УДК 514.172.45

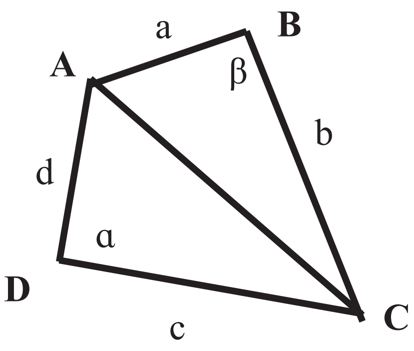
Учащ. Е. В. Давыденкова
Науч. рук. О. С. Мезенцева, учитель математики
(ГУО «Гимназия № 1 г. Жодино»)

ПЛОЩАДЬ ВЫПУКЛОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Предлагаемый материал представляет собой исследовательскую работу, в которой освещается трактовка темы «Площадь выпуклого четырехугольника» через взаимосвязь его элементов (сторон, углов, диагоналей), вписанной и описанной окружностей. Результаты исследования будут полезны и могут быть использованы учащимися и преподавателями на уроках математики, факультативах, при подготовке к олимпиадам и экзаменам.

Условие задачи: Дан выпуклый произвольный четырехугольник ABCD, AB=a, BC=b, CD=c, AD=d. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника может быть найдена по формуле S= $\sqrt{F - abcd \cdot cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Задача 1. Решение задачи для выпуклого произвольного четырехугольника.



Из ΔABC по теореме косинусов
$AC^2=AB^2+BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta$,
$AC^2=a^2+b^2 - 2ab \cdot \cos\beta$.
Из ΔADC: $AC^2= AD^2+ DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\alpha$
$AC^2=d^2+c^2 - 2dc \cdot \cos\alpha$.
Тогда $a^2+b^2 - 2ab \cdot \cos\beta= d^2+c^2 - 2dc \cdot \cos\alpha$;
$a^2+b^2-d^2-c^2=2ab \cdot \cos\beta - 2dc \cdot \cos\alpha$.(1)
По свойству площадей $S_{ABCD} = S_{ABC}+S_{ADC}$;
$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab \cdot \sin\beta$;
$S_{ADC} =\frac{1}{2}dc \cdot sin\alpha$.
Получим $S_{ABCD}=\frac{1}{2}ab \cdot \sin\beta + \frac{1}{2}dc \cdot sin\alpha$.

Тогда $a^2+b^2 - 2ab \cdot \cos\beta= d^2+c^2 - 2dc \cdot \cos\alpha$;
$a^2+b^2-d^2-c^2=2ab \cdot \cos\beta - 2dc \cdot \cos\alpha$.(1)

Проведем равносильные преобразования этого равенства. Обозначим S_{ABCD}=S и умножим обе части на 4:
$4S=2ab \cdot \sin\beta + 2dc \cdot \sin\alpha$.(2).
Возведем обе части равенств (1) и (2) в квадрат:
$16S^2=4a^2b^2 \cdot sin^2\beta + 4d^2c^2 \cdot sin^2\alpha + 8abcd \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$. (2). И

$(a^2+b^2-d^2-c^2)^2 = 4a^2b^2 \cdot cos^2\beta + 4d^2c^2 \cdot cos^2\beta - 8abcd \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta.$

Сложим почленно:

16S^2+$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

=

$4a^2b^2(sin^2\beta + cos^2\beta) + 4d^2c^2(sin^2\alpha + cos^2\alpha) - 8abcd(cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta)$

.

Преобразуем данное равенство используя формулы:

sin^{2}α+cos^{2}α=1, $sin^2\beta + cos^2\beta = 1$ и cosα·cosβ – sinα·sinβ = cos(α+β); 1+cos (α+β)= =2cos$^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ и a^2 - b^2=(a-b)(a+b).

Откуда 16S^2 + $(a^2+b^2-d^2-c^2)^2 = 4a^2b^2 + 4d^2c^2 - 8abcd \cdot \cos(\alpha+\beta)$;

S^2 = $\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b+c-d}{2}\right) \cdot \left(\frac{c+d-a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{c+d+a-b}{2}\right) - abcd \cdot cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$;

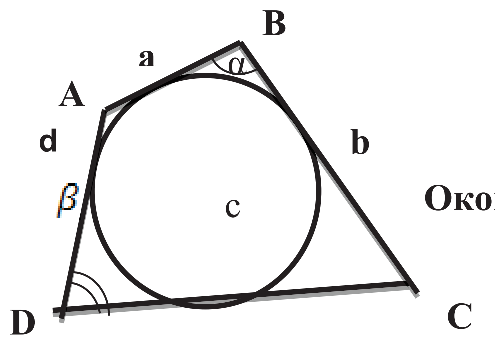
Откуда используя формулу полупериметра $p = \frac{a+b+c+d}{2}$имеем:

S^2 = $(p-c)(p-d)(p-a)(p-b) - abcd \cdot cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Откуда S=$\sqrt{(p-a)(p-d)(p-c)(p-b) - abcd \cdot cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$,

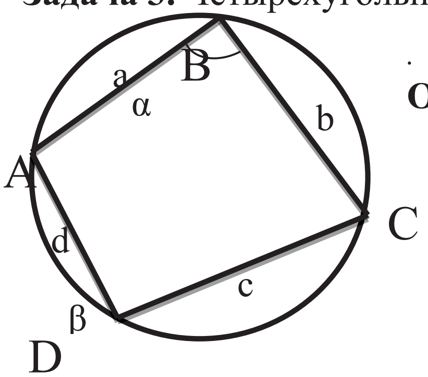
Где обозначив (p-a)(p-d)(p-c)(p-b)= *F*,p- полупериметр**, имеем следующую формулу:** $S = \sqrt{F - abcd \cdot cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Задача 2. Рассмотрим произвольный четырехугольник, описанный около окружности



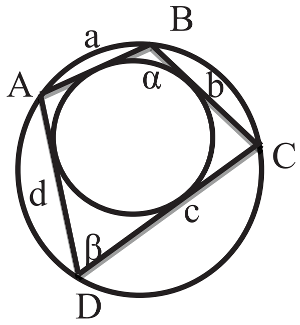
Окончательно имеем: $S = \sqrt{abcd \cdot sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Задача 3. Четырехугольник вписан в окружность.



Окончательно имеем: S= $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

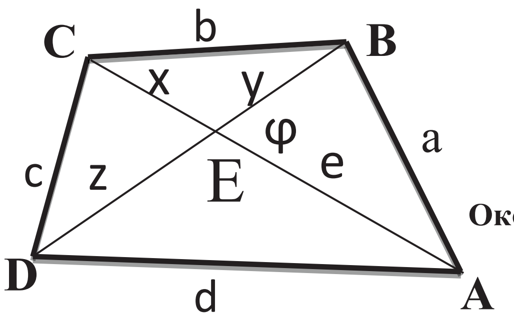
Задача 4. В четырехугольник можно как вписать, так и описать окружность.



Имеем: $S = \sqrt{\frac{c+d+b-a}{2} \cdot \frac{c+d+a-b}{2} \cdot \frac{a+b+d-c}{2} \cdot \frac{a+b+c-d}{2}} = \sqrt{\frac{2c}{2} \cdot \frac{2d}{2} \cdot \frac{2a}{2} \cdot \frac{2b}{2}}$

Окончательно имеем: $S = \sqrt{abcd}$.

Задача 5. Нахождение площади произвольного выпуклого четырехугольника через его стороны и острый угол между диагоналями.



Окончательно имеем: $S = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\,\varphi(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)$.

УДК 519.85

Учащ. А. В. Данилович
Науч. рук. А. Е. Иванчик, учитель математики
(ГУО «Средняя школа №1 г. Скиделя»)

МЕТОД БИНАРНОГО ПОИСКА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Актуальность темы: бинарный (двоичный) поиск (также известен как метод деления пополам или дихотомия) – классический алгоритм поиска элемента в отсортированном массиве (векторе), использующий дробление массива на половины. Используется в информатике, вычислительной математике и математическом программировании, решении олимпиадных задач.

В этой связи работы по исследованию бинарного поиска приобретают еще большую актуальность.

Цель: изучить метод бинарного поиска элементов множества и его отличительные характеристики.