудами A и B помещалась пробка из пористого вещества C (рис. 13.5.1). Трубка окружалась теплоизолирующим веществом. В сосудах A и B давления газа поддерживались постоянными. Газ протекал по трубке с перепадом давлений в месте, где расположена пробка. По обеим сторонам пробки помещались чувствительные термометры.

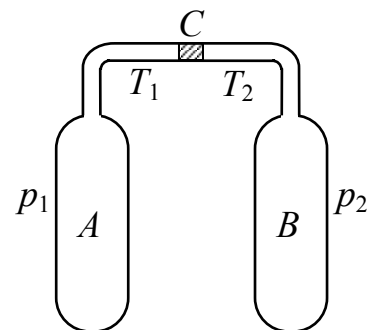


Рис. 13.5.1

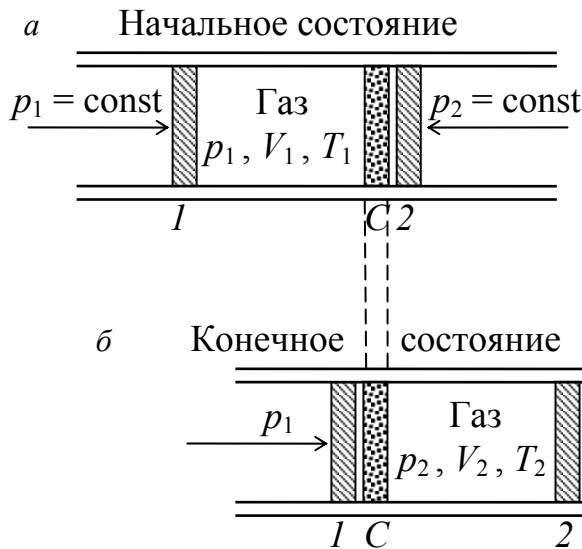
При этом была обнаружена незначительная разность температур, показываемых обоими термометрами. Для большинства газов температура с той стороны пробки, куда газ расширялся, была несколько ниже. Для водорода изменение температуры оказалось обратным: при расширении водород нагревался. Этот эффект, заключающийся в изменении температуры газа при расширении (без теплообмена), носит название *эффекта Джоуля – Томсона*. Он является следствием отступления свойств реальных газов от свойств идеального газа. Эффект Джоуля – Томсона, сводящийся к охлаждению газа при его расширении, принято называть *положительным*, а сводящийся к нагреванию – *отрицательным*.

Рассмотрим сущность опыта Джоуля – Томсона. Пусть теплоизолированной трубке имеются два поршня (рис. 13.5.2), которые могут перемещаться без трения. Газ, находившийся вначале слева от перегородки C и имевший параметры (p_1, V_1, T_1) , продавливается через пористую перегородку C с помощью поршня I в состояние с парамет-

рами (p_2, V_2, T_2) ($p_1 > p_2$). Так как сосуд теплоизолированный, то процесс можно считать адиабатическим. Применим к этому адиабатическому процессу первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A \Rightarrow U_2 - U_1 = -A. \quad (13.5.1)$$

Суммарная работа перехода системы из состояния 1 в состояние 2 состоит из работы $A_1 =$



стоит из работы $A_1 = p_1 \Delta V_1 = p_1(0 - V_1) = -p_1 V_1$, связанной с изменением объема от V_1 до нуля при постоянном давлении p_1 , и работы $A_2 = p_2 \Delta V_2 = p_2(V_2 - 0) = p_2 V_2$, связанной с изменением объема от нуля до V_2 при постоянном давлении p_2 .

Суммарная работа перехода равна

Рис. 13.5.1

$$A = A_1 + A_2 = p_2 V_2 - p_1 V_1. \quad (13.5.2)$$

Подставим (13.5.2) в (13.5.1)

$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2. \quad (13.5.3)$$

Какие следствия, вытекающих из условия (13.5.3)? Рассмотрим два предельных случая.

а) Предположим, что газ находится в таком состоянии, когда вкладом от сил притяжения можно пренебречь по сравнению со вкладом от сил отталкивания (параметр $a = 0$, а параметр $b \neq 0$). Тогда уравнение Ван-дер-Ваальса упростится, причем внутренняя энергия будет содержать только кинетическую энергию

$$p(V - vb) = \nu RT, \quad U = \nu C_V^M T. \quad (13.5.4)$$

Подстановка выражений (13.5.4) в формулу (13.5.3) приводит к следующему результату

$$\nu C_V^M (T_2 - T_1) = \nu (R(T_2 - T_1) + b(p_1 - p_2)) \Rightarrow$$

$$T_2 - T_1 = \frac{b(p_1 - p_2)}{C_V^M + R} \Rightarrow \Delta T = \frac{b(p_1 - p_2)}{C_p^M}. \quad (13.5.5)$$

Поскольку $p_1 > p_2$, то газ нагревается в процессе прохождения через пористую перегородку ($\Delta T > 0$ – отрицательный эффект Джоуля – Томсона).

б) Рассмотрим другую ситуацию, когда $a \neq 0$, а поправка $b = 0$. В этом случае

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2} \right) V = \nu R T \Rightarrow pV = \nu \left(RT - \frac{\nu a}{V} \right);$$

$$U = \nu \left(C_V^M R T - \frac{\nu a}{V} \right). \quad (13.5.6)$$

Следовательно, из соотношения (13.5.3) получим

$$\nu C_V^M (T_2 - T_1) - v^2 \left(\frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1} \right) = \nu R (T_1 - T_2) - v^2 \left(\frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{2av(V_1 - V_2)}{V_2 V_1 (C_V^M + R)} \Rightarrow \Delta T = \frac{2av(V_1 - V_2)}{V_2 V_1 C_p^M}. \quad (13.5.7)$$

Поскольку при дросселировании $V_2 > V_1$, то $\Delta T < 0$ (газ охлаждается – положительный эффект Джоуля – Томсона).

В случае, когда нельзя пренебречь ни той, ни другой поправкой, аналогичные преобразования приводят к следующей формуле

$$\Delta T \approx \frac{\nu}{C_p^M} \left(RT_1 \frac{b}{V_1 - \nu b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (13.5.8)$$

При выводе формулы (13.5.8) предполагалось, что объем V_2 после дросселирования намного больше, чем V_1 , и поэтому поправки во втором состоянии можно пренебречь. Выражение в правой части (13.5.8), определяющее знак величины ΔT , можно приравнять к нулю и получить уравнение

$$T_1 = \frac{2a}{bR} \frac{V_1 - \nu b}{V_1}. \quad (13.5.9)$$

Кривая (рис. 13.5.3), построенная по уравнению (13.5.9), разделяет плоскость первоначальных состояний V_1, T_1 на две области

($\Delta T > 0$ и $\Delta T < 0$), в пределах которых наблюдается при дросселировании либо положительный, либо отрицательный эффект Джоуля – Томсона. Совокупность параметров T_1 и V_1 , при которых имеет

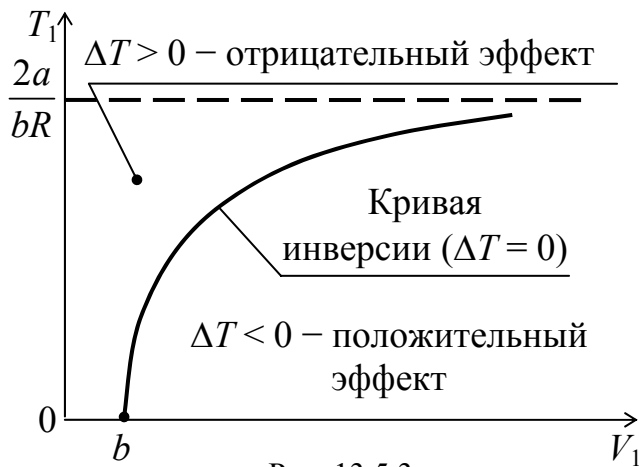


Рис. 13.5.3

место изменение знака эффекта Джоуля – Томсона, образует *кривую инверсии*.

Положительный эффект ($\Delta T < 0$) используется в машинах Дьюара – Линде для получения низких температур и сжижения газов (переход газ – жидкость). При этом удается получить температуры порядка 70 К для азота, 20 К для водорода и 1–4 К для гелия. Для по-

давляющего большинства газов температура инверсии выше нормальной температуры. Поэтому, расширяясь при нормальной температуре, газы охлаждаются. Исключение составляют водород ($T < 193$ К) и гелий ($T < 15$ К), которые нагреваются, расширяясь при нормальной температуре.

Схема машины Линде представлена на рис. 13.5.4. Газ, например воздух, сжимается в компрессоре К до давления порядка $2 \cdot 10^7$ Па и охлаждается в холодильнике Х проточной водой. Затем сжатый воздух проходит по внутренней трубке змеевика 3 и расширяется на ее конце В в конденсаторе С до давления в 10^5 Па. При этом он охлаждается примерно на 20 К. Расширившийся воздух вновь засасывается в компрессор по

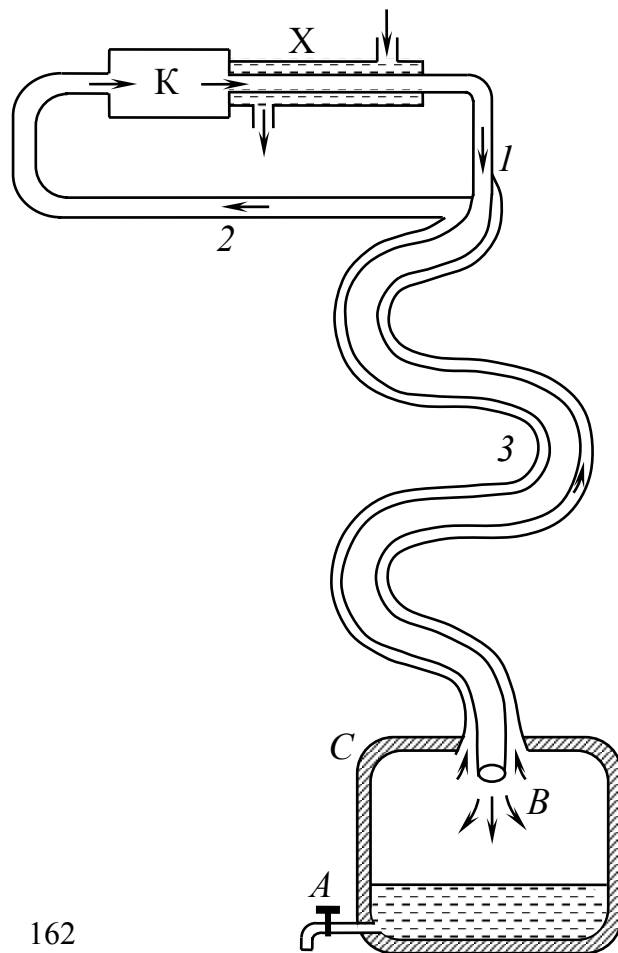


Рис. 13.5.4

внешней трубке 2 змеевика, охлаждая вторую порцию сжатого воздуха, текущего по трубке. Таким образом, вторая порция газа предварительно охлаждается уже в змеевике на 20 К и затем при расширении в конденсаторе еще на 20 К. Описанный процесс повторяется многократно. Каждая последующая порция расширяющегося воздуха будет охлаждаться сильнее предыдущей на 20 К. В результате воздух охладится до температуры, меньшей критической. При дальнейшей работе машины часть расширяющегося воздуха будет переводиться в жидкость и стекать на дно конденсатора. Через кран *A* жидкий воздух сливается в дьюаровские сосуды для хранения.

В настоящее время все известные газы удалось перевести в жидкое. Гелий был впервые сжижен Камерлинг - Оннесом в 1908 г. Испаряя жидкий гелий при очень низком давлении, Камерлинг - Оннес достиг температуры в 0,9 К. В последние годы тем же методом достигнута температура в 0,71 К и путем адиабатического размагничивания намагниченных тел получена температура ниже 0,1 К.

Для сжижения воздуха, кроме способа Дюара – Линде, употребляется еще способ, основанный на понижении температуры в результате совершения газом работы против внешних сил. В простейшем виде этот принцип осуществляется в машинах, в которых газ, сжатый до высокого давления, поступает в цилиндр («детандер») с поршнем. Отодвигая поршень, газ совершает против внешних сил работу за счет своей внутренней энергии, что ведет к понижению температуры газа. П. Л. Капица, например, используя этот метод, сконструировал машину для получения жидкого воздуха и других сжиженных газов, в которой охлаждение газа происходит за счет работы вращения турбины.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наркевич, И. И. Физика для ВТУЗов / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
2. Наркевич, И. И. Физика для ВТУЗов: в 2 т. / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Вышэйшая школа, 1992, 1994. – Т. 1–2.
3. Курс физики: учебное пособие для ВТУЗов: в 3 т. / А. А. Детлаф [и др.]. – М.: Высшая школа, 1987, 1989. – Т. 1–3.
4. Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для студ. втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Издат. центр «Академия», 2007. – 720 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – Т. 1–3.
6. Курс физики: учеб. для вузов: в 2 т. / под ред. В. Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2000. – Т. 1–2.
7. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1998. – 542 с.
8. Джанколи, Д. Физика: в 2 т. / Д. Джанколи. – М.: Мир, 1989. – Т. 1–2.

СПИСОК ТЕМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Фундаментальные взаимодействия (сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное)
2. Контактные взаимодействия (трения покоя, скольжения и качения, вязкое трение)
3. Силы упругости. Закон Гука для растяжения – сжатия, сдвига, кручения, изгиба.
4. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Вес тела.
5. Удар абсолютно упругих и неупругих тел.
6. Твердые тела. Моно- и поликристаллы. Типы кристаллических твердых тел. Дефекты в кристаллах.
7. Теплоемкость твердых тел.
8. Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение. Смачивание.
9. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Физические основы механики	3
1. Элементы кинематики	4
Лекция № 1	4
1.1. Предмет кинематики. Системы отсчета	4
1.2. Способы задания движения материальной точки	4
1.3. Средние, мгновенные скорости и ускорения	5
Лекция № 2	7
1.4. Нормальное и тангенциальное ускорения при криволинейном движении	7
1.5. Классификация движений материальной точки	9
1.6. Кинематика абсолютно твердого тела	10
1.7. Связь между линейными и угловыми характеристиками тела при его вращении	12
2. Динамика материальной точки	13
Лекция № 3	13
2.1. Основное уравнение динамики поступательного движения	13
2.2. Механический принцип относительности. Преобразования Галилея	16
2.3. Система материальных точек. Закон сохранения импульса	17
2.4. Центр масс. Уравнение движения центра масс	19
3. Работа, мощность, энергия	21
Лекция № 4	21
3.1. Работа переменной силы. Мощность	21
3.2. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии	22
3.3. Консервативные и неконсервативные силы	23
3.4. Потенциальная энергия. Связь между силой и энергией потенциального поля	24
3.5. Гравитационное поле. Работа в гравитационном поле	26
3.6. Закон сохранения механической энергии	29
4. Динамика абсолютно твердого тела	30
Лекция № 5	30
4.1. Динамика поступательного движения твердого тела	30

4.2. Момент импульса. Момент силы	31
4.3. Основное уравнение динамики вращательного движения относительно точки	32
4.4. Закон сохранения момента импульса	34
4.5. Момент инерции	34
4.6. Теорема Штейнера. Правило аддитивности	35
Лекция № 6	36
4.7. Основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси	36
4.8. Расчет моментов инерции	37
4.9. Кинетическая энергия вращающегося тела	40
4.10. Работа силы при вращении тела	40
5. Механические колебания	42
Лекция № 7	42
5.1. Свободные гармонические колебания и их характеристики	42
5.2. Сложение одинаково направленных и взаимно перпендикулярных гармонических колебаний	43
5.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение	47
5.4. Энергия гармонических колебаний	49
5.5. Пружинный, математический и физический маятники	50
5. Механические колебания	54
Лекция № 8	54
5.6. Затухающие гармонические колебания	54
5.7. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания	56
5.8. Вынужденные колебания	57
5.9. Резонанс	59
6. Механические волны	62
Лекция № 9	62
6.1. Распространение колебаний в упругой среде	62
6.2. Уравнение плоской волны	63
6.3. Волновое уравнение	65
6.4. Скорость распространения волн в различных средах	66
Лекция № 10	69
6.5. Волновой перенос энергии и его характеристики: поток, плотность потока, интенсивность	69
6.6. Фазовая и групповая скорости волн	72

6.7. Интерференция упругих волн	73
6.8. Стоячие волны	75
7. Элементы релятивистской механики	76
Лекция № 11	76
7.1. Границы применимости классической механики	76
7.2. Постулаты Эйнштейна	79
7.3. Преобразования Лоренца	80
7.4. Следствия из преобразований Лоренца	81
7.5. Теорема сложения скоростей в СТО	83
7. Элементы релятивистской механики	85
Лекция № 12	85
7.6. Импульс в релятивистской механике	85
7.7. Релятивистские законы Ньютона	85
7.8. Энергия релятивистской частицы. Закон взаимосвязи массы и энергии	86
7.9. Связь между энергией и импульсом частицы	89
8. Элементы квантовой механики	90
Лекция № 13	90
8.1. Корпускулярно-волновой дуализм материи	90
8.2. Волновые свойства микрочастиц. Опыт Дэвиссона и Джермера	91
8.3. Волновая функция и ее статистический смысл	93
8.4. Стационарное уравнение Шредингера	96
Лекция № 14	98
8.6. Волновая функция свободной частицы	98
8.7. Соотношение неопределенностей	99
8.8. Уровни энергии и волновая функция частицы, находящейся в прямоугольной потенциальной яме	101
ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ	
9. Молекулярно-кинетическая теория газов	105
Лекция № 15	105
9.1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	105
9.2. Внутренние степени свободы молекул	110
9.3. Закон распределения энергии молекулы по степеням свободы	111
9.4. Внутренняя энергия идеального газа	112

10. Статистические распределения	
в молекулярной физике	113
Лекция № 16	113
10.1. Понятие статистического распределения, функция	
распределения. Распределение Максвелла	
молекул газа по скоростям	113
10.2. Барометрическая формула	117
10.3. Распределение Больцмана	118
11. Явления переноса	120
Лекция № 17	120
11.1. Явления переноса: диффузия,	
теплопроводность, внутреннее трение	120
11.2. Длина свободного пробега и среднее число	
столкновений молекул идеального газа	122
11.3. Коэффициенты переноса для идеального газа	124
12. Основы термодинамики	129
Лекция № 18	129
12.1. Теплота и работа. Первое начало термодинамики	129
12.2. Теплоемкость тела и вещества	131
12.3. Первое начало термодинамики при изохорическом,	
изобарическом и изотермическом процессах	133
12.4. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона	135
12.5. Политропические процессы	138
Лекция № 19	140
12.6. Второе начало термодинамики	140
12.7. Обратимые и необратимые термодинамические	
процессы. Круговой процесс	141
12.8. Тепловые и холодильные машины	143
12.9. Идеальная тепловая машина Карно и ее КПД	144
Лекция № 20	147
12.10. Понятие об энтропии. Энтропия идеального газа.	
Статистическое истолкование второго начала	
термодинамики	147
12.11. Третье начало термодинамики	149
13. Реальные газы и жидкости	
Лекция № 21	151
13.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы газа	
Ван-дер-Ваальса	151

13.2. Экспериментальные изотермы реального газа	154
13.3. Критические параметры	156
Лекция № 22	158
13.4. Внутренняя энергия реального газа	158
13.5. Эффект Джоуля – Томпсона	159
Список использованной и рекомендованной литературы	164
Список тем для самостоятельного изучения	164