УДК 530.191

Учащ. М. В. Лось
Науч. рук. Т. Н. Лось, учитель математики
(ГУО «Гимназия г. Иваново»)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

В современном мире всё стремительно меняется. Это касается и самой «старой» науки – математики. На уроках геометрии мы изучаем окружности, параллелограммы, треугольники, квадраты и т.д. Однако в природе большей частью объекты «неправильные» – шероховатые, зазубренные, изъеденные ходами и отверстиями.

Мы задались вопросом: «К классу, каких геометрических фигур можно все это отнести?» Оказалось, что фракталы – подходящие средства для исследования поставленных вопросов.

Фрактальная геометрия относительно новая научная дисциплина. С помощью фрактальной теории возможно точно описать многие «неправильные» формы, встречающиеся в окружающем мире, например, береговую линию, форму облака и горного массива, ритм сердечных сокращений, ветвление сосудов в организме и речных дельт. Фрактальная геометрия помогает лучше понять многие явления с математической точки зрения.

В своей работе я показала, как можно применять понятие фрактала в математике, а именно при нахождении площади и периметра.

Первое определение фракталам дал Б. Мандельброт. Фракталом он назвал структуру, состоящую из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Говоря простым языком, фрактал – это геометрическая фигура, определенная часть которой повторяется снова и снова, изменяясь в размерах.

Сначала изображается *основа*. Затем некоторые части основы заменяются на *фрагмент*. На каждом следующем этапе части уже построенной фигуры, аналогичные замененным частям основы, вновь заменяются на фрагмент, взятый в подходящем масштабе. Всякий раз масштаб уменьшается. Меняя основу и фрагмент, можно получить много разных геометрических фракталов.

Геометрические фракталы хороши тем, что, с одной стороны, являются предметом достаточного серьезного научного изучения, а с другой стороны, их можно «увидеть» – даже человек, далекий от математики, найдет в них что-то для себя. Вручную получить хороший фрактал практически невозможно. Поэтому я использовала для создания программу PascalABC. Фрактальная графика является вычисляемой. Основное внимание уделяется не заданию изображения в виде совокупности простых геометрических фигур (прямых, многоугольников, окружностей, многогранников и пр.), а описанию алгоритма построения изображения – фрактальное изображение строится по уравнению или системе уравнений, и никакие объекты в памяти компьютера не хранятся.

Общий порядок исследования фракталов:

1. Поэтапное построение геометрических фракталов.

2. Расчет периметра и площади фигур на каждом шаге итерации. Выявление закономерностей при расчете.

3. Выводы.

Строим геометрический фрактал «Снежинку Коха» и для каждого шага итерации n в соответствии с рисунком выводим формулу расчета итогового периметра $P_n = \frac{a}{3^{n-1}} 4^n$. $P_0 = 3a$, $P_1 = a/3*4*3$, $P_2 = a/3^2*4^2*3$, $P_3 = a/3^3*4^3*3$, $P_4 = a/3^4*4^4*3$ и т.д.

Для расчета периметра и площади фрактала «Снежинка Коха» на любом шаге итерации использовалась программа Excel. За первые 4 шага итерации, периметр увеличился – примерно в 2,4 раза. За первые 20 шага – примерно в 315 раз. По сравнению с другими фракталами, периметр снежинки Коха растет довольно медленно.

Площадь фрактала активно увеличивается на 1–2 шаге итерации, далее рост существенно замедляется с каждым шагом. Пусть сторона исходного правильного треугольника равна *a*. Тогда его площадь $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$Сначала сторона равна 1, а площадь: $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Что происходит при увеличении итерации? Можно считать, что к уже имеющемуся многоугольнику пристраиваются маленькие равносторонние треугольники. В первый раз их всего 3, а каждый следующий раз их в 4 раза больше чем было в предыдущий. То есть на *n*-м шаге будет достроено $T_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ треугольников. Длина стороны каждого из них составляет треть от стороны треугольника, достроенного на предыдущем шаге. Значит, она равна $(1/3)^n$. Площади пропорциональны квадратам сторон, поэтому площадь каждого треугольника равна $S_n = \frac{S_0}{9^n} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 9^n}$. При больших значениях *n* это, кстати, очень мало. Суммарный вклад этих треугольников в площадь снежинки равен $T_n \cdot S_n = 3/4 \cdot (4/9)^n \cdot S_0$. Поэтому после *n*-го шага площадь фигуры будет равна сумме $S_0 + T_1 \cdot S_1 + T_2 \cdot S_2 + \ldots + T_n \cdot S_n = \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) S_0$. Снежинка получается после бесконечного числа шагов, что соответствует $n \to \infty$. Получается бесконечная сумма, но это сумма убывающей геометрической прогрессии, для нее есть формула: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$. Площадь снежинки равна $\left(1+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)S_0 = \frac{8}{5}S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Строим геометрический фрактал «Ковер Серпинского». В квадрате каждую из сторон делим на три равные части. Соответственно весь квадрат поделится на девять одинаковых квадратиков со стороной равной 1/3 от исходной длины. Из исходной фигуры вырезаем центральный квадрат. Затем такой же процедуре деления и вырезания подвергается каждый из 8 оставшихся квадратиков и далее процесс повторяется. При построении для каждого шага итерации n выводим формулы расчета периметра $P_n = P_0 + 2^{3n-1} * (a/3^n)$ и площади $S_n = S_0 - (a/3^n)*2^{3n-3}$. Для автоматизированного расчета периметра и площади фрактала «Ковер Серпинского» на любом шаге итерации использовалась программа Excel. Площадь такого ковра практически равна нулю, а общий периметр всех пустот становится огромным и стремится к бесконечности. Если сравнивать наглядные изображения треугольника и ковра, то можно увидеть принципиальное различие между фракталами: в треугольнике все пустоты пересекаются (касаются) друг с другом в точках и расползаются дальше, а ковровые пустоты не имеют между собой ничего общего – каждая пустота «самостоятельна» и не соприкасается с другой.

Также я рассмотрела собственную фрактальную фигуру, состоящую из кругов и определила площадь фрактальной фигуры, полученной последовательным добавлением к данному кругу радиуса 1 кругов радиусов ½, ¼, и т. д. и нашла площадь данной фрактальной фигуры после 4-ой ип-ой итерации: $S_0 = \pi R^2$;

$S_1 = S_0 + \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 * 4 == \pi R^2 + \frac{4\pi R^2}{4} = 2\pi R^2$;

$S_2 = S_1 + \pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 * 12 = 2\pi R^2 + \frac{12\pi R^2}{16} == \pi R^2\left(2+\frac{3}{4}\right)$;

$S_3 = S_2 + \pi\left(\frac{R}{8}\right)^2 * 36 = \pi R^2\left(2+\frac{3}{4}\right) + \frac{36\pi R^2}{64} == \pi R^2\left(2+\frac{3}{4}+ +\frac{3^2}{4^2}\right)$;

$S_4 = S_3 + \pi\left(\frac{R}{16}\right)^2 * 108 = \pi R^2\left(2+\frac{3}{4}+ +\frac{3^2}{4^2}\right) + \frac{108\pi R^2}{256} = \pi R^2\left(2+ +\frac{3}{4}+\frac{3^2}{4^2}+\frac{3^3}{4^3}\right)$;

$S_n = \pi R^2\left(1+1+\frac{3}{4}+\frac{3^2}{4^2}+\frac{3^3}{4^3}+\cdots+\frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}\right)$. Увеличение площади заметно по 7-ую итерацию, а затем увеличение незначительно.