

**ПРИЗНАК ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА**

Сегодня расширяется круг школьников, для которых математика становится профессионально значимым предметом. Признаки прямоугольного треугольника, которые мы получили в нашей работе будут полезны при решении геометрических задач, где нужно доказать, что рассматриваемый треугольник – прямоугольный. Применение этих признаков значительно упростит и ускорит процесс решения геометрических задач, что важно во время олимпиад и централизованного тестирования.

**Цель** нашей работы: получить и доказать признаки прямоугольного треугольника различными способами и выяснить возможность практического применения исследования.

**Признак прямоугольного треугольника:** если полупериметр треугольника равен сумме диаметра описанной окружности и радиуса вписанной окружности, то этот треугольник прямоугольный.

**Идея** нашего доказательства в том, что мы выражаем  $R$ ,  $r$  и  $p$  различными способами и подставляем в формулу  $2R + r = p$ . Затем, проделав некоторые преобразования, получаем нужный результат. Мы доказали наш признак геометрически, алгебраически, с применением тригонометрии при помощи комбинирования всех методов.

**Еще один признак прямоугольного треугольника:** пусть  $p$  – полупериметр некоторого треугольника,  $R$  – радиус его описанной окружности. Тогда  $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$  в том и только в том случае, когда треугольник – прямоугольный.

Покажем задачу, в которой применение признака прямоугольного треугольника значительно упрощает решение.

**Задача.** Площадь треугольника равна  $24\text{см}^2$ . Найти больший угол этого треугольника, если радиус окружности, описанной около него, равен 5 см, а радиус вписанной в него окружности равен 2 см.

**Решение 1** (без применения признака прямоугольного треугольника).

$$1) S = pr \Rightarrow p = \frac{S}{r} = \frac{24}{2} = 12 \Rightarrow a + b + c = 12$$

$$2) R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow abc = 4SR = 4 \cdot 24 \cdot 5 = 480$$

$$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 24 \Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = 576$$

4) Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} abc = 480 \\ a + b + c = 24 \\ 12 \cdot (12 - a)(12 - b)(12 - c) = 576 \end{cases}$$

5) Выразим из первого уравнения системы  $ab = \frac{480}{c}$  и из второго уравнения системы  $a + b = 24 - c$  и подставим в третье уравнение. Получим:

$$\left(144 - 12(24 - c) + \frac{480}{c}\right) \cdot (12 - c) = 48$$

$$c^3 - 24c^2 + 188c - 480 = 0$$

$$(c - 10)(c^2 - 14c + 48) = 0$$

$$c - 10 = 0 \text{ или } c^2 - 14c + 48 = 0$$

$$c = 10, c_1 = 6, c_2 = 8$$

6) Подставим найденное значение  $c = 10$  в систему. Получим:

$$\begin{cases} ab = 48 \\ a + b = 12 \end{cases} \text{ Решив эту систему, получим, что } a = 6, b = 8.$$

7) Мы получили, что стороны нашего треугольника равны 10, 6 и 8, то есть для него выполняется теорема Пифагора. Значит наш треугольник прямоугольный и его больший угол равен  $90^\circ$ .

**Решение 2** (с применением признака прямоугольного треугольника).

$$1) S = pr \Rightarrow p = \frac{S}{r} = \frac{24}{2} = 12$$

2) Проверим выполнение признака прямоугольного треугольника:

$$2R + r = p$$

$$2 \cdot 5 + 2 = 12$$

$$10 + 2 = 12$$

$$12 = 12$$

Так как выполняется признак прямоугольного треугольника, то этот треугольник прямоугольный и его больший угол равен  $90^\circ$ . **Ответ:**  $90^\circ$ .

В нашей работе мы рассмотрели два признака прямоугольного треугольника, доказали их различными способами, а также доказали зависимость знака выражения  $p - 2R - r$  от вида треугольника: если треугольник остроугольный, то  $p - 2R - r > 0$ , а если треугольник тупоугольный, то  $p - 2R - r < 0$ .