УДК 517.15:584

Л. Д. Яроцкая
Белорусский государственный технологический университет

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С АППРОКСИМАЦИЕЙ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ИХ КОМБИНАЦИЙ

Проблема асимптотических разложений специальных функций по индексам или параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов и преобразований по индексу, когда в одной из формул интегрирование осуществляется по параметру (индексу) функции ядра. Наиболее общими ядрами таких преобразований являются функции гипергеометрического типа, в частности функции Бесселя и их комбинации. Для таких функций справедливо свойство иметь своим преобразованием Меллина отношение произведений гамма-функций Эйлера, асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга известна. В работе представлена формула Стирлинга для гамма-функции комплексного аргумента, у которого мнимая часть неограниченно увеличивается, а действительная часть фиксирована. Установлено, что при больших значениях параметра асимптотические оценки модифицированных функций Бесселя мнимого индекса и их комбинации содержат одинаковые множители независимого аргумента, которые и приводят к интегралам Фурье. Асимптотика интегралов Фурье существенно зависит от дифференциальных свойств подынтегральной функции на всей области интегрирования. В настоящей работе применяется метод стационарной фазы при исследовании асимптотики интегралов Фурье при больших значениях параметра. Согласно принципу локализации вычислены вклады в асимптотику интеграла от критических точек (стационарных точек фазы) и от границы области интегрирования.

Ключевые слова: асимптотические оценки, формула Стирлинга, преобразования по индексу, функции Бесселевого типа, интегралы Фурье, метод стационарной фазы.

Для цитирования: Яроцкая Л. Д. Асимптотика интегралов, связанных с аппроксимацией модифицированных функций Бесселя и их комбинаций // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 2 (248). С. 11–14.

L. D. Yarotskaya
Belarusian State Technological University

ASYMPTOTICS OF INTEGRALS ASSOCIATED WITH THE APPROXIMATION OF MODIFIED BESSEL FUNCTIONS AND THEIR COMBINATIONS

The problem of asymptotic expansions of special functions with respect to indices or parameters arises in connection with the certain classes of index integrals and transformations with respect to the index, when in one of the formulas the integration is carried out over a parameter (index) of the kernel. The most common kernels of such transformations are hypergeometric functions, in particular, Bessel functions and their combinations. For such functions, it is true that the Mellin transformation has the ratio of the products of Euler's gamma functions, the asymptotics of which, in accordance with the Stirling formula, is known. The paper presents the Stirling formula for the gamma function of a complex argument, in which the imaginary part increases indefinitely, and the real part is fixed. It is found that for large values of the parameter, the asymptotic estimates of the modified Bessel functions of the imaginary index and their combinations contain the same multipliers of the independent argument, which lead to Fourier integrals. The asymptotics of Fourier integrals essentially depends on the differential properties of the integral function over the entire domain of integration. In this paper, the stationary phase method is used to study the asymptotics of Fourier integrals for large values of the parameter. According to the principle of localization, the contributions to the asymptotics of the integral from the critical points (stationary points of the phase) and from the boundary of the integration region are calculated.

Key words: asymptotic estimates, Stirling formula, index transformations, Bessel-type functions, Fourier integrals, stationary phase method.

For citation: Yarotskaya L. D. Asymptotics of integrals associated with the approximation of modified Bessel functions and their combinations. *Proceedings of BSTU*, *issue 3*, *Physics and Mathematics*. *Informatics*, 2021, no. 2 (248), pp. 11–14 (In Russian).

Введение. Проблема асимптотических разложений специальных функций по индексам или параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов [1] и преобразований по индексу [2]. В теории интегральных преобразований известны разложения произвольных функций, записанные в виде аналогов интеграла Фурье. Данные представления порождают пары индексных преобразований, причем интегрирование в одной из формул осуществляется по индексу специальной функции, входящей в ядро. Асимптотическое поведение таких функций различно в зависимости от того, что стремится к бесконечности: параметры, независимая переменная или эти величины вместе. Исследования в этой области основаны или на интегральных представлениях, или же непосредственно на дифференциальном уравнении, либо на подходящем разложении в бесконечный ряд [3].

Настоящая работа посвящена изучению при больших значениях параметра асимптотических свойств интегралов от специальных функций, введенных в качестве ядер преобразований по индексу. Вычисление асимптотики основано на применении метода стационарной фазы для быстро осциллирующих интегралов [3, 4].

Основная часть.

1. Предварительные сведения. Модифицированная функция Бесселя

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \qquad (1)$$

и функция Макдональда

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right] \qquad (2)$$

являются линейно независимыми решениями $u(z)$ *дифференциального* уравнения Бесселя [5]:

$$u'' + \frac{1}{z}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0,$$

где z – комплексная переменная; ν – параметр (индекс), который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Это уравнение встречается при рассмотрении краевых задач теории потенциала для цилиндрических областей.

Отметим [5], что $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ представляют собой регулярные функции z в плоскости с разрезом $(-\infty; 0)$ и целые функции ν, причем

$$K_n(z) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Установлено [2], что в силу универсальной структуры ядер, относящихся к функциям гипергеометрического типа, все известные в литературе преобразования по индексу композиционно связаны с преобразованием Конторовича – Лебедева:

$$xf(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \tau \operatorname{sh}(\pi\tau) K_{i\tau}(x) g(\tau)\, d\tau, \ x > 0;$$
$$g(\tau) = \int_0^\infty K_{i\tau}(y) f(y)\, dy, \ \tau > 0, \qquad (3)$$

или его модификацией с функцией (1)

$$f(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t K_t(x)\, dt \int_0^\infty I_t(y) f(y) \frac{dy}{y}.$$

Приведем следующие пары прямого и обратного преобразований Лебедева [2] с квадратами функций (1) и (2):

$$f(x) = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \tau I_{i\tau}^2(x) g(\tau)\, d\tau, \ x > 0;$$

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty K_{i\tau}^2(y) f(y)\, dy, \ \tau > 0,$$

и линейной комбинацией функций (1) и (2):

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \tau \operatorname{sh}(\pi\tau) K_{i\tau}^2(x) g(\tau)\, d\tau;$$

$$g(\tau) = \int_0^\infty \left[I_{i\tau}(y) + I_{-i\tau}(y)\right] K_{i\tau}(y) f(y)\, dy.$$

На функции $f(x)$ или $g(\tau)$ накладывают условия, обеспечивающие сходимость соответствующих интегралов. При этом учитывают асимптотические свойства специальной функции ядра [2].

2. Асимптотика индексных ядер при фиксированных x и больших τ исследована в работах [6, 7]. В частности, на основании формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера на прямых, параллельных мнимой оси,

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi}\tau^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \times$$
$$\times \exp\left[\pm i\left\{\frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \tau\ln\tau - \tau\right\} - O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right] \qquad (4)$$

при $\tau \to +\infty$ получены уравнения:

$$I_{\pm i\tau}(x) = \frac{e^{\pi\tau/2}}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left[\mp i\left\{\frac{\pi}{4} + \tau\ln\tau - \tau\right\}\right] \times$$
$$\times \exp\left[\mp i\left\{-\tau\ln\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4\tau}\right\}\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right); \qquad (5)$$

$$K_{i\tau}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} e^{-\pi\tau/2} \times$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi}{4} + \tau\ln\tau - \tau - \tau\ln\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4\tau}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right); \qquad (6)$$

$$\left[I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)\right]K_{i\tau}(x)=$$

$$=\frac{1}{\tau}\cos 2\left[\tau\ln\tau-\tau-\tau\ln\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4\tau}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right); \quad (7)$$

$$K_{i\tau}^2(x)=\frac{\pi}{2\operatorname{sh}(\pi\tau)\sqrt{\tau^2-x^2}}+\frac{\pi e^{-\pi\tau}}{\tau}\times$$

$$\times\sin 2\left(\tau\ln\tau-\tau-\tau\ln\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4\tau}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right). \quad (8)$$

Отметим, что формула (6) уточняет асимптотическое разложение, полученное в монографии [5, с. 182].

Исследование вопросов сходимости интегралов от цилиндрических функций и их комбинаций с учетом асимптотических свойств (5)–(8) приводит к изучению поведения интегралов Фурье при больших значениях параметра.

3. Постановка задачи. Исследовать поведение интеграла при $\tau\to+\infty$:

$$I(\tau)=\int_0^\infty \exp\left[i\left(\tau\ln x-\frac{x^2}{4\tau}\right)\right]dx. \quad (9)$$

Отметим, что выражение в показателе экспоненты присутствует в формулах (5)–(8).

С помощью замены $x=\sqrt{2}\,\tau t$ преобразуем интеграл (9) к виду

$$I(\tau)=\sqrt{2}\tau e^{i\tau\ln\left(\sqrt{2}\tau\right)}\int_0^\infty \exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]dt.$$

Применим метод стационарной фазы [3, 4] к исследованию интеграла Фурье:

$$\Phi(\tau)=\int_0^\infty \exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]dt. \quad (10)$$

Здесь фазовая функция

$$S(t)=\ln t-\frac{t^2}{2} \quad (11)$$

вещественнозначна и имеет в области интегрирования единственную стационарную точку $t_0=1$, причем $S(1)=-1/2$ и $S''(1)=-2$.

4. Исследование интеграла Фурье. Суть метода заключается в том, что при достаточно больших положительных значениях τ интеграл (10) будет мал за счет быстрой осцилляции экспоненты и основной вклад в асимптотику $\Phi(\tau)$ могут вносить стационарные (критические) точки фазы $S(t)$, вблизи которых осцилляция подынтегральной функции замедляется, и граничные точки области интегрирования. Далее фазу (11) приводят к возможно более простому виду с помощью подходящей замены переменных, затем исследуют полученные интегралы. Согласно принципу локализации,

$$\Phi(\tau)=V_0(\tau)+V_{t_0=1}(\tau)+V_{+\infty}(\tau).$$

Вклады $V_0(\tau)$ и $V_{+\infty}(\tau)$ вычислим интегрированием (10) по частям. Имеем

$$\int\exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{i\tau}\int\frac{t}{1-t^2}\,d\left(\exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{i\tau}\frac{t}{1-t^2}\exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{(i\tau)^2}\frac{t\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)^3}\exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{(i\tau)^2}\int\exp\left[i\tau\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)\right]d\left(\frac{t\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)^3}\right).$$

Таким образом, на промежутках $\left(0,t_0-\varepsilon\right]$ и $\left[t_0+\varepsilon,+\infty\right)$, $\varepsilon>0$, не содержащих стационарную точку $t_0=1$, можно убедиться, что $V_0(\tau)=O\left(\tau^{-1}\right)$ и $V_{+\infty}(\tau)=O\left(\tau^{-1}\right)$ при $\tau\to+\infty$.

Вычислим вклад $V_{t_0=1}(\tau)$ в асимптотику $\Phi(\tau)$ от стационарной точки фазы (11). На малом отрезке $\left[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon\right]$, $\varepsilon>0$ заменим

$$S(t)\approx S(t_0)+\frac{1}{2}S''(t_0)(t-t_0)^2=-\frac{1}{2}-(t-1)^2,$$

тогда

$$V_{t_0=1}(\tau)\approx e^{-i\tau/2}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\exp\left[-i\tau(t-1)^2\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\tau}}e^{-i\tau/2}\int_{-\varepsilon\sqrt{2\tau}}^{\varepsilon\sqrt{2\tau}}e^{-iy^2/2}dy,$$

где $y=\sqrt{2\tau}(t-1)$. При $\tau\to+\infty$ последний интеграл стремится к интегралу Френеля вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it^2/2}dt=\sqrt{2\pi}e^{-i\pi/4}.$$

Далее имеем

$$V_{t_0=1}(\tau)\approx\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}e^{-i\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Таким образом, вклады на границе области интегрирования имеют порядок $O\left(\tau^{-1}\right)$, а от стационарной точки – порядок $O\left(\tau^{-1}\right)$, так что последний в общем случае больше. Учитывая полученные результаты, запишем при $\tau \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла (9):

$$I(\tau) = \sqrt{2\pi\tau}\, \exp\left\{ i\left(\tau \ln \sqrt{2}\tau - \frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}.$$

Заключение. Получены асимптотические оценки интегралов специального вида (интегралов Фурье) при больших положительных значениях параметров, которые возникают при исследовании условий существования преобразований по индексу и сходимости связанных с ними интегралов. В частности, для интегральных преобразований по индексу с модифицированными функциями Бесселя и их комбинациями.

Список литературы

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 800 с.
2. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publ., 1996. 252 p.
3. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
4. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 366 с.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 379 с.
6. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich L. D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices // Fukuoka Univ. Sci. Reports. 1995. Vol. 25, no. 1. P. 23–32.
7. Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по индексу функций бесселевого типа // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2004. Вып. XII. С. 18–21.

References

1. Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Spetsial'nyye funktsii* [Integrals and Series. Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 800 p.
2. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore, World Scientific Publ., 1996. 252 p.
3. Olver F. *Asimptotika i spetsial'nyye funktsii* [Asymptotics and special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 528 p.
4. Fedoryuk M. V. *Metod perevala* [Pass method]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 366 p.
5. Lebedev N. N. *Spetsial'nyye funktsii i ikh prilozheniya* [Special functions and their applications]. Moscow; Leningrad., Fizmatgiz Publ., 1963. 379 p.
6. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich L. D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices. *Fukuoka Univ. Sci. Reports*, 1995, vol. 25, no. 1, pp. 23–32.
7. Yarotskaya L. D. Asymptotic representations of the Bessel type functions by their indices. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physics and Mathematics. Informatics, 2004, issue XII, pp. 18–21 (In Russian).

Информация об авторе

Яроцкая Людмила Дмитриевна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yarockaya@belstu.by

Information about the author

Yarotskaya Lyudmila Dmitrievna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yarockaya@belstu.by

Поступила после доработки 08.04.2021