УДК 519.927

Студ. А.А. Крюковский
Науч. рук. доц. А. М. Волк
(кафедра высшей математики, БГТУ)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА

Рассмотрим функцию $u(x,y,z,t)$, которая описывает температуру твердого однородного тела в точке с координатами $M(x,y,z)$ в момент времени t. Если температура различных частей тела отличается, то в теле будет происходить перенос тепла от более нагретых участков к менее нагретым. Распространение тепла описывается уравнением теплопроводности в пространстве, которое является параболическим уравнением в частных производных и имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (1)$$

Установившийся процесс на плоскости описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

В полярной системе координат уравнение преобразовывается к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (3)$$

Рассмотрим распространение температуры в кольце при заданных температурах на его границах (задача Дирихле):

$$u\Big|_{x^2+y^2=R_1^2} = u_1, \quad u\Big|_{x^2+y^2=R_2^2} = u_2 \qquad (4)$$

В силу осесимметричности $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, и получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0. \qquad (5)$$

Интегрируя данное уравнение, получим общее решение

$$u = c_1 \ln r + c_2. \qquad (6)$$

Произвольные постоянные находим из граничных условий (4):

$$u_1 = c_1 \ln R_1 + c_2, \quad u_2 = c_1 \ln R_2 + c_2,$$

$$c_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad c_2 = \frac{u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

В данном случае получим искомое решение

$$u = \left(u_2 \ln \frac{r}{R_1} - u_1 \ln \frac{r}{R_2} \right) / \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

УДК 51-73

Студ. Н.А. Крюкова
Науч. рук. доцент И.М. Борковская
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАКОНА НЬЮТОНА ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ТЕЛА

Согласно закону, установленному Ньютоном, скорость охлаждения или нагревания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, т. е.

$$T' = -k\left(T - T_c\right),$$

при этом если в начальный момент времени температура тела T больше температуры окружающего пространства T_c (принято считать ее постоянной), то происходит охлаждение, и скорость T' отрицательна, а если $T < T_c$, – нагревание, и $T' > 0$. Значение k зависит как от физических свойств тела, так и его геометрической формы.

Были решены задачи, связанные с построением дифференциальных уравнений на основании закона Ньютона об охлаждении тела.

Задача 1. Тело охладилось за 10 минут от 70 до 40ºC. Температура окружающей среды поддерживается равной 25ºC. Сколько еще минут понадобится, чтобы тело остыло до 30ºC?

Результат решения: время, прошедшее с момента охлаждения тела до 40ºC, составило 10 минут.

Задача 2. Криминалисты, прибыв на место преступления, обнаружили труп человека, температура тела которого была 27ºC . Через один час температура трупа стала 25ºC . Температура окружающего воздуха 16ºC. Считая, что в момент убийства человек имел температуру тела 37º, определите промежуток времени между моментом убийства человека и моментом обнаружения его тела.

Результат решения: с момента убийства до обнаружения тела прошло приблизительно 3 часа 15 минут.

Задача 3. (О работе хлебопекарни). В течение 20 минут температура вынутого из печи и помещенного на склад хлеба падает от 100ºC