ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

К ВОПРОСУ О МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ОБЩЕЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПРИ КРАТНЫХ КОРНЯХ

В статье рассматривается решение задачи модального управления для одной трехмерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию в общециклическом случае при кратных корнях уравнения, служащего для нахождения регулятора. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. При решении этой задачи применяются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Эти регуляторы используют информацию о текущем состоянии системы, а также векторы состояний и их производные в предыдущие моменты времени. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния. Указан вид характеристического квазиполинома замкнутой этим регулятором исходной системы нейтрального типа.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

Для цитирования: Якименко А. А. К вопросу о модальном управлении одной трехмерной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 2 (248). С. 5–10.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

TO THE QUESTION OF MODAL CONTROL FOR ONE THREE-DIMENSIONAL NEUTRAL TYPE SYSTEM IN GENERAL CYCLIC CASE WITH DOUBLE ROOTS

The paper deals with the solution of the modal control problem for a three-dimensional stationary dynamic system with a delayed argument of a neutral type with one input and one state delay in general cyclic case with double roots of equation for founding regulators. The definition of the problem of modal control for the studied system is given. To solve this problem, linear feedback regulators are used that contain both linear and integral parts. These regulators use information about the current state of the system, as well as state vectors and their derivatives at previous times. Regulators are obtained in explicit form as elementary functions of the parameters of the original system and its state vector. The characteristic quasi-polynomial of the initial neutral type system closed by this regulator is given.

Key words: neutral type systems, modal control, regulators, feedback control, lag.

For citation: Yakimenka A. A. To the question of modal control for one three-dimensional neutral type system in general cyclic case with double roots. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 2 (248), pp. 5–10.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Она хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом, а также систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее [1–8]. В статье обобщаются результаты, полученные в работе [8], на одну трехмерную систему нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2\dot{x}(t-h) + bu(t),\ t>0, \quad (1)$$

где A_i, $i = 0, 1, 2$ – постоянные 3×3-матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой 3-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0,\ 0,\ 1]$ («$'$» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q_{00}' x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q_{ij}' x^{(i)}(t-jh) + \int_{-h}^{0} g'(s) x(t+s)\,ds, \quad (2)$$

где q_{00}, q_{ij} – 3-векторы; $g(s),\ s\in[-h,\ 0]$ – непрерывная 3-вектор-функция; $L,\ M \in \mathbb{N}$;

$$x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t);\quad x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3\right] \equiv \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\tilde{\alpha}_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \quad (3)$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц A_i, $i = 0, 1, 2$, в частности $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0$, $\tilde{\alpha}_{30} = 1$, $\tilde{\alpha}_{33} = \det A_2$.

Определение 1. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел α_{ij}, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\alpha_{30} = 1$, найдется такой регулятор (2), при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (сравните с (3)):

$$\det\left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda)\right] \equiv \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0,$$

где $U(\lambda)$ – регулятор (2) в частотной области.

Рассмотрим еще одно определение модальной управляемости.

Определение 2. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел α_{ij}, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2$, $\alpha_{20} = 1, \alpha_{3j}$, $j = 0, 1, 2$ найдется такой регулятор (2), при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид

$$\det\left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda)\right] \equiv \left(\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}\right) \times \left(\alpha_{30} + \alpha_{31}e^{-j\lambda h} + \alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h} + \lambda\right) = 0.$$

Можно показать, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Введем (3×3)-матрицы:

$$\mathrm{A}(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h};$$

$$W(\lambda) = \left[\mathrm{A}^2(\lambda)b,\ \mathrm{A}(\lambda)b,\ b\right],\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Рассмотрим общециклический случай:

$$\det W(\lambda) = c\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right),\ (c\neq 0).$$

Пусть матрица $\mathrm{A}(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0+\beta_1 e^{-\lambda h}+\beta_2\lambda e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0+\gamma_1 e^{-\lambda h}+\lambda e^{-\lambda h}\right) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix},$$

здесь β_i, $i = 0, 1, 2$, c, γ_0, γ_1 – некоторые действительные числа; $a_{ij}(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ – квазиполиномы:

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij0} + a_{ij1}e^{-\lambda h} + a_{ij2}\lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ijk}\in\mathbb{R}$; $k = 0, 1, 2$.

Сделаем в системе (1) замену переменной по правилу

$$x = T_1(\lambda) y,$$

где $T_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{11}(\lambda)+\eta_1(\lambda) & -a_{12}(\lambda)+\eta_2(\lambda) & 1 \end{bmatrix}.$

Тогда система (1) с новой переменной в частотной области примет вид

$$\lambda y = \tilde{A}(\lambda) y + bU(\lambda) y, \quad (4)$$

где $\tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) & 1 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & b_{33}(\lambda) \end{bmatrix}$;

$$b_{31}(\lambda) = a_{31}(\lambda) + a_{11}(\lambda) a_{21}(\lambda) - a_{11}(\lambda)\eta_1(\lambda) -$$
$$- a_{21}(\lambda) a_{33}(\lambda) + a_{22}(\lambda)\eta_1(\lambda) + a_{33}(\lambda)\eta_1(\lambda) -$$
$$- \eta_1(\lambda)\eta_2(\lambda);$$
$$b_{32}(\lambda) = a_{32}(\lambda) + a_{12}(\lambda) a_{21}(\lambda) - a_{12}(\lambda)\eta_1(\lambda) -$$
$$- a_{22}(\lambda) a_{33}(\lambda) + a_{22}(\lambda)\eta_2(\lambda) + a_{33}(\lambda)\eta_2(\lambda) -$$
$$- \eta_2^2(\lambda);$$
$$b_{33}(\lambda) = a_{22}(\lambda) + a_{33}(\lambda) - \eta_2(\lambda);$$

$\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$ – функции, которые определим ниже.

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U_1(\lambda) y =$$
$$= \left(-b_{31}(\lambda), \quad -b_{32}(\lambda), \quad \eta_3(\lambda) - b_{33}(\lambda)\right) y. \quad (5)$$

Тогда матрица $\tilde{A}(\lambda)$ системы (4), замкнутой этим регулятором, примет вид

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & \eta_3(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1 \equiv$$
$$\equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \quad \lambda, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}.$$

Пусть выполнено условие

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi. \quad (7)$$

Рассмотрим величину

$$\delta(\xi) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi h} - \xi. \quad (8)$$

Пусть $\delta(\xi) \neq 0$ и функции $\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$ в (6) имеют следующий вид:

$$\eta_1(\lambda) = -\alpha_{22}\lambda e^{-\lambda h} + \big(\alpha_{22}\beta_0 - \alpha_{21}\beta_1 - \alpha_{12} -$$
$$-2\alpha_{22}\xi\big) e^{-\lambda h} - \frac{1}{\delta^2(\xi)}\big(\beta_0^2\beta_1 + \beta_1^3 e^{-2\xi h} + \alpha_{00}\beta_1 -$$
$$-\alpha_{12}\beta_0\beta_1 e^{-2\xi h} - 2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi e^{-2\xi h} -$$
$$-2\alpha_{02}\beta_0\xi h e^{-\xi h} - 2\alpha_{12}\beta_0\xi^2 h e^{-\xi h} - 2\alpha_{22}\beta_0\xi^3 h e^{-\xi h} +$$
$$+ \alpha_{01}\beta_1\xi\, h e^{-\xi h} + 2\alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi\, e^{-\xi h} + 2\beta_0\beta_1^2 e^{-\xi h} -$$
$$- 2\alpha_{22}\xi^3 e^{-\xi h} + \alpha_{21}\beta_1\xi^3 h e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_1^2\xi\, h e^{-\xi h} -$$
$$- \alpha_{01}\beta_0\beta_1 h e^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_1\xi^2 h e^{-\xi h} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^2 h e^{-\xi h} -$$
$$- \alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi\, h e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0^2\xi\, h e^{-\xi h} + \alpha_{22}\beta_0^2\xi^2 h e^{-\xi h} -$$
$$- \alpha_{21}\beta_1\xi^2 e^{-\xi h} + \beta_1^2\xi^2 h e^{-\xi h} + \alpha_{00}\beta_1^2 h e^{-\xi h} +$$
$$+ \alpha_{11}\beta_0\beta_1 e^{-\xi h} + \alpha_{02}\beta_0^2 h e^{-\xi h} + \alpha_{12}\xi^3 h e^{-\xi h} +$$
$$\alpha_{10}\beta_1^2 e^{-\xi h} + \alpha_{22}\xi^4 h e^{-\xi h} + \alpha_{02}\xi^2 h e^{-\xi h} +$$
$$+ 3\alpha_{22}\beta_1\xi^2 e^{-2\xi h} + 2\alpha_{21}\beta_1^2\xi\, e^{-2\xi h} + 2\alpha_{12}\beta_1\xi e^{-2\xi h} +$$
$$+ 2\alpha_{12}\beta_0\xi e^{-\xi h} + 4\alpha_{22}\beta_0\xi^2 e^{-\xi h} - 2\alpha_{22}\beta_0^2\xi\, e^{-\xi h} +$$
$$+ \alpha_{10}\beta_0\beta_1 - \alpha_{12}\xi^2 e^{-\xi h} - \alpha_{12}\beta_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_1^2 e^{-2\xi h} +$$
$$+ \alpha_{02}\beta_1 e^{-2\xi h}\big) - \big(-\alpha_{02}\xi^2 - \alpha_{02}\beta_0^2 + \alpha_{00}\beta_1^2 + \alpha_{12}\beta_0^3 -$$
$$- \beta_1^2\xi^2 - 3\alpha_{22}\xi^4 - 4\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi e^{-\xi h} + 2\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi e^{-\xi h} -$$
$$- 2\alpha_{12}\xi^3 - 2\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi e^{-\xi h} - 2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^3 h e^{-\xi h} -$$
$$- \alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\xi h e^{-\xi h} - \alpha_{01}\beta_0\beta_1^2 h e^{-\xi h} -$$
$$- 2\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi^2 h e^{-\xi h} - 2\alpha_{02}\beta_0\beta_1\xi h e^{-\xi h} + 8\alpha_{22}\beta_0\xi^3 -$$
$$- 7\alpha_{22}\beta_0^2\xi^2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_1^2 + 5\alpha_{12}\beta_0\xi^2 - 2\alpha_{21}\beta_1\xi^3 -$$
$$- 4\alpha_{12}\beta_0^2\xi + 2\alpha_{02}\beta_0\xi + 4\alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^2 -$$
$$- 6\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^2 e^{-\xi h} + 2\alpha_{22}\beta_0^3\xi + 2\beta_0\beta_1^2\xi +$$
$$+ 2\beta_1^3\xi e^{-\xi h} + \alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi^2 h e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0^2\beta_1\xi h e^{-\xi h} -$$
$$- \alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi^2 h e^{-\xi h} + \alpha_{01}\beta_1^2\xi h e^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_1^2\xi^2 h e^{-\xi h} +$$
$$+ \alpha_{12}\beta_1\xi^3 h e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_1^3\xi h e^{-\xi h} + \alpha_{21}\beta_1^2\xi^3 h e^{-\xi h} +$$
$$+ \alpha_{02}\beta_0^2\beta_1 h e^{-\xi h} + \alpha_{22}\beta_1\xi^4 h e^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_1\xi^2 +$$
$$+ \alpha_{10}\beta_1^3 e^{-\xi h} + \alpha_{01}\beta_1^2 e^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_0^2\beta_1 - \alpha_{11}\beta_0\beta_1^2 e^{-\xi h} +$$
$$+ \alpha_{12}\beta_0^2\beta_1 e^{-\xi h} + \alpha_{00}\beta_1^3 h e^{-\xi h} + \beta_1^3\xi^2 h e^{-\xi h} +$$
$$+ \alpha_{02}\beta_1\xi^2 h e^{-\xi h} + 2\alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi + 4\alpha_{22}\beta_1\xi^3 e^{-\xi h} +$$
$$+ 3\alpha_{12}\beta_1\xi^2 e^{-\xi h} + 2\alpha_{02}\beta_1\xi e^{-\xi h} + 3\alpha_{21}\beta_1^2\xi^2 e^{-\xi h} +$$
$$+ 2\alpha_{11}\beta_1^2\xi e^{-\xi h} - 2\alpha_{02}\beta_0\beta_1 e^{-\xi h} - 2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\xi\big)\times$$
$$\times \frac{1}{\delta^2(\xi)} \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi} + \big(-\alpha_{22}\xi^4 - \alpha_{01}\beta_1\xi - \alpha_{11}\beta_1\xi^2 -$$

$$-\alpha_{12}\xi^3+\alpha_{01}\beta_0\beta_1-\alpha_{10}\beta_1^2\xi-\alpha_{21}\beta_1\xi^3-\alpha_{02}\beta_0^2-$$

$$-\alpha_{02}\xi^2+\alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^2+2\alpha_{22}\beta_0\xi^3-\alpha_{22}\beta_0^2\xi^2+$$

$$+2\alpha_{12}\beta_0\xi^2-\alpha_{12}\beta_0^2\xi+2\alpha_{02}\beta_0\xi+\alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi-$$

$$-\alpha_{00}\beta_1^2-\beta_1^2\xi^2)\cdot\frac{1}{\delta(\xi)}\left(\frac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{(\lambda-\xi)^2}-\frac{he^{-\xi h}}{(\lambda-\xi)}\right).$$

$$\eta_2(\lambda)=-\beta_0-\alpha_{10}-\alpha_{21}\lambda e^{-\lambda h}+\frac{1}{\delta^2(\xi)\beta_1}\times$$

$$\times(\alpha_{00}\beta_1^2-\beta_1^2\xi^2+\alpha_{22}\xi^4+\alpha_{22}\beta_0^4+2\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi\, e^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{02}\beta_1^2e^{-2\xi h}-\alpha_{21}\beta_0^3\beta_1-8\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi\, e^{-\xi h}+$$

$$+4\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi e^{-\xi h}-2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^3he^{-\xi h}-$$

$$-2\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi^2he^{-\xi h}-2\alpha_{02}\beta_0\beta_1\xi\, he^{-\xi h}-$$

$$-4\alpha_{22}\beta_0\xi^3+6\alpha_{22}\beta_0^2\xi^2-\alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^2+$$

$$+\alpha_{11}\beta_1^2\xi^2he^{-\xi h}+\alpha_{22}\beta_1\xi^4he^{-\xi h}+2\alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi+$$

$$+10\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^2e^{-\xi h}-4\alpha_{22}\beta_0^3\xi+2\beta_0\beta_1^2\xi+$$

$$+2\beta_1^3\xi e^{-\xi h}+\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi^2he^{-\xi h}+\alpha_{12}\beta_0^2\beta_1\xi\, he^{-\xi h}-$$

$$-\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\xi\, he^{-\xi h}-\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi^2he^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{01}\beta_1^2\xi he^{-\xi h}+\alpha_{12}\beta_1\xi^3he^{-\xi h}-\alpha_{01}\beta_0\beta_1^2he^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{10}\beta_1^3\xi he^{-\xi h}+\alpha_{21}\beta_1^2\xi^3he^{-\xi h}+\alpha_{02}\beta_0^2\beta_1he^{-\xi h}-$$

$$-\alpha_{11}\beta_1\xi^2+\alpha_{10}\beta_1^3e^{-\xi h}+\alpha_{10}\beta_0\beta_1^2+\alpha_{01}\beta_1^2e^{-\xi h}-$$

$$-\alpha_{11}\beta_0^2\beta_1-\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2e^{-\xi h}-\alpha_{12}\beta_0^2\beta_1e^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{00}\beta_1^3he^{-\xi h}+\beta_1^3\xi^2he^{-\xi h}+\alpha_{02}\beta_1\xi^2he^{-\xi h}-$$

$$-4\alpha_{22}\beta_1\xi^3e^{-\xi h}-\alpha_{12}\beta_1\xi^2e^{-\xi h}-\alpha_{21}\beta_1^2\xi^2e^{-\xi h}+$$

$$+2\alpha_{11}\beta_1^2\xi\, e^{-\xi h}+2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\xi-\alpha_{12}\beta_0\beta_1^2e^{-2\xi h}-$$

$$-\alpha_{21}\beta_0\beta_1^3e^{-2\xi h}+\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1^2e^{-2\xi h}+2\alpha_{22}\beta_0^3\beta_1e^{-\xi h}+$$

$$+2\alpha_{12}\beta_1^2\xi e^{-2\xi h}+2\alpha_{21}\beta_1^3\xi e^{-2\xi h}+4\alpha_{22}\beta_1^2\xi^2e^{-2\xi h}-$$

$$-2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1^2e^{-\xi h}-4\alpha_{22}\beta_0\beta_1^2\xi e^{-2\xi h})e^{-\lambda h}+$$

$$+(-\alpha_{12}\xi^4-\alpha_{12}\beta_0^4+\beta_1^3\xi^2e^{-\xi h}-\alpha_{21}\beta_1\xi^4+\alpha_{01}\beta_1\xi^2+$$

$$+\alpha_{01}\beta_0^2\beta_1+\alpha_{10}\beta_1^2\xi^2-\alpha_{10}\beta_0^2\beta_1^2+\alpha_{11}\beta_0^3\beta_1-$$

$$-\alpha_{00}\beta_1^3e^{-\xi h}+\alpha_{10}\beta_1^3\xi^2he^{-\xi h}+\alpha_{12}\beta_1\xi^4he^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{21}\beta_1^2\xi^4he^{-\xi h}+\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1^2\xi^2he^{-\xi h}-$$

$$-\alpha_{22}\beta_0^3\beta_1\xi^2he^{-\xi h}-\alpha_{12}\beta_0^3\beta_1\xi he^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{11}\beta_0^2\beta_1^2\xi he^{-\xi h}+\alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi^2+2\alpha_{12}\beta_1\xi^3e^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{02}\beta_1\xi^2-\alpha_{00}\beta_0\beta_1^3he^{-\xi h}+\alpha_{02}\beta_0^2\beta_1e^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{11}\beta_0^2\beta_1^2e^{-\xi h}+\alpha_{11}\beta_1^2\xi^2e^{-\xi h}+\beta_1^3\xi^3he^{-\xi h}-$$

$$-\alpha_{10}\beta_0\beta_1^3e^{-\xi h}-\alpha_{12}\beta_0^3\beta_1e^{-\xi h}+4\alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^3+$$

$$+2\alpha_{21}\beta_1^2\xi^3e^{-\xi h}-2\alpha_{02}\beta_0\beta_1\xi e^{-\xi h}-2\alpha_{01}\beta_0\beta_1\xi+$$

$$+2\alpha_{21}\beta_0^3\beta_1\xi+3\alpha_{22}\beta_1\xi^4e^{-\xi h}-5\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\xi^2-$$

$$-2\beta_0\beta_1^3\xi e^{-\xi h}-2\alpha_{11}\beta_0^2\beta_1\xi+7\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi^2e^{-\xi h}-$$

$$-4\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi^2e^{-\xi h}-5\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi^2e^{-\xi h}-$$

$$-2\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\xi e^{-\xi h}-8\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^3e^{-\xi h}+$$

$$+4\alpha_{12}\beta_0^2\beta_1\xi e^{-\xi h}-2\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\xi^2he^{-\xi h}-$$

$$-2\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi^3he^{-\xi h}+3\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi^3he^{-\xi h}+$$

$$+3\alpha_{12}\beta_0^2\beta_1\xi^2he^{-\xi h}+3\alpha_{02}\beta_0^2\beta_1\xi he^{-\xi h}-$$

$$-3\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^4he^{-\xi h}-3\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi^3he^{-\xi h}-$$

$$-3\alpha_{02}\beta_0\beta_1\xi^2he^{-\xi h}+2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1^2\xi e^{-\xi h}-$$

$$-2\alpha_{22}\beta_0^3\beta_1\xi e^{-\xi h}-2\alpha_{01}\beta_0\beta_1^2\xi he^{-\xi h}-$$

$$-2\alpha_{22}\xi^5-\alpha_{10}\beta_0\beta_1^3\xi he^{-\xi h}-2\beta_0^2\beta_1^2\xi+2\beta_0\beta_1^2\xi^2+$$

$$+8\alpha_{22}\beta_0\xi^4+\alpha_{00}\beta_1^3\xi he^{-\xi h}+\alpha_{01}\beta_1^2\xi^2he^{-\xi h}-$$

$$-12\alpha_{22}\beta_0^2\xi^3+4\alpha_{12}\beta_0\xi^3-6\alpha_{12}\beta_0^2\xi^2+4\alpha_{12}\beta_0^3\xi-$$

$$-2\alpha_{00}\beta_0\beta_1^2-2\alpha_{22}\beta_0^4\xi+8\alpha_{22}\beta_0^3\xi^2+2\alpha_{00}\beta_1^2\xi-$$

$$-\alpha_{02}\beta_0^3\beta_1he^{-\xi h}-\beta_0\beta_1^3\xi^2he^{-\xi h}+\alpha_{11}\beta_1^2\xi^3he^{-\xi h}+$$

$$+\alpha_{22}\beta_1\xi^5he^{-\xi h}+\alpha_{02}\beta_1\xi^3he^{-\xi h}+\alpha_{01}\beta_0^2\beta_1^2he^{-\xi h})\times$$

$$\times\frac{1}{\delta^2(\xi)\beta_1}\frac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}-(\beta_0-\xi)\times$$

$$\times(\alpha_{22}\xi^4+\alpha_{01}\beta_1\xi+\alpha_{11}\beta_1\xi^2+\alpha_{12}\xi^3-\alpha_{01}\beta_0\beta_1+$$

$$+\alpha_{10}\beta_1^2\xi+\alpha_{21}\beta_1\xi^3+\alpha_{02}\beta_0^2+\alpha_{02}\xi^2-\alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^2-$$

$$-2\alpha_{22}\beta_0\xi^3+\alpha_{22}\beta_0^2\xi^2-2\alpha_{12}\beta_0\xi^2+\alpha_{12}\beta_0^2\xi-$$

$$-2\alpha_{02}\beta_0\xi-\alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi^2+\alpha_{00}\beta_1^2+\beta_1^2\xi^2)\times$$

$$\times\frac{1}{\delta(\xi)\beta_1}\left(\frac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{(\lambda-\xi)^2}-\frac{he^{-\xi h}}{(\lambda-\xi)}\right).$$

Пусть $\eta_3(\lambda)$ в регуляторе (5) имеет вид

$$\eta_3(\lambda) = -\alpha_{30} - \alpha_{31}e^{-j\lambda h} - \alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h}.$$

Нетрудно проверить, что регулятор (5) решает задачу модального управления для системы (4), а регулятор

$$U(\lambda)x = U_1(\lambda)T^{-1}(\lambda)x$$

решает данную задачу для системы (1).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Для того, чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) в случае (7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\delta(\xi) \neq 0,$$

где $\delta(\xi)$ определено в (8).

Замечание. В полученных регуляторах требуется перейти из частотной во временную область. При этом необходимо следовать нижеприведенным правилам.

1. Слагаемые вида $\alpha\lambda^i e^{-j\lambda h}x_k(\lambda)$, $k = 1, 2$, i, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ в частотной области соответствуют следующим слагаемым во временной области:

$$\alpha \frac{d^i x_k(t - jh)}{dt^i}.$$

2. Слагаемые вида $\alpha \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi} x_k(\lambda)$, $k = 1, 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$ в частотной области, согласно теореме о свертке, соответствуют следующим слагаемым:

$$\alpha \int_{-h}^{0} H(t+s)H(h+s)e^{-(h+s)\xi}x_k(t+s)\,ds.$$

3. Слагаемые вида $\alpha\left(\frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi)^2} - \frac{he^{-\xi h}}{(\lambda - \xi)}\right) \times$ $\times x_k(\lambda)$, $k = 1, 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$ в частотной области соответствуют слагаемым вида

$$\alpha \int_{-h}^{0} H(t+s)H(h+s)(-h-s)e^{-(h+s)\xi}x_k(t+s)\,ds.$$

Заключение. Таким образом, полученные регуляторы решают задачу модального управления для рассматриваемой системы в общециклическом случае при кратных корнях.

Список литературы

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. Pitman Press, 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.
4. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.
5. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.
6. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.
7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2 (200). С. 25–27.
8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. 2018. № 1 (206). Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. С. 5–8.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. Pitman Press, 1984, 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.
4. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.
5. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

6. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2 (200), pp. 25–27 (In Russian).

8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1 (206), pp. 5–8 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 29.04.2021