2. Составить похожие задания с использованием различных элементарных функций из школьного курса математики и рассмотреть их решение.

3. Составить таблицу вариативности решения данных заданий.

Для успешного решения данных заданий предполагается, что каждый абитуриент может без затруднений построить любой график функции из школьного курса, а также умеет их ловко преобразовывать.

Рассмотрим решение заданий из ЦТ по математике:

1. Уравнения вида $F(\sin x; \cos x) = G(x)$, где $G(x)$-прямая пропорциональность.

2. Уравнения вида $F(\sin x; \cos x) = |G(x)|$,где $G(x)$- прямая пропорциональность.

Составим свои задания:

1. Уравнения вида $F(\sin x; \cos x) = G(x)$,где $G(x)$-квадратичная функция

2. Уравнения вида $F(\sin x; \cos x) = G(\sqrt{x})$

3. Уравнения вида $F(\sin x; \cos x) = G(\log_a x)$

Представим таблицу вариативности решения данных заданий. Тем самым упростим подготовку будущих абитуриентов к централизованному тестированию и предоставим авторам-составителям дополнительный набор задач на эту тему.

УДК 512.13

Учащ. М. П. Устюжанина, Е. К. Черкас
Науч. рук. И. А. Родионова, учитель математики
(ГУО «Лицей № 2 г. Минска»)

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЗАМЕНЫ ФУНКЦИЙ

Цель настоящей работы:

1. Уберечь от логических ошибок, возникающих в первую очередь из-за недостаточного понимания поставленной задачи.
2. Научиться решать неравенства методом замены функций.
3. Провести сравнительный анализ решения неравенств традиционным методом и методом замены функций.

Актуальность:

Многие школьные учебники и большинство пособий по математике не содержат информацию по анализу эффективности решения конкретных задач тем или иным способом. Поэтому основная масса школьников выбирает зачастую единственный путь решения предложенной задачи. В работе рассмотрен нетрадиционный метод решения неравенств.

1. Неравенства с модулем

Исходное	Эквивалент
$f(x) = \lvert u(x)\rvert - \lvert v(x)\rvert$	$g(x) = (u(x))^2 - (v(x))^2$

Области определения D(f) и D(g) этих функций совпадают. Кроме того

$$\lvert u(x)\rvert - \lvert v(x)\rvert \geq 0 \Leftrightarrow \lvert u(x)\rvert \geq \lvert v(x)\rvert \Leftrightarrow u(x)^2 \geq v(x)^2 \Leftrightarrow u(x)^2 - v(x)^2 \geq 0$$

Значит, для функций f(x) и g(x) выполнены условия утверждения**(*)**.

Эта замена влечет за собой следующие следствия:

Следствие 1: $\lvert t\rvert \Leftrightarrow t^2$

Следствие 2: $\lvert u(x)\rvert - \lvert ax^2 + bx + c\rvert \Leftrightarrow g(x) = \left(u(x)\right)^2 - (ax^2 + bx + c)^2$

При $D = b^2 - 4ac < 0$ **и** $a > 0$

Пример: $\dfrac{\lvert 2x^2 - 11x + 10\rvert - x^2}{\lvert 6x^2 - 11x + 4\rvert - 1} \geq 0$

Далее применим замену: $\dfrac{(2x^2 - 11x + 10)^2 - (x^2)^2}{(6x^2 - 11x + 4)^2 - 1^2} \geq 0$

$$\frac{(2x^2 - 11x + 10 - x^2)(2x^2 - 11x + 10 + x^2)}{(6x^2 - 11x + 4 - 1)(6x^2 - 11x + 4 + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 11x + 10)(3x^2 - 11x + 10)}{(6x^2 - 11[+3)(6x^2 - 11x + 5)} \geq 0$$

$$\frac{(x-10)(x-1)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (x-10)(x-1)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right) \geq 0 \\ x \neq \frac{3}{2};\ x \neq \frac{1}{3};\ x \neq 1;\ x \neq \frac{5}{6} \end{cases}$$

Ответ:$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup [10; +\infty]$.

2. Показательные неравенства

Исходное	Эквивалент
$f(x) = a^{u(x)} - a^{v(x)}$ при a>1	$g(x) = u(x) - v(x)$

Области определения D(f) и D(g) этих функций совпадают. Кроме того, при a>0 имеем

$$a^{u(x)} - a^{v(x)} \geq 0 \Leftrightarrow a^{u(x)} \geq a^{v(x)} \Leftrightarrow u^{(x)} \geq v^{(x)} \Leftrightarrow u^{(x)} - v^{(x)} \geq 0$$

Значит, для функций f(x) и g(x) выполнены условия утверждения (*).

Эта замена влечет за собой следующие следствия:

Следствие 1: $a^{u(x)} - a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) - v(x))(a-1)$ **при** $a \neq 1$

Следствие 2: $a^{u(x)} - 1 \Leftrightarrow u(x)(a-1)$**при** $a \neq 1$

Пример:

$$\frac{3^{2x^2-3x+4}-(\frac{1}{3})^{3x^2-4x-2}}{2^x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3^{2x^2-3x+4}-(3)^{-(3x^2-4x-2)}}{2^x-1} \leq 0$$

$$\frac{2x^2-3x+4+3x^2-4x-2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2-7x+2}{x} \leq 0$$

$$\begin{cases} 5x^2-7x+2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{5} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: x€ $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{2}{5}; 1\right]$.

3. Иррациональные неравенства:

Исходное	Эквивалент
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ при нечетном n	$g(x) = u(x) - v(x)$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ при четном n	$\begin{cases} g(x) = u(x) - v(x) \\ u(x) \geq 0 \\ v(x) \geq 0 \end{cases}$

Следствие 1: $\sqrt[n]{u(x)} <-> u(x)$**при**$u(x) \geq 0$

Следствие 2:$|u(x)| - \sqrt[n]{v(x)} -> u(x)^2 - v(x), \quad v(x) \geq 0$

Следствие 3: $\sqrt{u(x)} - (ax^2+bx+c) -> u(x) \ -(ax^2+bx+c)^2$,

При $u(x) \geq 0, D = b^2 - 4ac < 0, a>0$

Пример:

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}} - \sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}} < 0$$

Применим замену ко всей дроби, так как подкоренные функции заведомо положительные, то система неравенств будет следующая:

$$\begin{cases} x+\sqrt{3x-2} - (x+\sqrt{2x-3}) < 0 \\ x-2\sqrt{x-1} - (x+3-4\sqrt{x-1}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{3x-2} - x - \sqrt{2x-3} < 0 \\ x-2\sqrt{x-1} - x - 3 + 4\sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}. < 0 \\ 2\sqrt{x-1} - 3 \neq 0 \end{cases}$$

Применим замену во второй раз к первому неравенству:

$$\begin{cases} 3x-2-(2x-3) < 0 \\ 3x-2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \\ 2\sqrt{x-1} - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{2}{3} \\ x > \frac{3}{2} \\ x \neq 3\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ответ: x€ $(\frac{3}{2}; 3\frac{1}{4})$.