УДК 512.12

Учащ. Е. В. Лустенкова
Науч. рук. А.С. Аршавский, учитель физики и математики
(ГУО «Тупичинский УПК ясли-сад-средняя школа Костюковичского района»)

ПОЛУЧЕНИЕ ФОРМУЛЫ N-ОГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ С ПОМОЩЬЮ СВЕТОВЫХ ЯВЛЕНИЙ

При изучении геометрической прогрессии в школе рассматриваются определения, формула n-ого члена прогрессии, формула суммы первых членов прогрессии. В заданиях используются математические задачи на применение этих формул [1]. Это приводит к вопросу о том, как эти понятия и формулы связаны с практикой и, вообще, имеют ли какое – либо практическое выражение формулы геометрической прогрессии.

Стало интересно, можно ли провести такой эксперимент, который бы привел к формулам на геометрическую прогрессию, так, чтобы изучаемые в математике величины получили практический смысл.

Попытаемся получить математическую закономерность для геометрической прогрессии эмпирическим путем с помощью физических явлений, которые будут наблюдаться внутри металлической трубы, если поместить туда светящуюся лампочку.

Цель: выявить зависимость появления и исчезновения световых полос в металлических трубах с разной внутренней обработкой при внесении в них источника света и определить её аналитическое выражение.

Для возникновения образования световых колец в металлических трубах была создана экспериментальная установка (рис.1, рис.2), которая состояла из источника питания - 1, лампы накаливания - 2, металлических труб - 3. Кроме этого имелась специальная линейка с ценой деления 1 мм со светопоглощающим кольцом.

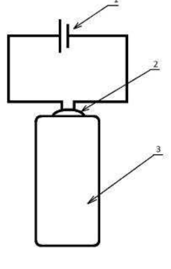

Рисунок 1 - Схематический вид экспериментальной установки

Рисунок 2 – Внешний вид экспериментальной установки

Первоначально исследовалась металлическая труба № 1 без внутренней обработки. После подключения к экспериментальной установки, не наблюдалось ни одной полосы, значит получить формулу n-ого члена геометрической прогрессии с помощью металлической трубы № 1 нельзя, так как отсутствуют световые полосы.

Рисунок 3 - Металлическая труба № 1

Рисунок 4 - Металлическая труба № 2

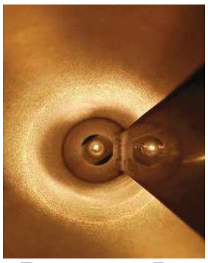

Рисунок 5 – Металлическая труба № 3

На рисунке 4 представлено изображение наблюдаемого светового явления внутри металлической трубы № 2 с не очень качественной обработкой внутренней поверхности. Как видно, появилась одна светлая полоса, что не достаточно для получения формулы n-ого члена геометрической прогрессии.

На рисунке 5 представлен фрагмент металлической трубы № 3 с качественно обработанной поверхностью, на котором можно наблюдать раздельное чередование светлых и тёмных колец. Проводя эксперимент, можно было наблюдать до пяти световых полос. Значит металлическую трубу № 3 и будем использовать для получения формулы n-ого члена геометрической прогрессии. Для изучения закономерностей распространения света в металлической трубе № 3 (длиной L = 150 мм, диаметром 50 мм) во внутрь устанавливалось светопоглощающее кольцо. При перемещении кольца от лампы накаливания к наблюдателю световые полосы по очереди исчезали (рисунок 6).

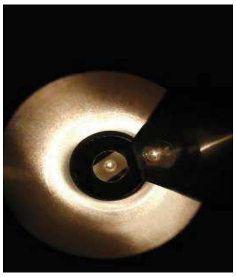

Рисунок 6 – Исчезновение первой полосы металлической трубы № 3

Результаты эксперимента: первая (самая крайняя) световая полоса исчезла, когда кольцо находилось на расстоянии 4,5 мм от лампы накаливания. Вторая световая полоса исчезла на расстоянии 9 мм от лампы накаливания, третья полоса на расстоянии 18 мм, четвёртая на расстоянии 36 мм, а пятая на расстоянии 72 мм.

Так как геометрическая прогрессия полностью определяется первым членом b_1 и знаменателем q [2], предположим, что b_n – расстояние n-ого светового исчезающего кольца от лампы накаливания, n – номер светового кольца, а q – отношение расстояний двух близ лежащих световых колец. Тогда, исходя из результатов эксперимента, получаем

$$b_1 = 4{,}5;\ b_2 = 9;\ b_3 = 18;\ b_4 = 36;\ b_5 = 72.$$

$$q = \frac{9}{4{,}5} = \frac{18}{9} = \frac{36}{18} = \frac{72}{36} = 2.$$

Запишем расстояния исчезающих колец b_2, b_3, b_4 через b_1.

$$b_2 = 9 = 4{,}5 \cdot 2 = b_1 \cdot 2 = b_1 \cdot q, \qquad (1)$$

$$b_3 = 18 = 4{,}5 \cdot 2 \cdot 2 = b_1 \cdot 2^2 = b_1 \cdot q^2, \qquad (2)$$

$$b_4 = 36 = 4{,}5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = b_1 \cdot 2^3 = b_1 \cdot q^3, \qquad (3)$$

$$b_5 = 72 = 4{,}5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = b_1 \cdot 2^4 = b_1 \cdot q^4, \qquad (4)$$

Сравнивая формулы (1), (2), (3), (4), получаем закономерность

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (5)$$

Равенство (5) и есть формула n-ого члена геометрической прогрессии. Таким образом, наблюдается математическая закономерность (5), согласно которой исчезают световые кольца. Значит с помощью световых явлений можно получить формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Для проверки полученного результата будем использовать трубы других размеров. Возьмем металлическую трубу № 4 (длиной L=200 мм, диаметром 60 мм). В трубе видно 4 световые полосы.

Результаты эксперимента: первая световая полоса исчезла, когда кольцо находилось на расстоянии 5 мм от лампы накаливания. Вторая световая полоса исчезла на расстоянии 15 мм от лампы накаливания, третья полоса на расстоянии 45 мм, четвёртая на расстоянии 135 мм.

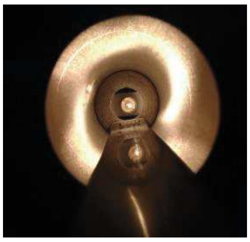

Рисунок 7 – Исчезновение третьей полосы металлической трубы № 4

Имеем соотношения

$$b_1 = 5; \quad b_2 = 15; \quad b_3 = 45; \quad b_4 = 135.$$

$$q = \frac{15}{5} = \frac{45}{15} = \frac{135}{45} = 3.$$

Выразим расстояния исчезающих колец b_2, b_3, b_4 через b_1.

$$b_2 = 15 = 5 \cdot 3 = b_1 \cdot 3 = b_1 \cdot q, \qquad (6)$$

$$b_3 = 45 = 5 \cdot 3 \cdot 3 = b_1 \cdot 3^2 = b_1 \cdot q^2, \qquad (7)$$

$$b_4 = 135 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = b_1 \cdot 3^3 = b_1 \cdot q^3. \qquad (8)$$

Сравнивая формулы (6), (7), (8), опять получаем математическую закономерность (5).

Исходя из результатов эксперимента, видно, что отношение расстояний двух близ лежащих световых колец будет всегда больше единицы, т. е. $q > 1$. Значит с помощью световых явлений можно получить формулу n-ого члена только для возрастающей геометрической прогрессии.

Из результатов эксперимента, формула (5) справедлива для пяти световых колец, т. е. для первых пяти натуральных чисел. Если увеличить мощность электрической лампочки и длину металлической трубы, количество световых полос станет больше. Докажем методом математической индукции [3], что математическая формула (5) справедлива для $n \in N$ световых полос.

База индукции. При $n = 1$ из (5) получаем верное равенство

$$b_1 = b_1 q^{1-1} = b_1.$$

Предположение индукции. Пусть формула (5) справедлива для некоторого $n = k$, т.е. имеет место соотношение

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}. \tag{9}$$

Шаг индукции. Теперь докажем, что формула (5) справедлива для
$n = k + 1$, т.е. выполняется равенство

$$b_{k+1} = b_1 \cdot q^k.$$

По определению геометрической прогрессии и формулы (9) получаем соотношения

$$b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^k.$$

Таким образом, формула (5) имеет место для $n = k + 1$, а значит, и для всех $n \in N$. Отметим, что этот результат более общий по сравнению с полученным ранее, поскольку доказан для всех $q > 0$. Кроме того, он позволяет работать с трубами любого заданного размера.

Можно сказать, что аналитическое доказательство дает общий результат, который применим для различных задач, в которых возникает формула (5). Оно позволяет утверждать, что выводы, сделанные на основе опыта, являются верными. С помощью световых явлений можно получить формулу n-ого члена только для возрастающей геометрической прогрессии, а также нужно использовать только металлическую трубу с качественной обработкой поверхности. С помощью метода математической индукции убедилась, что математическая формула $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ справедлива для любого $n \in N$ световых полос.

Главным результатом научной работы стало подтверждение гипотезы, что существует математическая закономерность для световых явлений, возникающих внутри металлической трубы, если поместить в неё светящуюся лампу накаливания. Практическая значимость данной работы состоит в установлении еще одного приложения формулы n-ого члена геометрической прогрессии. Теоретическая значимость заключается в эмпирическом и математическом доказательствах полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математический портал Математику.ру [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://matematiku.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=2015&Itemid=40. – Дата доступа: 20.09.2020.
2. Арефьева, И. Г. Алгебра: учебное пособие для 9 класса учреждений общего среднего образования / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. – Минск : Народная асвета, 2019. – 325 с.
3. Соминский, И. С. Метод математической индукции / И. С. Соминский. – Москва : Наука, 1965. – 60 с.

УДК 511.13

Учащ. К. В. Малиновская
Науч. рук. С. Г. Шостко, учитель математики
(ГУО «Средняя школа №1 г.Скиделя»)

ПРОЦЕНТЫ И МОЕ БУДУЩЕЕ

С понятием процента я познакомилась в 6 классе, научилась решать некоторые задачи на нахождение процентов. Вокруг нас проценты повсюду. Многие статистические данные приводятся в процентах. Например, из интернета я узнала, что в Германии самая низкая доля детского населения в мире 12%. Статистики даже выяснили, в какой день рождается больше всего детей. Так, лидирующее место принадлежит четвергу (17,5%), на 2-м месте понедельник (14,2%), а вот самый непопулярный для рождения день — это суббота (12,5%). 90% писем, приходящих на электронную почту – это спам. Согласно рейтингу ЮНЕСКО, Беларусь занимает 8-е место с 99,7% грамотных людей среди взрослого населения. Согласно статистике, самые грамотные люди живут в Азербайджане – 100%.

Мы слышим по телевизору, что по данным последней переписи населения численность мужского населения – 46,5 %, женского – 53,5 %, что 20 % территории нашей страны загрязнено радиацией, в выборах депутатов приняли участие 78,5 % избирателей, узнаем, что, рейтинг победителя турнира равен 65 %, промышленное производство