интенсивность эпидемий – плотность популяции, наличие инкубационного периода у заболевания, частоту контактов, карантины, вакцинацию и другие. Результаты такого моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными. Но в рамках этой работы были рассмотрены лишь самые простые модели и, к сожалению, не столь хорошо предсказывающие развитие эпидемии.

УДК 514.172.45

Учащ. В. Д. Герман, Д. О. Каминская
Науч. рук. О. И. Ивашина, учитель математики
(ГУО «Средняя школа №148 г. Минска)

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ПЛАТОНОВЫХ ТЕЛАХ

Актуальность нашей работы обусловлена необходимостью решения практико-ориентированных задач, связанных с правильными многогранниками.

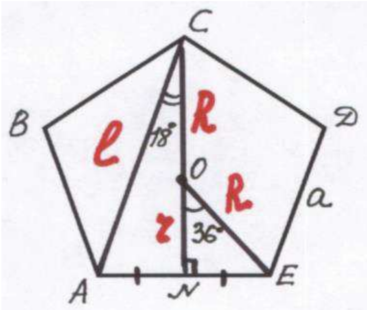
Целью данного исследования является установление связи между правильными многогранниками и золотым сечением с выводом формул для нахождения объёмов икосаэдра и додекаэдра, а также нахождением наиболее удобного способа построения данных фигур.

Мы рассмотрели «золотое сечение» на примерах деления отрезка, «Золотого прямоугольника» и пятиугольника, так как они будут использованы нами при выводе формул для многогранников. Обозначается «золотое сечение» греческой буквой Ф (фи).

Анализ Платоновых тел показывает, что гранями додекаэдра являются пентагоны, т.е., правильные пятиугольники, основанные на золотом сечении. Если внимательно посмотреть на икосаэдр, то можно увидеть, что в каждой вершине икосаэдра сходится пять треугольников, внешние стороны которых образуют пентагон. Уже этих фактов достаточно, чтобы убедиться в том, что «золотое сечение» играет существенную роль в конструкции этих двух Платоновых тел.

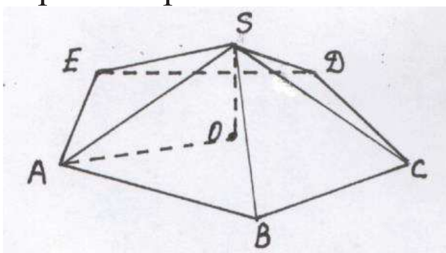
Для вывода формул рассмотрим 3 вспомагательные задачи.

1. Дан правильный пятиугольник, длина стороны которого равна a. Выразить через число Ф радиус вписанной окружности; радиус описанной окружности; площадь данного пятиугольника.



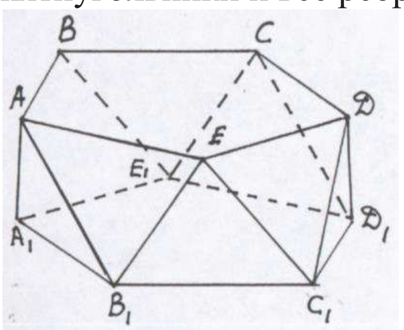
Ответ: $R_5 = \frac{a\Phi}{\sqrt{\Phi+2}}$; $r_5 = \frac{a\Phi^2}{2\sqrt{\Phi+2}}$; $S_5 = \frac{5a^2\Phi^2}{4\sqrt{\Phi+2}}$.

2. Выразить через Ф длину высоты и объём правильной пятиугольной пирамиды, боковые рёбра и стороны основания которой равны a.



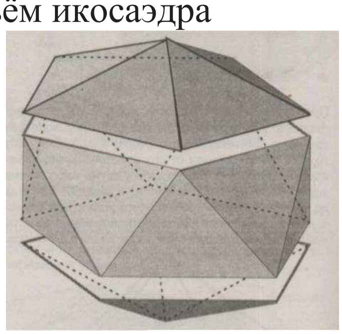
Ответ: $h_5 = \frac{a}{\sqrt{\Phi+2}}$, $V_5 = \frac{1}{12} a^3(\Phi + 2)$.

3. Выразить через Ф длину высоты и объём антипризмы, основания которой – правильные пятиугольники и все рёбра равны a.



$V_{антипризмы} = V_{10} - 10V_3 = \frac{1}{6} a^3 \cdot \frac{3 \cdot 5\Phi^2 - 5}{\Phi+2} = \frac{1}{6} a^3 \Phi^2(\Phi + 2)$

Теперь можно найти объём икосаэдра



$$V = V_{антипризмы} + 2V_5. \qquad V = \frac{5}{6} a^3 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12} a^3 .$$

А вот для нахождения объёма додекаэдра можно воспользоваться тем, что объём будет равен объёму 12 правильных пятиугольных пирамид, высотой которых является радиус сферы, вписанной в додекаэдр.

$$V=12\cdot V_5=12\cdot \frac{1}{3}S_5\cdot R_g=4\cdot\frac{5a^2\Phi^2}{4\sqrt{\Phi+2}}\cdot\frac{\Phi^2}{2\sqrt{3-\Phi}}=\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^2$$

Площадь поверхности додекаэдра вычисляется как произведение площади пятиугольника (формула выведена выше) и количества граней.

$$S_{пов.}=12\cdot\frac{5a^2\Phi^2}{4\sqrt{\Phi+2}}=\frac{15a^2\Phi^2}{\sqrt{\Phi+2}}.$$

Площадь поверхности икосаэдра можно находить как произведение двадцати граней, каждая из которых является правильным треугольником.

$$S=20\cdot S_{тр.}=20\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=5\sqrt{3}a^2.$$

В данном случае целесообразно использовать данную формулу, так как золотым треугольником является равнобедренный треугольник.

Для построения икосаэдра можно разделить его 12 вершин на три группы по четыре вершины, которые являются вершинами «золотых» прямоугольников, каждый из которых перпендикулярен двум другим. Если мы возьмём три равных «золотых» прямоугольника и поместим их перпендикулярно друг к другу так, чтобы они пересекались в их центрах, 12 выступающих вершин образуют икосаэдр с ребром, равным меньшей стороне «золотого» прямоугольника.

Таким же образом центры 12-ти пятиугольных граней додекаэдра можно объединить в три группы по 4 и каждая из этих групп также составит золотой прямоугольник.

А можно также использовать золотые прямоугольники, если разделить их стороны следующим образом a:c = c:b = Ф. Затем три одинаковых золотых прямоугольника располагают симметрично и перпендикулярно друг другу.

Таким образом, нами доказана связь золотого сечения с правильными многогранниками. Вывод формул Платоновых тел позволяет решать практико-ориентированные задачи, которые могут быть нами использованы в будущей профессиональной деятельности. Знание свойств правильных многогранников и умение их строить найдут своё применение на уроках математики, биологии, химии и искусства.