$$c_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad c_2 = \frac{u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

В данном случае получим искомое решение

$$u = \left(u_2 \ln \frac{r}{R_1} - u_1 \ln \frac{r}{R_2} \right) / \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

УДК 51-73

Студ. Н.А. Крюкова
Науч. рук. доцент И.М. Борковская
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАКОНА НЬЮТОНА ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ТЕЛА

Согласно закону, установленному Ньютоном, скорость охлаждения или нагревания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, т. е.

$$T' = -k\left(T - T_c\right),$$

при этом если в начальный момент времени температура тела T больше температуры окружающего пространства T_c (принято считать ее постоянной), то происходит охлаждение, и скорость T' отрицательна, а если $T < T_c$, – нагревание, и $T' > 0$. Значение k зависит как от физических свойств тела, так и его геометрической формы.

Были решены задачи, связанные с построением дифференциальных уравнений на основании закона Ньютона об охлаждении тела.

Задача 1. Тело охладилось за 10 минут от 70 до 40°С. Температура окружающей среды поддерживается равной 25°С. Сколько еще минут понадобится, чтобы тело остыло до 30°С?

Результат решения: время, прошедшее с момента охлаждения тела до 40°С, составило 10 минут.

Задача 2. Криминалисты, прибыв на место преступления, обнаружили труп человека, температура тела которого была 27°С . Через один час температура трупа стала 25°С . Температура окружающего воздуха 16°С. Считая, что в момент убийства человек имел температуру тела 37°, определите промежуток времени между моментом убийства человека и моментом обнаружения его тела.

Результат решения: с момента убийства до обнаружения тела прошло приблизительно 3 часа 15 минут.

Задача 3. (О работе хлебопекарни). В течение 20 минут температура вынутого из печи и помещенного на склад хлеба падает от 100°С до 60°С. Температура воздуха на складе равна 20°С. Через какое время от момента охлаждения температура хлеба понизится до 40°С?

Результат решения: температура хлеба понизится до 40°С через 40 минут.

Рассмотренные примеры показывают, что математические методы, в частности, использование дифференциальных уравнений, незаменимы при решении многих задач из разных сфер человеческой деятельности.

УДК 517.912:531.311

Студ. В.О. Пашковский
Науч. рук. доц. Л.Д. Яроцкая
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ЗАКОНЫ ПАДЕНИЯ ТЕЛА С ВЫСОТЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

Постановка задачи. Пусть тело массой m начинает падать с высоты H под действием силы тяжести. В процессе падения оно испытывает сопротивление воздуха. Определим закон движения, скорость и время падения в зависимости от силы $\vec{F}_{сопр}$ сопротивления воздуха, модуль которой пропорционален скорости, квадрату скорости, и при ее отсутствии.

Направим ось Ox вертикально вниз. Пусть $x(t)$ – координата тела в момент времени t, в начальный момент времени $t = 0$ начальная координата и скорость равны 0, т.е. $x(0) = 0$ и $v(0) = x'(0) = 0$, а в момент падения $t = T$ координата $x(T) = H$.

На основании второго закона Ньютона движение тела описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \mathrm{F}_{\text{сопр}}.$$

С учетом начальных условий, указанных выше, получены следующие решения дифференциальных уравнений.

Если $\mathrm{F}_{\text{сопр}} = 0$, тогда $\frac{dx}{dt} = v_1(t) = gt, x_1(t) = \frac{gt^2}{2} => T_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Если $\mathrm{F}_{\text{сопр}} = k_2 v$, тогда

$$v_2(t) = \frac{mg}{k_2}\left(1 - e^{-\frac{k_2}{m}t}\right), \qquad x_2(t) = \frac{mg}{k_2}\left(t - \frac{m}{k_2}\left(1 - e^{-\frac{k_2}{m}t}\right)\right).$$

Если $\mathrm{F}_{\text{сопр}} = k_3 v^2$, тогда