

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**В. В. Чаевский**

# **ФИЗИКА**

**В 5-ти частях**

## **Часть 3. Электростатика. Постоянный ток**

**Тексты лекций  
для студентов специальностей 1-48 01 01 «Химическая технология  
неорганических веществ, материалов и изделий»,  
1-48 01 04 «Технология электрохимических производств»**

Минск 2021

УДК 537.2(075.8)  
ББК 22.3я73  
Ч-14

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета.

**Р е ц е н з е н т ы :**

доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой физики и методики преподавания физики  
УО «Белорусский государственный педагогический университет  
имени Максима Танка» *В. Р. Соболев*;  
доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры физики твердого тела  
Белорусского государственного университета *В. Г. Шепелевич*

**Чаевский, В. В.**

Ч-14 Физика. В 5 ч. Ч. 3. Электростатика. Постоянный ток : тексты лекций для студентов специальностей 1-48 01 01 «Химическая технология неорганических веществ, материалов и изделий», 1-48 01 04 «Технология электрохимических производств» / В. В. Чаевский. – Минск : БГТУ, 2021. – 96 с.  
ISBN 978-985-530-946-9.

В издании изложен материал лекций по разделам «Электростатика» и «Постоянный электрический ток» для студентов химико-технологических специальностей очной и заочной форм обучения. Рассмотрены основные понятия, определения и законы науки об электричестве.

Издание предназначено для организации самостоятельной и аудиторной работы на лекционных, практических и лабораторных занятиях по дисциплине «Физика».

УДК 537.2(075.8)  
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-530-946-9

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2021  
© Чаевский В. В., 2021

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	4
Лекция № 1. Характеристики электростатических полей.....	5
Лекция № 2. Характеристики электростатических полей (продолжение) .....	12
Лекция № 3. Характеристики электростатических полей (продолжение) .....	20
Лекция № 4. Характеристики электростатических полей (окончание) .....	28
Лекция № 5. Электрическое поле в диэлектриках.....	35
Лекция № 6. Электростатические поля в диэлектриках и проводниках.....	47
Лекция № 7. Емкость. Энергия электрического поля ....	57
Лекция № 8. Постоянный электрический ток .....	67
Лекция № 9. Постоянный электрический ток (окончание).....	77
Лекция № 10. Контактные и эмиссионные явления в металлах, электрический ток в жидкостях и газах .....	84

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Электронные тексты лекций по дисциплине «Физика. Электростатика. Постоянный ток» разработаны для студентов УО «Белорусский государственный технологический университет» химико-технологических специальностей очной и заочной форм обучения и предназначены для организации самостоятельной и аудиторной работы студентов на лекционных, практических и лабораторных занятиях.

Материал текстов лекций соответствует типовой программе «Физика», утвержденной Министерством образования Республики Беларусь для студентов технических учреждений высшего образования химико-технологических специальностей 1-48 01 01 «Химическая технология неорганических веществ, материалов и изделий», 1-48 01 04 «Технология электрохимических производств».

Главное внимание материалов текстов лекций сосредоточено на раскрытии физического смысла важнейших вопросов курса и на детальном рассмотрении некоторых тем, которые часто вызывают затруднения у студентов в процессе обучения. Поэтому содержание текстов лекций охватывает не только обязательный минимум учебного материала рабочей образовательной программы, но и дополнительный материал для углубленного изучения законов физики, который предназначен для развития познавательных способностей и приобретения профессиональных навыков у студентов с различным уровнем подготовки.

В издании последовательно даны характеристики электростатического поля, описаны его свойства и приведены примеры расчета. В соответствии с программой содержание раздела «Электрическое поле в веществе» раскрыто в лекциях «Электрическое поле в диэлектриках», «Электрическое поле в проводниках». В отдельной лекции изложены вопросы темы «Емкость. Энергия электрического поля». Описаны закономерности протекания постоянного электрического тока в различных средах.

Автор благодарен коллективу кафедры физики БГТУ, работа в котором позволила ему реализовать данные тексты лекций.

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда.
2. Взаимодействие электрических зарядов. Закон Кулона.
3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции электростатических полей.

### 1. Электрический заряд.

#### Свойства электрического заряда.

#### Закон сохранения электрического заряда

Как и понятие гравитационной массы тела в механике Ньютона, понятие заряда в электродинамике является первичным, основным.

*Электрический заряд*  $q$  – это физическая величина, характеризующая свойство частиц или тел вступать в электромагнитные силовые взаимодействия.

Совокупность всех известных экспериментальных фактов позволяет сделать следующие выводы:

– существует два рода электрических зарядов, условно названных положительными и отрицательными;

– одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются. В этом также проявляется принципиальное отличие электромагнитных сил от гравитационных. Гравитационные силы всегда являются силами притяжения;

– существует *элементарный* (минимальный по значению) заряд  $e = 1,602177 \cdot 10^{-19}$  Кл  $\approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Носителями элементарных зарядов являются электроны ( $-e$ ) и протоны ( $+e$ ). У любого заряженного тела заряд по величине не может быть меньше элементарного. Следует отметить, что в современной физике элементарных частиц предполагается существование так называемых *кварков* – частиц с дробным зарядом  $\pm 1/3e$ ,  $\pm 2/3e$  и т. д. Однако в свободном состоянии кварки до сих пор наблюдать не удалось. В настоящее время в ЦЕРНе (Европейском центре ядерных исследований) про-

водятся работы на Большом адронном коллайдере (БАК). Эксперименты на БАК позволят понять, существуют ли *новые элементарные частицы*, в частности *бозон Хиггса*, а также так называемые *суперсимметричные частицы*, в случае нахождения которых будет раскрыта тайна о происхождении массы частиц и подтвердится гипотеза о существовании одного единого взаимодействия природы в изначальном состоянии мира (до Большого взрыва) (*прим.*: сегодня миром управляют 4 взаимодействия);

– заряды могут передаваться (например, при непосредственном контакте) от одного тела к другому. Заряд может передаваться от одного тела к другому только порциями, содержащими целое число, т. е. электрический заряд дискретен: электрический заряд любого тела состоит из целого числа положительных и отрицательных элементарных зарядов:

$$q = N_+e - N_-e, \quad (1.1)$$

где  $N_+$  и  $N_-$  – целые числа (0, 1, 2, ...) соответственно положительных и отрицательных элементарных зарядов. Это свойство опытным путем показал американский физик Р. Милликен;

– в отличие от массы тела электрический заряд не является неотъемлемой характеристикой данного тела. Одно и то же тело в разных условиях может иметь разный заряд;

– электрический заряд инвариантен: значение заряда не изменяется при переходе от одной инерциальной системы к другой:

$$q = \text{inv}. \quad (1.2)$$

Так как скорость движения зависит от выбора системы отсчета, то можно сказать, что значение электрического заряда не зависит от скорости его движения.

Одним из фундаментальных законов природы является экспериментально установленный *закон сохранения электрического заряда* – алгебраическая сумма зарядов тел и частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \text{const}. \quad (1.3)$$

Закон сохранения электрического заряда утверждает, что в замкнутой системе тел не могут наблюдаться процессы рождения или исчезновения зарядов только одного знака. Под *электрически изолированной системой* понимают такую систему, из которой не забирают и в которую не вносят электрические заряды.

## 2. Взаимодействие электрических зарядов.

### Закон Кулона

Впервые закон взаимодействия неподвижных зарядов был установлен французским физиком Ш. Кулоном (1785 г.). Идея измерений основывалась на блестящей догадке Кулона о том, что если заряженный шарик привести в контакт с точно таким же незаряженным, то заряд первого разделится между ними поровну. Таким образом был указан способ изменять заряд шарика в два, три и более раз.

В опытах Кулона измерялось взаимодействие между шариками, размеры которых были много меньше расстояния между ними, на основании измерений, произведенных с помощью крутильных весов. Таким образом, данные заряженные тела являлись *точечными зарядами* – заряженными телами, размерами которых в условиях данной задачи можно пренебречь.

На основании многочисленных опытов Кулон установил следующий закон: силы взаимодействия неподвижных зарядов прямо пропорциональны произведению модулей зарядов  $q$  и обратно пропорциональны квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad (1.4)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2$  – электрическая константа.

Чтобы формула (1.4) давала не только значение модуля силы, но и ее направление, удобно записать закон Кулона в векторном виде:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \quad (1.5)$$

где  $F$  – сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ ;  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ;  $r$  – вектор, проведенный от заряда  $q_1$  к заряду  $q_2$  (рис. 1.1).

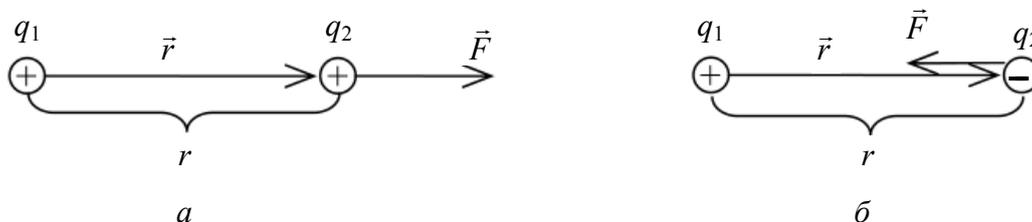


Рис. 1.1

Можно заметить, что формула (1.5) показывает направление силы при любых знаках зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , т. е. при отталкивании ( $q_1q_2 > 0$ , рис. 1.1, а) и при притяжении ( $q_1q_2 < 0$ , рис. 1.1, б) этих зарядов.

Взаимодействие неподвижных электрических зарядов называют *электростатическим*, или *кулоновским*, *взаимодействием*. Раздел электродинамики, изучающий кулоновское взаимодействие, называют *электростатикой*.

В лекции 8 «Постоянный электрический ток» будет показано, что 1 *кулон* (Кл) – это заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А.

Опыт показывает, что сила подчиняется *принципу суперпозиции* (наложения) – сила, действующая на точечный заряд со стороны системы точечных зарядов, равна векторной сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов системы при отсутствии других зарядов:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.6)$$

### **3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля.**

#### **Силовые линии. Принцип суперпозиции электростатических полей**

По современным представлениям, электрические заряды не действуют друг на друга непосредственно. Каждое заряженное тело создает в окружающем пространстве *электрическое поле*. *Главное свойство электрического поля* – действие на электрические заряды с некоторой силой. Таким образом, взаимодействие заряженных тел осуществляется не непосредственным их воздействием друг на друга, а через электрические поля, окружающие заряженные тела.

Электрическое поле, окружающее заряженное тело, можно исследовать с помощью так называемого *пробного заряда* – малого по величине, чтобы собственным полем не исказить исследуемое поле, точечного заряда, который не вносит заметного перераспределения исследуемых зарядов. Для удобства пробный заряд условились считать положительным.

Поместим пробный заряд в точку поля, создаваемого зарядом  $q$  (рис. 1.2), и обнаружим, что на пробный заряд действует сила

$$F = q_{\text{пр}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}. \quad (1.7)$$

Очевидно, что отношение  $F/q_{\text{пр}}$  для всех пробных зарядов будет одним и тем же и зависит лишь от величины заряда, создающего поле, и расстояния между зарядом и точкой в исследуемом поле. Поэтому отношение

$$\vec{E} = \vec{F}/q_{\text{пр}} \quad (1.8)$$

принято в качестве величины, характеризующей электрическое поле, и называется *напряженностью* электрического поля в данной точке.

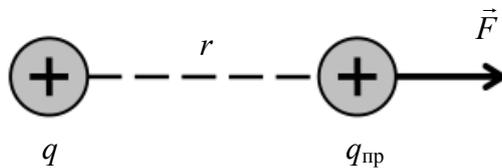


Рис. 1.2

Таким образом, *напряженность электрического поля*  $\vec{E}$  – векторная физическая величина, равная отношению силы, с которой поле действует на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку пространства, к величине этого заряда, – является силовой характеристикой электрического поля.

В СИ напряженность электрического поля измеряется в вольтах на метр:  $[E] = \text{В/м}$ , где В (вольт) является единицей измерения потенциала электрического поля.

В соответствии с формулами (1.5), (1.8) напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $r$  от него, определяется выражением

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (1.9)$$

где  $r$  – вектор, проведенный от заряда  $q$  к произвольной точке поля.

Согласно выражению (1.9), вектор  $\vec{E}$  направлен от заряда вдоль прямой, проходящей через заряд  $q$  и данную точку поля, если он положителен (рис. 1.3, *а*), и к заряду, если он отрицателен (рис. 1.3, *б*).

Электрическое поле неподвижных и не меняющихся со временем зарядов называется *электростатическим*.



Рис. 1.3

Для графического изображения электростатических полей используют *силовые линии поля* или *линии напряженности*. Силовыми линиями поля называют кривые, касательные к которым в любой точке поля совпадают с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$  в этой точке (рис. 1.4). При изображении электрического поля с помощью силовых линий их густота должна быть пропорциональна модулю вектора напряженности поля. Линии проводят гуще в тех местах, где напряженность поля больше, и реже там, где она меньше.

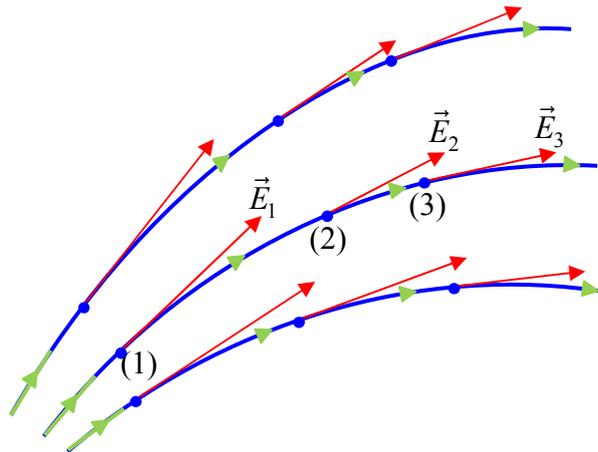


Рис. 1.4

Из принципа суперпозиции сил (1.6) и выражения для напряженности через силу электрического поля (1.8) вытекает *принцип суперпозиции электрических полей*: напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , создаваемого системой неподвижных точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.10)$$

Принцип суперпозиции позволяет вычислять напряженность поля любой системы неподвижных зарядов.

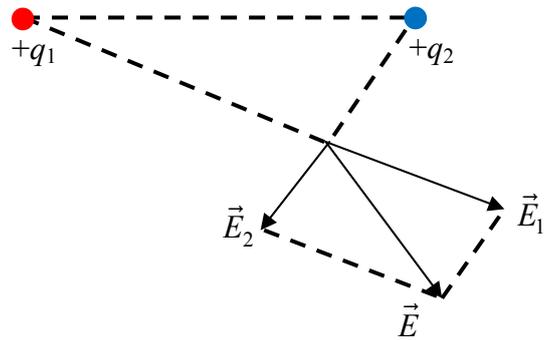


Рис. 1.5

На рис. 1.5 показано направление напряженности поля системы двух неподвижных зарядов, действующей на пробный заряд, помещенный в произвольную точку пространства.

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ (продолжение)

4. Работа по перемещению заряженной частицы в электростатическом поле.
5. Циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля.  
Теорема о циркуляции вектора напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах.
6. Потенциал. Разность потенциалов. Электрическое напряжение. Расчет потенциала электростатических полей по принципу суперпозиции.
7. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Эквипотенциальные поверхности.

### 4. Работа по перемещению заряженной частицы в электростатическом поле

На любой заряд, находящийся в электростатическом поле, действует сила  $\vec{F} = q_{\text{пр}} \vec{E}$  (см. формулу (1.8)). Следовательно, при движении этого заряда в поле совершается работа.

Определим работу по перемещению пробного заряда  $q_{\text{пр}}$  из точки 1 в точку 2 в поле точечного неподвижного заряда  $q$  (рис. 2.1).

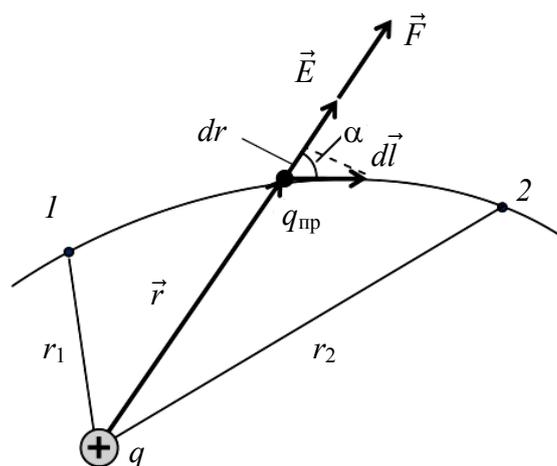


Рис. 2.1

Элементарная работа, которая совершается силами поля над зарядом  $q_{\text{пр}}$  при перемещении:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_{\text{пр}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_{\text{пр}} E dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{пр}} q}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{пр}} q}{r^2} dr, \quad (2.1)$$

где  $dl \cos \alpha = dr$ .

Полная работа по перемещению заряда  $q_{\text{пр}}$  на пути из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_{\text{пр}}}{r^2} dr = \frac{q q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.2)$$

Из формулы (2.2) видно, что  $A_{12}$  не зависит от пути перемещения заряда  $q_{\text{пр}}$  и определяется только относительными положениями  $q$  и  $q_{\text{пр}}$  в начале и конце пути. Следовательно, электростатическое поле является *потенциальным*, а электростатические силы – *консервативными*.

Так как электростатическое поле является потенциальным, то работа по перемещению заряда  $q_{\text{пр}}$  по замкнутому контуру будет равна нулю:

$$A = \oint_L dA = 0. \quad (2.3)$$

С учетом выражения (2.1)

$$\oint_L dA = \oint_L q_{\text{пр}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_{\text{пр}} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0; \quad A = \oint_L dA = 0. \quad (2.4)$$

Интеграл  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E \cos \alpha dl = \oint_L E_l dl$  называется *циркуляцией вектора напряженности электростатического поля*. Из формулы (2.4) следует *теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной форме*: циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру всегда равна нулю. Выражение (2.4) является условием *консервативности электростатического поля*.

Получим теорему о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в дифференциальной форме. Для этого к левой части первого уравнения (2.4) применим *теорему Стокса* – циркуляция вектора  $\vec{A}$  по произвольному контуру  $L$  равна потоку ротора этого вектора сквозь любую поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{A})_n dS, \quad (2.5)$$

где  $\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$  – ротор вектора  $\vec{A}$ .

В результате с учетом формулы (2.4)

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \text{rot} \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = 0. \quad (2.6)$$

Данное равенство справедливо для любого контура и натянутой на него поверхности, если  $\text{rot} \vec{E} = 0$ .

Выражение  $\text{rot} \vec{E} = 0$  показывает, что из потенциального характера электростатического поля следует, что оно является *безвихревым*.

## 6. Потенциал. Разность потенциалов. Электрическое напряжение. Расчет потенциала электростатических полей по принципу суперпозиции

Тело, находящееся в потенциальном поле, имеет потенциальную энергию. Работу по перемещению тела (рис. 2.1) можно представить в виде разности потенциальных энергий в начале и конце пути:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (2.7)$$

Потенциальную энергию можно отсчитывать от любого уровня (так как физический смысл имеет только лишь разность потенциальных энергий). Удобно выбрать потенциальную энергию заряда на бесконечности за начало отсчета потенциальной энергии. Устремим  $r_2 \rightarrow \infty$ , тогда

$$A_{1\infty} = W_{p1} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.8)$$

В общем случае

$$W_p = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (2.9)$$

где  $W_p$  – потенциальная энергия заряда  $q_{\text{пр}}$  в поле заряда  $q$  на расстоянии  $r$ .

Если правую часть выражения (2.9) разделить на величину пробного заряда  $q_{\text{пр}}$ , то получим физическую величину, которая называется *потенциалом поля в данной точке*:

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{пр}}}. \quad (2.10)$$

*Потенциал* – это энергетическая характеристика электростатического поля, скалярная величина, численно равная отношению потенциальной энергии, которую имеет пробный заряд в данной точке поля, к величине этого заряда.

Подставляя выражения для потенциальной энергии (2.9), получим формулу для *потенциала электростатического поля точечного заряда*:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.11)$$

Единица измерения потенциала – вольт:  $[\varphi] = \text{В}$ .

Из формулы (2.11) следует: если  $q > 0$ , то  $\varphi > 0$ ; если  $q < 0$ , то  $\varphi < 0$ .

В силу введенного определения потенциала  $\varphi$  работа по перемещению заряда  $q_{\text{пр}}$  в электростатическом поле из точки 1 в точку 2 определяется так:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r_2} = q_{\text{пр}} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \right) = q_{\text{пр}}(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.12)$$

Откуда

$$A_{12} = q_{\text{пр}}(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta\varphi \Rightarrow \frac{A_{12}}{q_{\text{пр}}} = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = U. \quad (2.13)$$

Величина, равная работе, совершаемой полем по перемещению единичного положительного пробного заряда из точки 1 в точку 2, называется *разностью потенциалов*, или *напряжением*.

Единица измерения напряжения – вольт:  $[U] = \text{Дж/Кл}$ .

Разность потенциалов – отношение работы по перемещению заряда к величине этого заряда, удельная работа кулоновских сил, однозначно определяемая начальной и конечной точками перемещения.

Разность потенциалов – это скалярная величина. Она является энергетической характеристикой электростатического поля, так как работа есть мера изменения энергии.

Если заряд из точки  $l$  с потенциалом  $\varphi$  удаляется на бесконечность (где потенциал равен нулю), то согласно формуле (2.12) работа сил поля равна  $A_{1\infty} = q\varphi$ .

Следовательно, *потенциал электростатического поля* численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при его удалении из данной точки на бесконечность.

Рассмотрим поле, создаваемое системой точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Расстояния от каждого из зарядов до данной точки поля обозначим  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Работа, совершаемая силами этого поля по перемещению пробного заряда  $q_{\text{пр}}$ , будет равна алгебраической сумме работ сил электростатического поля, создаваемого каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (2.14)$$

Каждая из работ

$$A_i = \frac{q_{\text{пр}}q_i}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{i_1}} - \frac{1}{r_{i_2}} \right). \quad (2.15)$$

Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_{\text{пр}}q_i \left( \frac{1}{r_{i_1}} - \frac{1}{r_{i_2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_{i_1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_{i_2}}. \quad (2.16)$$

С учетом выражения (2.7)

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_i} = q_{\text{пр}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}. \quad (2.17)$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{пр}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (2.18)$$

Из соотношения (2.18) следует *принцип суперпозиции потенциалов*: потенциал поля, создаваемого системой зарядов в данной точке, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов в отдельности.

Если электростатическое поле создается заряженным телом с распределенным зарядом, то его разбивают на элементарные заряды  $dq$ .

Такие заряды можно считать точечными, и для них допускается применить формулу (2.11):

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.19)$$

Применяя принцип суперпозиции (2.18) в случае распределенного заряда, суммирование необходимо заменить интегрированием:

$$\varphi = \int d\varphi. \quad (2.20)$$

## 7. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Эквипотенциальные поверхности

Для работы на перемещении  $d\vec{l}$  (рис. 2.1) можно написать два эквивалентных выражения:

$$\begin{cases} dA = q_{\text{пр}} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \\ dA = -q_{\text{пр}} d\varphi. \end{cases} \quad (2.21)$$

Знак « $-$ » во второй формуле связан с тем, что работа сил поля над зарядом равна убыли потенциальной энергии заряда.

Сравнение двух формул приводит к связи между потенциалом поля  $\varphi$  и вектором напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -d\varphi. \quad (2.22)$$

Отсюда

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}; \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}; \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \quad (2.23)$$

Вектор  $\vec{E}$  можно представить как  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$ ; подставив выражения для компонентов вектора  $\vec{E}$ , получим:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \vec{e}_x - \frac{d\varphi}{dy} \vec{e}_y - \frac{d\varphi}{dz} \vec{e}_z = -\left( \frac{d\varphi}{dx} \vec{e}_x + \frac{d\varphi}{dy} \vec{e}_y + \frac{d\varphi}{dz} \vec{e}_z \right). \quad (2.24)$$

Выражение в скобках есть не что иное, как  $\text{grad } \varphi$ . Окончательно получаем:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi. \quad (2.25)$$

Напряженность поля  $\vec{E}$  равна градиенту потенциала, взятому со знаком минус. Знак минус показывает, что вектор напряженности  $\vec{E}$  направлен в сторону убывания потенциала.

В случае радиально-симметричного поля выражение (2.25) принимает вид

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (2.26)$$

Для графического изображения распределения потенциала используются *эквипотенциальные поверхности* – поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение, т. е.

$$\varphi = \text{const}. \quad (2.27)$$

На рис. 2.2 представлены эквипотенциальные поверхности. В некоторой точке  $A$  указаны направления векторов  $\text{grad} \varphi$  и  $\vec{E}$ .

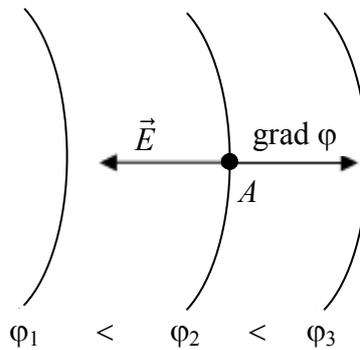


Рис. 2.2

В соответствии с определением градиента он направлен в сторону быстрого возрастания  $\varphi$ , т. е. по перпендикуляру к касательной в точке  $A$  к эквипотенциальной линии  $\varphi_2$  в сторону  $\varphi_3$ . Из формулы связи  $\vec{E}$  и  $\varphi$  следует, что вектор  $\vec{E}$  направлен в противоположную сторону.

Связь напряженности поля с потенциалом позволяет доказать, что силовые линии всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

На рис. 2.3 изображены силовые линии и эквипотенциальные поверхности различных полей: точечного заряда (рис. 2.3, *а*), диполя (рис. 2.3, *б*). Сплошными линиями показаны силовые линии поля, пунктиром – сечения эквипотенциальных поверхностей.

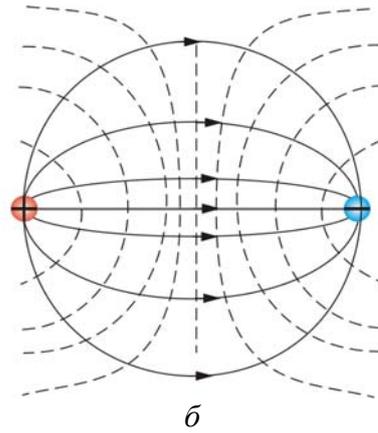
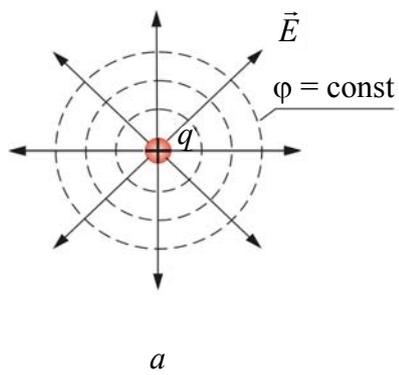


Рис. 2.3

Воспользуемся соотношением (2.26). Возьмем перемещение  $dr$  вдоль эквипотенциальной поверхности. Так как в каждой точке такой поверхности  $\varphi = \text{const}$ , то  $d\varphi = 0$ . Следовательно,  $E_r = 0$ , что возможно только, если  $\vec{E} \perp d\vec{r}$ . Таким образом, силовые линии перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ (продолжение)

8. Поток вектора напряженности электростатического поля.
9. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме.
10. Применение теоремы Гаусса к расчету полей.
11. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме.

### 8. Поток вектора напряженности электростатического поля

Для графического изображения электростатического поля густота линий выбирается таким образом, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной линиям площадки, было равно числовому значению вектора напряженности.

Рассмотрим элементарную площадку  $dS$ , которую пронизывает число линий  $dN$  (рис. 3.1).

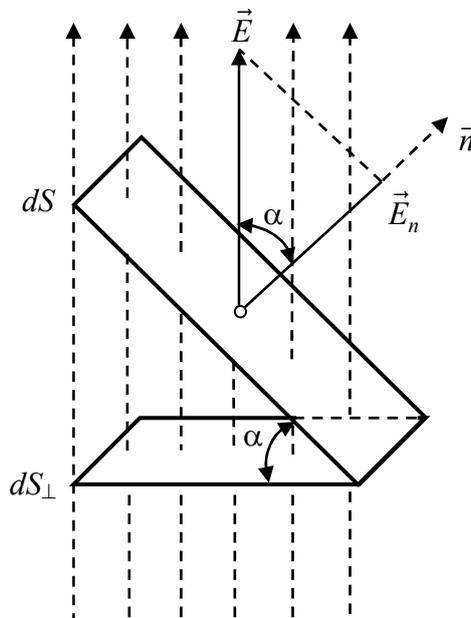


Рис. 3.1

Элементарным (бесконечно малым) потоком вектора напряженности  $\vec{E}$  сквозь бесконечно малую площадь  $dS$  называют величину

$$d\Phi = dN = E_n dS = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS \cos \alpha, \quad (3.1)$$

где  $d\vec{S} = \vec{n} dS$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление вектора совпадает с направлением внешней нормали  $\vec{n}$  к площадке (рис. 3.1).

Поток вектора  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$ :

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (3.2)$$

### 9. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме

Рассмотрим поле точечного заряда  $q$  ( $q > 0$ ) и вычислим поток вектора напряженности через сферу радиуса  $r$ , в центре которой находится заряд  $q$  (рис. 3.2). В этом случае вектор  $\vec{E}$  в любой точке выбранной сферической поверхности будет перпендикулярным поверхности и одинаковым по модулю:  $E_n = E = \text{const}$ .

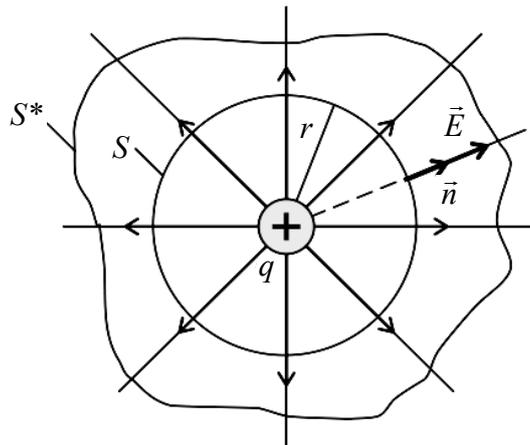


Рис. 3.2

Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность  $S$  (полное число линий, пересекающих данную поверхность  $S$ ):

$$\Phi = N = \oint_S E_n dS = E \oint_S dS = ES. \quad (3.3)$$

Таким образом, поток  $\Phi$  вектора напряженности  $\vec{E}$  через сферическую поверхность будет равен произведению модуля вектора напряженности  $E$  на площадь сферы  $S = 4\pi r^2$ .

Принимая во внимание формулу для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом в вакууме,  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ , найдем

$$\Phi = N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.4) следует, что число линий, пересекающих сферическую поверхность  $S$ , на любом расстоянии от заряда будет одним и тем же. Полученный результат также справедлив и для замкнутой поверхности  $S^*$  произвольной формы, охватывающей заряд  $q$  (рис. 3.2), поскольку каждая линия напряженности, пронизывающая сферу  $S$ , пройдет и сквозь поверхность  $S^*$ .

Если замкнутая поверхность  $S$  не охватывает точечный заряд  $q$ , то поток  $\Phi = 0$  (рис. 3.3), так как общее количество линий напряженности, входящих внутрь поверхности  $S$ , будет равно количеству линий, выходящих из нее.

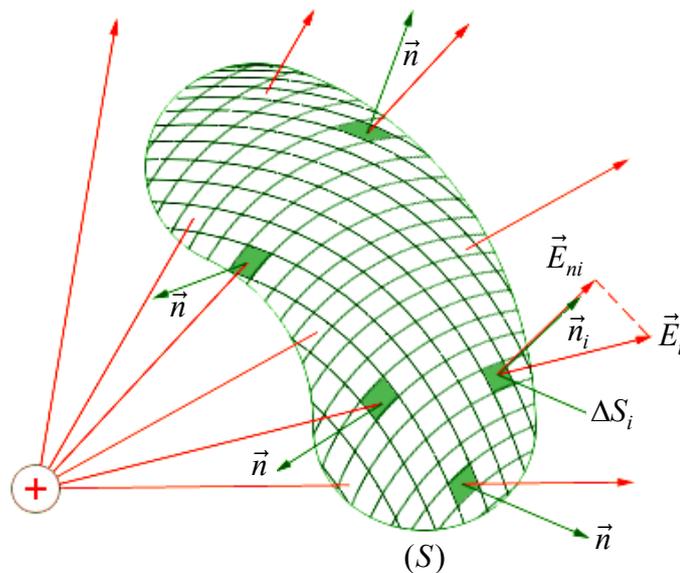


Рис. 3.3

Таким образом, поток вектора напряженности поля точечного заряда  $q$  сквозь любую замкнутую поверхность  $S$  равен заряду  $q/\epsilon_0$ , если эта поверхность охватывает заряд, и равен нулю, если поверхность не охватывает заряд – *теорема Гаусса для поля точечного заряда*:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0}, \\ 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Допустим, что внутри замкнутой поверхности  $S$  находится  $n$  точечных зарядов:  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . В силу принципа суперпозиции (1.10) поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность в этом случае равен сумме потоков  $\Phi_i$ , создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \int_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \Phi_i. \quad (3.6)$$

Принимая во внимание выражение (3.5) для  $\Phi_i$ , запишем формулу (3.6) в следующем виде:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^n q_i = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (3.7)$$

где  $q = \sum_{i=0}^n q_i$  – полный заряд, охватываемый поверхностью  $S$ .

Соотношение (3.7) выражает *теорему Гаусса в интегральной форме*: поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ .

Если заряженное тело нельзя назвать точечным, то вводят понятие *распределенного заряда*. Распределенный заряд характеризуется следующими величинами:

1) если заряд распределен по объему тела  $V$ , то для его характеристики используют объемную (пространственную) плотность заряда  $\rho$ :

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV \Rightarrow q = \int_V \rho dV; \quad (3.8)$$

2) если заряд распределен по поверхности тела площадью  $S$ , то для его характеристики используют поверхностную плотность заряда  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma dS \Rightarrow q = \int_S \sigma dS; \quad (3.9)$$

3) если заряд распределен по длине тела  $l$ , то для его характеристики используют линейную плотность заряда  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl \Rightarrow q = \int_l \lambda dl. \quad (3.10)$$

## 10. Применение теоремы Гаусса к расчету полей

Используя теорему Гаусса, можно в ряде случаев легко вычислить напряженность электрического поля вокруг заряженного тела, если заданное распределение зарядов обладает какой-либо симметрией и общую структуру поля можно заранее угадать.

Вычислим поле *равномерно заряженного с линейной плотностью заряда  $\lambda$  бесконечно полого тонкостенного цилиндра радиуса  $R$ .*

Цилиндр имеет осевую симметрию. Из соображений симметрии электрическое поле должно быть направлено по радиусу. Поэтому для применения теоремы Гаусса целесообразно выбрать замкнутую поверхность  $S$  в виде соосного цилиндра некоторого радиуса  $r$  и длины  $l$ , закрытого с обоих торцов (рис. 3.4).

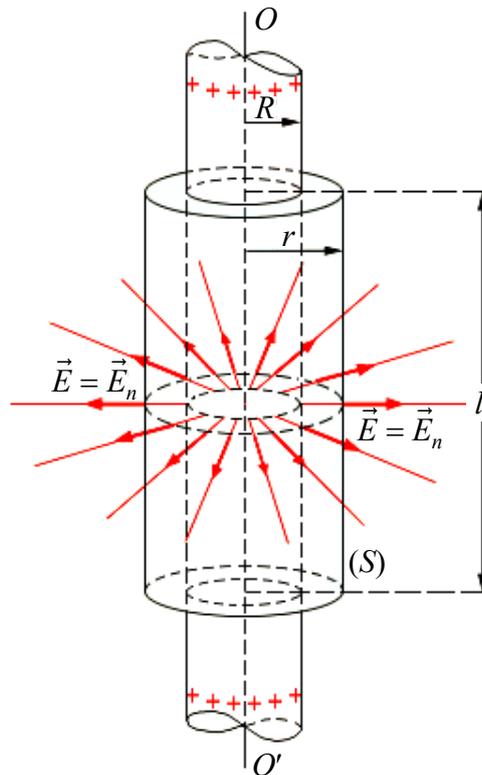


Рис. 3.4

При  $r \geq R$  весь поток вектора напряженности будет проходить через боковую поверхность цилиндра, площадь которой равна  $2\pi r l$ , так как поток через оба основания равен нулю.

Применение теоремы Гаусса дает выражение

$$\Phi = E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}, \quad (3.11)$$

где  $\lambda$  – заряд единицы длины цилиндра.

Отсюда

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.12)$$

Этот результат не зависит от радиуса  $R$  заряженного цилиндра, поэтому он применим и к *полю бесконечной однородно заряженной нити*.

Для определения напряженности поля внутри заряженного цилиндра нужно построить замкнутую поверхность для случая  $r < R$ . В силу симметрии задачи поток вектора напряженности через боковую поверхность гауссова цилиндра должен быть и в этом случае равен  $\Phi = E2\pi rl$ . Согласно теореме Гаусса, этот поток пропорционален заряду, оказавшемуся внутри замкнутой поверхности. Данный заряд равен нулю. Отсюда следует, что *электрическое поле внутри однородно заряженного бесконечного полого цилиндра равно нулю*.

Вычислим *поле равномерно заряженной сферы с поверхностной плотностью  $+\sigma$  радиуса  $R$* .

Поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса  $R$ , заряженной равномерно зарядом  $q$ , является центрально-симметричным: направление вектора  $\vec{E}$  в любой точке проходит через центр сферы, а его модуль зависит только от расстояния  $r$  до центра сферы. В качестве замкнутой поверхности, охватывающей заряд на сфере, следует выбрать концентрическую сферу (рис. 3.5).

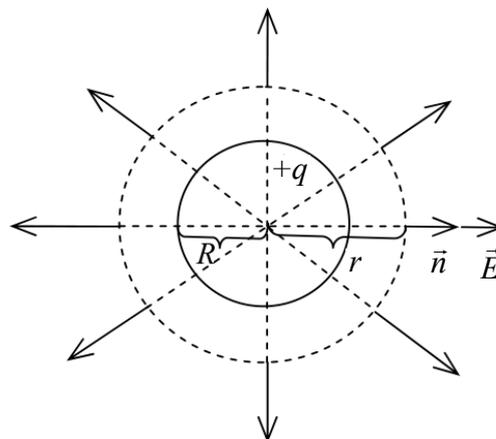


Рис. 3.5

Пусть ее радиус  $r > R$ , тогда поток вектора напряженности сквозь выбранную замкнутую поверхность

$$\Phi = \oint_S E_n dS = E_n S = E_n 4\pi r^2, \quad (3.13)$$

где  $S = 4\pi r^2$  – площадь поверхности сферы.

Применяя теорему Гаусса, найдем проекцию вектора  $\vec{E}$  на нормаль к поверхности:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (3.14)$$

С учетом формулы (3.9) получаем:

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}. \quad (3.15)$$

Знак заряда  $q$  в формуле (3.14) определяет знак проекции  $E_n$ , а следовательно, и направление самого вектора  $\vec{E}$ : от заряженной сферы (при  $q > 0$ ) или к ней (при  $q < 0$ ). Согласно формуле (3.14), вне заряженной поверхности напряженность поля убывает с расстоянием  $r$  по такому же закону, как у точечного заряда.

Если  $r < R$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в данной области всюду  $E = 0$ , т. е. внутри заряженной поверхности электрическое поле отсутствует.

Графическая зависимость напряженности  $E$  электростатического поля равномерно заряженной сферы от расстояния  $r$  представлена на рис. 3.6.

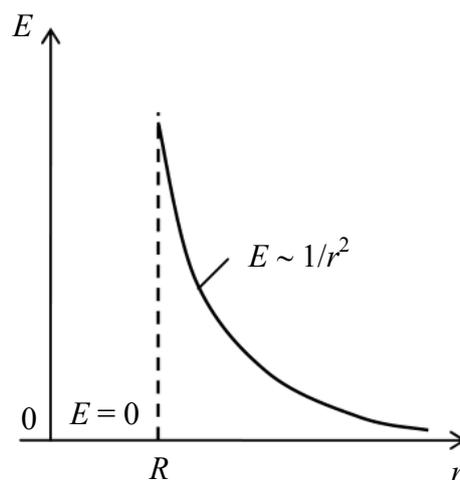


Рис. 3.6

Аналогичным образом можно применить теорему Гаусса для определения электрического поля в ряде других случаев, когда распределение зарядов обладает какой-либо симметрией, например симметрией относительно центра, плоскости или оси.

### 11. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме

Запишем теорему Гаусса в дифференциальной форме. Для этого представим заряд  $q$  в объеме  $V$ , охватываемом замкнутой поверхностью  $S$ , как  $q = \langle \rho \rangle V$ , где  $\langle \rho \rangle$  – среднее по объему  $V$  значение объемной плотности заряда. Подставим это в уравнение (3.7) и разделим обе его части на объем  $V$ . В результате получим:

$$\frac{\Phi}{V} = \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}. \quad (3.16)$$

Затем устремим объем  $V$  к нулю, стягивая его к интересующей нас точке поля. При этом среднее значение  $\langle \rho \rangle$  будет стремиться к значению  $\rho$  в данной точке поля. Величину, являющуюся пределом отношения потока  $\Phi$  к объему  $V$  при  $V \rightarrow 0$ , называют *дивергенцией* вектора  $\vec{E}$  и обозначают  $\text{div } \vec{E}$ .

Таким образом, по определению

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V}. \quad (3.17)$$

Следовательно, дивергенция вектора  $\vec{E}$  связана с плотностью заряда в той же точке уравнением

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) выражает *теорему Гаусса в дифференциальной форме*.

Согласно формуле (3.17), дивергенция вектора характеризует поток данного поля через поверхность достаточно малой окрестности точки поля. В тех точках поля, где дивергенция вектора  $\vec{E}$  положительна, мы имеем источники поля (положительные заряды), а в тех точках, где она отрицательна, – стоки (отрицательные заряды). Силовые линии вектора  $\vec{E}$  выходят из источников поля, а заканчиваются в местах стоков.

## **ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ (окончание)**

- 12. Электрическая энергия системы зарядов.
- 13. Электрический диполь. Электрическое поле диполя. Напряженность и потенциал поля диполя.
- 14. Диполь во внешних однородном и неоднородном электростатических полях.
- 15. Энергия диполя во внешнем электростатическом поле.

### **12. Электрическая энергия системы зарядов**

Найдем потенциальную энергию системы двух неподвижных точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга. Каждый из этих зарядов обладает энергией в поле другого заряда, которая определяется соотношением (2.10):

$$W_1 = q_1 \varphi_{12}; \quad W_2 = q_2 \varphi_{21}, \quad (4.1)$$

где  $\varphi_{12}$  – потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в точке нахождения заряда  $q_1$ ;  $\varphi_{21}$  – потенциал, создаваемый зарядом  $q_1$  в точке нахождения заряда  $q_2$ .

Так как заряды точечные, их потенциалы имеют вид (2.11):

$$\varphi_{12} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad \varphi_{21} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.2)$$

Подставив выражения (4.2) в (4.1), получим, что потенциальные энергии  $W_1$  и  $W_2$  равны между собой. Потенциальная энергия взаимодействия зарядов  $W$  численно равна энергии каждого заряда, находящегося в поле другого заряда:

$$W = W_1 = W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.3)$$

Поскольку оба заряда входят в эту формулу симметрично, ее целесообразно записать в виде

$$W = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_{12} + q_2 \varphi_{21}). \quad (4.4)$$

Формула (4.4) обобщается на случай системы, состоящей из  $n$  неподвижных точечных зарядов. *Потенциальная энергия взаимодействия системы зарядов* равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (4.5)$$

где  $\varphi_i$  – потенциал в точке нахождения заряда  $q_i$ , созданный всеми другими зарядами.

### 13. Электрический диполь. Электрическое поле диполя. Напряженность и потенциал поля диполя

*Электрический диполь* – это система из двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов  $+q$  и  $-q$  ( $q > 0$ ), находящихся на некотором расстоянии  $l$  друг от друга.

Прямая, проходящая через оба заряда, называется *осью диполя*.

Вектор  $\vec{l}$ , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между зарядами, называется *плечом диполя* (рис. 4.1).

Важной характеристикой электрического диполя является так называемый *дипольный момент*, или *электрический момент диполя*,  $\vec{p}$  (рис. 4.1):

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (4.6)$$

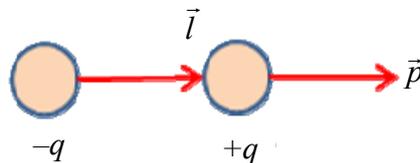


Рис. 4.1

На рис. 4.2 изображена картина силовых линий *поля электрического диполя* с указанием вектора напряженности  $\vec{E}$  поля диполя в некоторой точке, полученного с помощью применения принципа суперпозиции полей.

Найдем сначала потенциал поля диполя, а затем его напряженность. Согласно принципу суперпозиции (2.18), потенциал поля диполя в точке  $A$  (рис. 4.3) определяется соотношением

$$\varphi_{\text{дип}} = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right). \quad (4.7)$$

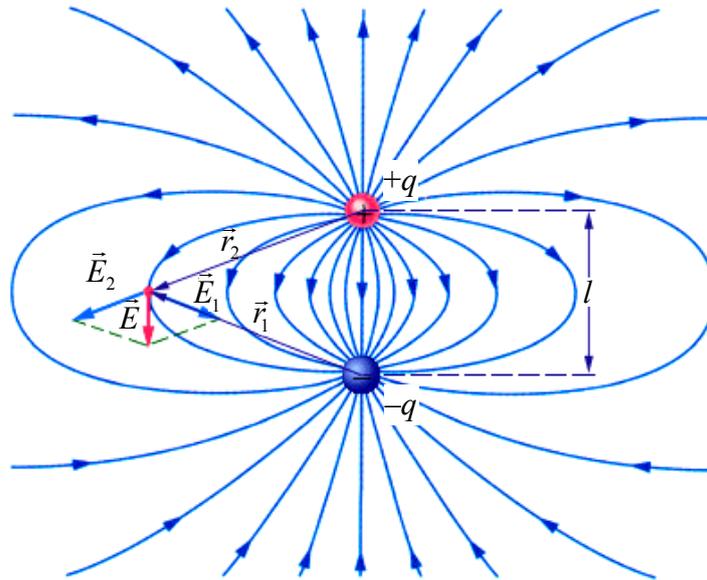


Рис. 4.2

Пусть точка  $A$  выбрана так, что длина  $l$  намного меньше расстояний  $r_1$  и  $r_2$ . В этом случае можно положить, что  $r_1 - r_2 = l \cos \theta$ ;  $r_1 r_2 \approx r^2$ , и формулу для *потенциала поля диполя*  $\Phi_{\text{дип}}$  (4.7) можно переписать:

$$\Phi_{\text{дип}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{r^2}, \quad (4.8)$$

где  $\theta$  – угол между осью диполя и направлением к точке  $A$ , проведенным от диполя.

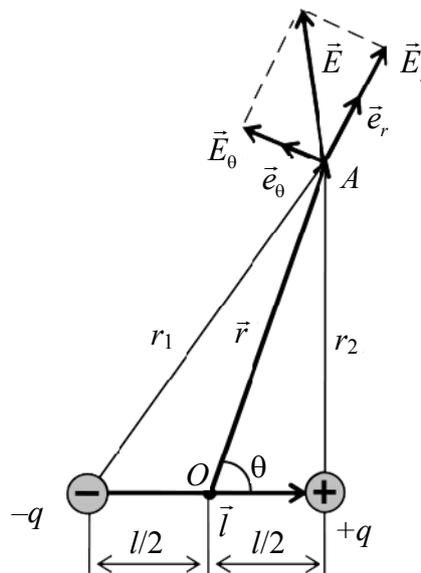


Рис. 4.3

Перепишем соотношение (4.8) с учетом формулы (4.6):

$$\Phi_{\text{дип}} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4.9)$$

Следовательно, потенциал поля диполя пропорционален дипольному моменту  $p$ , косинусу угла  $\theta$  между осью диполя и направлением к рассматриваемой точке и обратно пропорционален квадрату расстояния от диполя до рассматриваемой точки, т. е. потенциал диполя убывает быстрее с расстоянием, чем потенциал точечного заряда  $\left(\sim \frac{1}{r}\right)$ .

Вычислим напряженность поля диполя, применяя соотношение (2.25). Для этого воспользуемся выражением градиента в полярной системе координат:

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right) = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta, \quad (4.10)$$

где  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_r$  – орты полярной системы координат;

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_e}{r^2}\cos\theta\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p_e}{r^3}\cos\theta; \quad (4.11)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_e}{r^2}\cos\theta\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_e}{r^3}\sin\theta. \quad (4.12)$$

Так как составляющие  $\vec{E}_r$  и  $\vec{E}_\theta$  взаимно перпендикулярны, то модуль напряженности  $E$  поля диполя находим следующим образом:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_e}{r^3}\right)^2 (4\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_e}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \quad (4.13)$$

Из формул (4.13) и (4.9) следует, что напряженность и потенциал электростатического поля в точке, лежащей на оси диполя (рис. 4.4), при  $\theta = 0$  и при  $\theta = 180^\circ$  определяются соотношениями:

$$E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \Phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4.14)$$

В этом случае напряженность и потенциал поля будут максимальными для выбранного расстояния  $r$ .

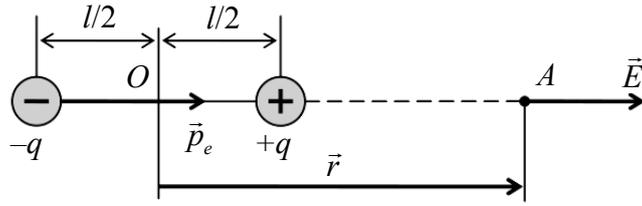


Рис. 4.4

При вычислении напряженности и потенциала электростатического поля в точке, лежащей на серединном перпендикуляре к оси диполя,  $\theta = 90^\circ$  и

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \varphi = 0. \quad (4.15)$$

#### 14. Диполь во внешних однородном и неоднородном электростатических полях

Рассмотрим в системе центра масс, как ведет себя диполь в *однородном электрическом поле*. Образующие диполь заряды  $+q$  и  $-q$  окажутся под действием равных по величине, но противоположных по направлению пары сил  $\vec{F}_+$  и  $\vec{F}_-$  (рис. 4.5).

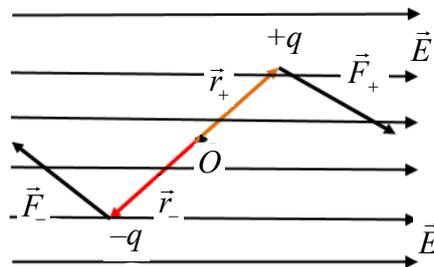


Рис. 4.5

Момент пары сил, действующих на диполь:

$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \vec{r}_+ \times q\vec{E}_+ - \vec{r}_- \times q\vec{E}_-. \quad (4.16)$$

Для достаточно малого плеча диполя  $\vec{E}_+ \approx \vec{E}_-$ . Тогда

$$\vec{M} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times q\vec{E} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (4.17)$$

Момент сил стремится развернуть диполь так, чтобы его дипольный момент  $\vec{p}$  установился по направлению внешнего поля. Такое положение диполя является устойчивым.

Рассмотрим диполь, находящийся в *неоднородном поле*, обладающем симметрией относительно оси  $OX$ .

Пусть центр диполя лежит на этой оси, причем электрический момент диполя образует с осью угол  $\alpha$ , отличный от  $\pi/2$  (рис. 4.6). В этом случае силы, действующие на заряды диполя, не одинаковы по величине ( $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$ ).

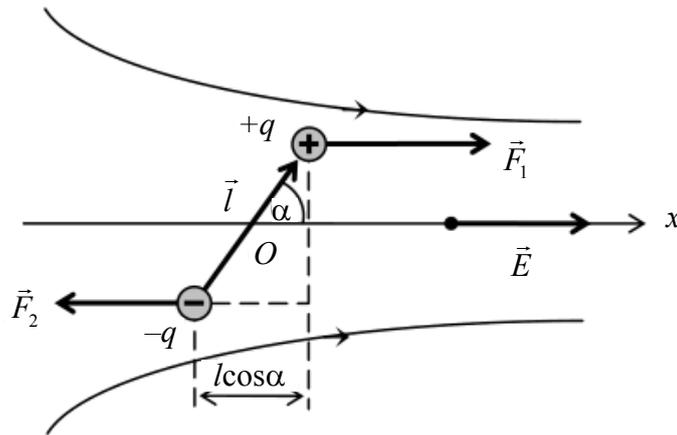


Рис. 4.6

Поэтому кроме вращательного момента, стремящегося развернуть диполь по направлению внешнего поля, на диполь будет действовать сила, стремящаяся переместить его в направлении оси  $OX$ , т. е. передвинуть диполь в область поля с большей напряженностью.

Эта сила

$$F_x = F_1 - F_2 = qE_+ - qE_- = q(E_+ - E_-), \quad (4.18)$$

где  $E_+$  и  $E_-$  – значения напряженности внешнего поля в тех точках, в которых находятся заряды  $+q$  и  $-q$ .

$$E_+ - E_- = \frac{dE}{dx} \Delta x = \frac{dE}{dx} l \cos \alpha. \quad (4.19)$$

Подставим выражение (4.19) в формулу (4.18) и получим, что сила, втягивающая диполь в область поля с большей напряженностью:

$$F_x = q \frac{dE}{dx} l \cos \alpha = p_e \frac{dE}{dx} \cos \alpha. \quad (4.20)$$

Если  $\alpha < 90^\circ$ , то величина  $F_x$  положительна. Это означает, что под действием силы диполь втягивается в область более сильного поля (рис. 4.6). При  $\alpha > 90^\circ$  диполь выталкивается из поля.

## 15. Энергия диполя во внешнем электростатическом поле

Найдем потенциальную энергию, которой обладает диполь во внешнем электрическом поле (рис. 4.7).

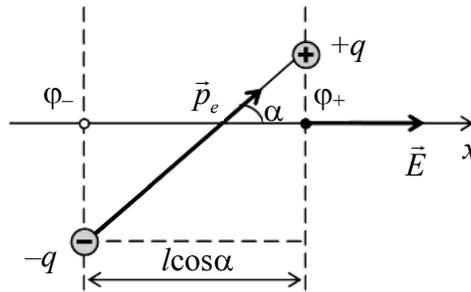


Рис. 4.7

Когда дипольный момент диполя устанавливается по направлению внешнего поля, то в этом положении диполь имеет минимальную энергию (см. формулу (4.4)):

$$W = q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-), \quad (4.21)$$

где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  – значения потенциалов внешнего поля в точках, в которых находятся заряды  $+q$  и  $-q$ :

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx} l \cos \alpha. \quad (4.22)$$

Подставив соотношение (4.22) в выражение (4.21) и учитывая формулу (2.23), получим:

$$W = q \frac{d\varphi}{dx} l \cos \alpha = -qEl \cos \alpha = -pE \cos \alpha. \quad (4.23)$$

В результате данное выражение можно записать в виде

$$W = -q\vec{E} \cdot \vec{l} = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (4.24)$$

Из этой формулы следует, что минимальную энергию ( $W_{\min} = -pE$ ) диполь имеет в положении  $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$ . Следовательно, оно соответствует положению устойчивого равновесия. При отклонении из этого положения возникает момент внешних сил, возвращающий диполь к положению равновесия.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

1. Свободные и связанные заряды в веществе. Типы диэлектриков.
2. Поляризация диэлектриков, виды поляризации.
3. Поляризованность полярных и неполярных диэлектриков.
4. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения.
5. Диэлектрическая проницаемость среды.
6. Условия на границе раздела двух изотропных диэлектриков.

### 1. Свободные и связанные заряды в веществе. Типы диэлектриков

Все известные в природе вещества, в соответствии с их способностью проводить электрический ток, делятся на три основных класса: 1) диэлектрики (*удельное сопротивление*  $\rho_d = 10^8 - 10^{18}$  Ом · м); 2) полупроводники ( $\rho_d > \rho_{п/п} > \rho_{пр}$ ); 3) проводники ( $\rho_{пр} = 10^{-6} - 10^{-8}$  Ом · м).

Характерным признаком проводников является наличие в них *свободных носителей заряда (свободных зарядов)*, которыми являются электроны в металлах, ионы в электролитах, электроны и ионы в ионизованных газах и плазме, способных перемещаться по проводникам под действием электрического поля. Поэтому проводники проводят электрический ток. Свободные заряды могут находиться также и вне диэлектрика.

Диэлектриками (или *изоляторами*) называются вещества, практически не проводящие электрический ток. Это значит, что в диэлектриках, в отличие от проводников, нет свободных зарядов, способных перемещаться на значительные расстояния, создавая ток. К диэлектрикам относятся воздух и другие газы, стекла, различные смолы, пластмассы, многие виды резины.

Диэлектрики состоят либо из нейтральных молекул, либо из заряженных ионов, находящихся в узлах кристаллической решетки (ионные кристаллы, например NaCl, KCl и др.). Заряды, которые входят в состав нейтральных атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой называют *связанными зарядами*. Таким термином подчеркивается, что свобода перемещения связанных зарядов ограничена. Они могут смещаться лишь внутри электрически нейтральных молекул.

В состав молекул входят заряженные частицы. Положительный заряд сосредоточен в ядрах атомов, а отрицательный – в электронных оболочках атомов и молекул. Так как положительные и отрицательные заряды расположены в различных точках пространства в молекуле, они могут обладать электрическим дипольным моментом.

Различают *полярные* и *неполярные диэлектрики*, а также *ионно-кристаллические диэлектрики*.

*Неполярные диэлектрики* ( $N_2$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ ) – вещества, молекулы которых имеют симметричное строение, т. е. центры «сосредоточения» положительных и отрицательных зарядов (центры тяжести зарядов разных знаков) в отсутствие внешнего электрического поля совпадают, и дипольный момент этих молекул в этом случае равен нулю. Молекулы таких диэлектриков называются неполярными.

*Полярные диэлектрики* ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $SO_2$ ,  $CO$ ) – вещества, молекулы которых имеют асимметричное строение, т. е. центр тяжести отрицательных зарядов сдвинут относительно центра тяжести положительных зарядов, и эти молекулы обладают дипольным моментом. Собственный дипольный момент молекул имеет порядок  $10^{-29}$ – $10^{-30}$  Кл · м. Молекулы таких диэлектриков называются полярными.

*Ионно-кристаллические диэлектрики* ( $NaCl$ ,  $KCl$ ,  $KBr$ ) – вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать их можно как систему двух вставленных одна в другую ионных подрешеток противоположных знаков.

## 2. Поляризация диэлектриков, виды поляризации

При внесении диэлектрика, состоящего из неполярных молекул, в электрическое поле происходит смещение зарядов в пределах молекулы: положительных – по полю, отрицательных – против поля (рис. 5.1). Молекулы приобретают дипольный момент.

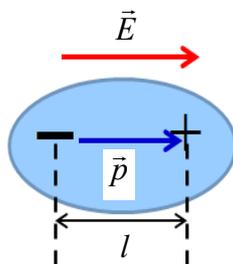


Рис. 5.1

Возникающий у молекулы дипольный момент прямо пропорционален напряженности внешнего поля:

$$\vec{p}_e = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}, \quad (5.1)$$

где  $\alpha = 4\pi r^3$  – *поляризуемость молекулы*, м<sup>3</sup>;  $r$  – радиус молекулы.

Диполи, возникающие при «деформации» атомов и молекул во внешнем поле, называются *квазиупругими диполями*. Поляризуемость молекулы определяется ее внутренними свойствами и существенно не зависит от плотности вещества и температуры.

Такой вид поляризации называется *электронной поляризацией*. На противоположных гранях диэлектрика появляются заряды противоположных знаков (*поляризационные заряды*), и диэлектрик поляризуется (рис. 5.2).

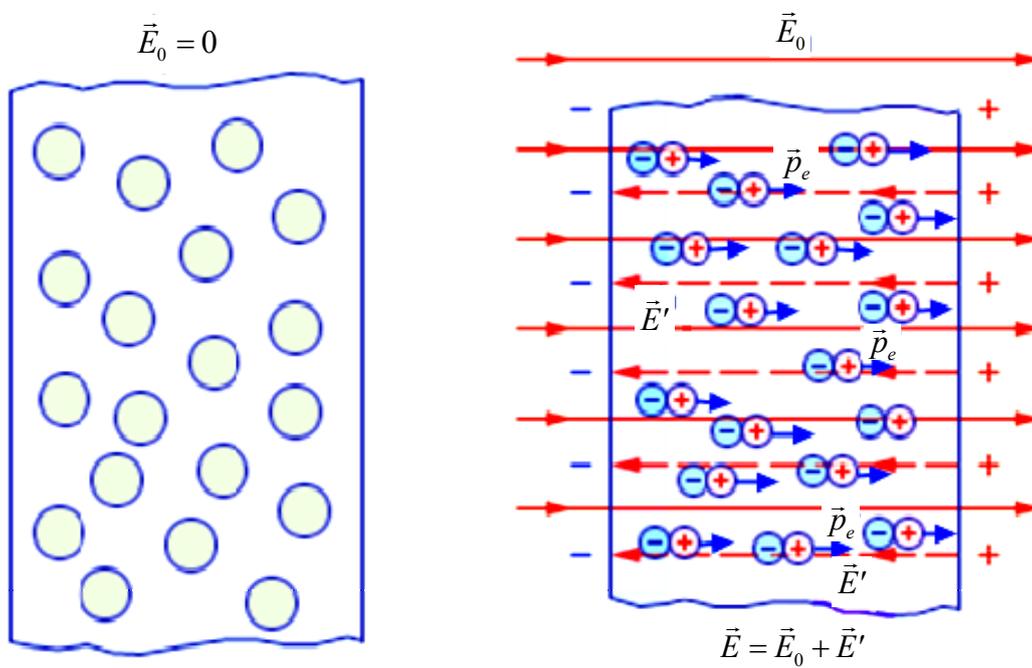


Рис. 5.2

В результате суммарная напряженность поля внутри диэлектрика:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad (5.2)$$

где  $\vec{E}_0$  – напряженность внешнего поля;  $\vec{E}'$  – напряженность поля, создаваемого поляризационными зарядами диэлектрика.

Полярные молекулы имеют дипольный момент  $\vec{p}_e$ . В отсутствие внешнего поля благодаря тепловому движению дипольные моменты

расположены беспорядочно (рис. 5.3, *а*). Под действием поля дипольные моменты всех молекул повернутся так, что их оси расположатся приблизительно вдоль направления внешнего поля (рис. 5.3, *б*).

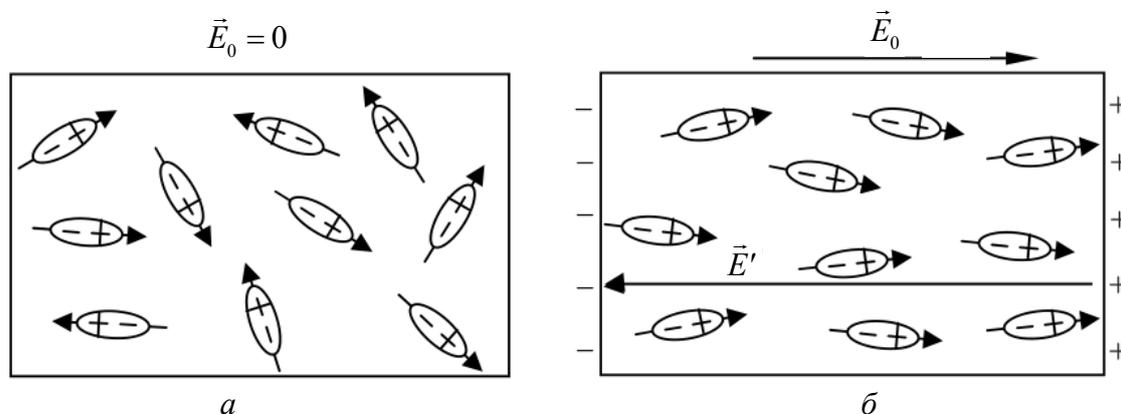


Рис. 5.3

Несмотря на то, что тепловое движение молекул препятствует строгой ориентации их дипольных моментов, в результате преимущественной ориентации дипольных моментов молекул вдоль поля на противоположных гранях возникают поляризационные заряды разных знаков, тогда как внутри диэлектрика заряды разных знаков в среднем скомпенсированы. Такого рода поляризация называется *ориентационной* (или *дипольной*) *поляризацией*.

Ионно-кристаллические диэлектрики имеют кристаллическую решетку, построенную из положительных и отрицательных ионов, которую можно рассматривать как две вставленные друг в друга решетки, одна из которых образована положительными, а другая отрицательными ионами. При отсутствии внешнего поля подрешетки располагаются таким образом, что электрический дипольный момент кристаллов равен нулю (рис. 5.4, *а*).

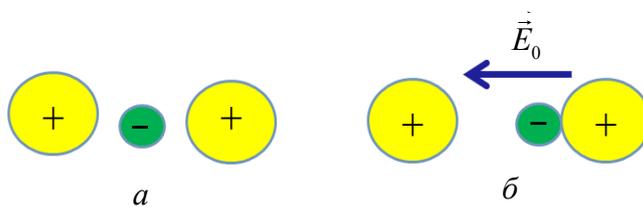


Рис. 5.4

При включении поля подрешетки сдвигаются друг относительно друга, и кристалл приобретает дипольный момент (рис. 5.4, *б*). Такой вид поляризации называется *ионной решеточной*.

### 3. Поляризованность полярных и неполярных диэлектриков

Для количественного описания поляризации диэлектрика используют дипольный момент единицы объема – *вектор поляризации (поляризованность)*:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i, \quad (5.3)$$

где  $\Delta V$  – малый объем диэлектрика;  $\vec{p}_i$  – дипольный момент молекулы, находящейся в данном объеме.

Единицей измерения поляризованности в СИ является кулон на квадратный метр:  $[P] = \text{Кл/м}^2$ .

Пусть в объеме  $V$  содержится  $N$  молекул. Тогда поляризованность можно представить в виде

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i = \frac{N}{\Delta V} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{N} = n \langle \vec{p} \rangle, \quad (5.4)$$

где  $n = N / \Delta V$  – концентрация молекул;  $\langle \vec{p} \rangle$  – средний дипольный момент одной молекулы.

Если диэлектрик изотропный, т. е. его свойства одинаковы по всем направлениям, и величина напряженности поля невелика, то поляризованность  $\vec{P}$  линейно зависит от напряженности поля  $\vec{E}$  в диэлектрике:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \varkappa \vec{E}, \quad (5.5)$$

где  $\varkappa$  – безразмерная величина, называемая *диэлектрической восприимчивостью вещества*, которая не зависит от  $\vec{E}$ , характеризует свойства самого диэлектрика и всегда больше нуля ( $\varkappa > 0$ ).

Диэлектрическая восприимчивость *неполярного (газообразного) диэлектрика*:

$$\varkappa = \alpha n, \quad (5.6)$$

где  $\alpha$  – *поляризуемость одной молекулы*, которая показывает, насколько легко индуцировать электрическим полем дипольный момент у атома.

В случае *жидких и кристаллических неполярных диэлектриков* следует учитывать взаимодействие между атомами и молекулами. В результате зависимость  $\varkappa$  от  $\alpha$  и  $n$  становится нелинейной, ее можно выразить формулой *Клаузиуса – Моссотти*:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon + 3} = \frac{1}{3} n\alpha. \quad (5.7)$$

Диэлектрическая восприимчивость *жидких и газообразных диэлектриков, состоящих из полярных молекул*, определяется по формуле

$$\epsilon = \frac{np^2}{3\epsilon_0 kT}, \quad (5.8)$$

где  $p$  – дипольный момент полярной молекулы;  $k$  – постоянная Больцмана.

Диэлектрическая восприимчивость полярного диэлектрика обратно пропорциональна его абсолютной температуре. Такая зависимость от температуры называется *законом Кюри*.

#### 4. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения

Рассмотрим плоскопараллельную пластинку из изотропного диэлектрика, помещенную в однородное электростатическое поле. Под действием поля диэлектрик будет поляризоваться. Выделим в поляризованном диэлектрике элементарный объем  $\Delta V$  в виде наклонной призмы, основания которой выходят на поверхности диэлектрической пластинки (рис. 5.5).

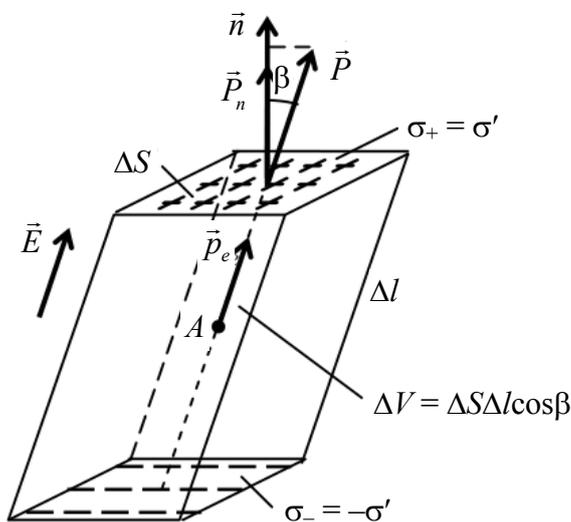


Рис. 5.5

С одной стороны, дипольный момент  $p_e$  выделенного элементарного объема равен произведению поляризованности  $P$  на величину его объема:

$$p_e = \sum_{i=1}^N p_{e_i} = P\Delta V = P\Delta S\Delta l \cos\beta. \quad (5.9)$$

С другой стороны, поверхностные заряды на основаниях призмы образуют электрический диполь. Его дипольный момент

$$p_e = q'l = \sigma'\Delta S\Delta l. \quad (5.10)$$

Сравнив формулы (5.9) и (5.10), получим

$$P\Delta l \cos\beta = \sigma'\Delta l \Rightarrow P \cos\beta = \sigma' \Rightarrow P_n = \sigma', \quad (5.11)$$

т. е. *поверхностная плотность связанных зарядов* некоторой элементарной площадки равна *нормальной составляющей вектора поляризации*.

Внутри диэлектрика на внешнее электрическое поле  $\vec{E}_0$  накладывается дополнительное электрическое поле  $\vec{E}'$  связанных зарядов.

Определим значение избыточного связанного заряда, который возникает при поляризации диэлектрика внутри произвольной заданной замкнутой поверхности  $S$  (рис. 5.6).

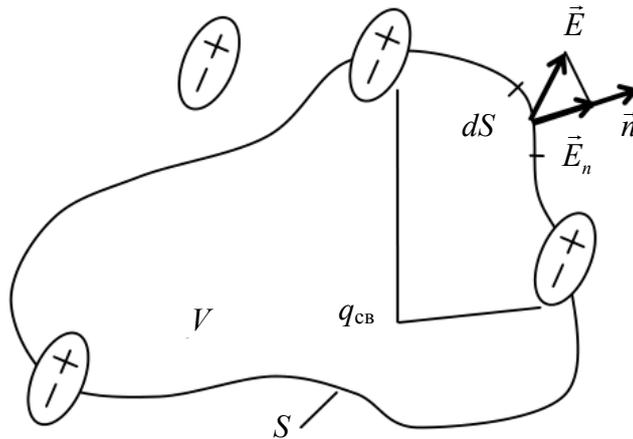


Рис. 5.6

Под действием электрического поля связанные заряды молекул, находящихся вблизи поверхности  $S$ , сместятся так, что их положительные и отрицательные заряды будут находиться по разные стороны поверхности  $S$ . Заряд  $dq'$ , смещенный при поляризации через площадку  $dS$  в направлении нормали, согласно формуле (5.11) равен  $P_n dS$ . Через всю поверхность  $S$  в направлении нормали  $\vec{n}$  будет смещаться заряд

$$q' = \oint_S dq' = \oint_S P_n dS. \quad (5.12)$$

В результате объем  $V$  диэлектрика, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ , приобретет избыточный связанный заряд, равный по значению и противоположный по знаку наружному поверхностному заряду:

$$q_{\text{св}} = -q' = -\oint_S P_n dS = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (5.13)$$

Применим теорему Гаусса (3.7) к замкнутой поверхности  $S$ , добавив при этом к свободным зарядам  $q$  избыточный связанный заряд  $q_{\text{св}}$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q + q_{\text{св}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) \cdot d\vec{S} = q. \quad (5.14)$$

Выражение, стоящее в скобках формулы (5.14), обозначают вектором  $\vec{D}$  и называют *вектором электрического смещения*:

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}. \quad (5.15)$$

Единица измерения в системе СИ  $[D] = \text{Кл/м}^2$ .

Из выражения (5.14) с учетом формулы (5.15) следует:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n dS = q. \quad (5.16)$$

Выражение (5.16) является *теоремой Гаусса для электростатического поля в диэлектрике*: поток вектора смещения электрического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.

Если свободный электрический заряд в правой части теоремы Гаусса для электростатического поля в диэлектрике (5.16) выразить через объемную плотность  $\rho$  заряда ( $\int_V \rho dV = q$ ) и применить к выражению  $\oint_S D_n dS$  теорему Остроградского – Гаусса, то получим:

$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Следовательно,

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (5.17)$$

Уравнение (5.17) называется *теоремой Гаусса для электростатического поля в диэлектрике в дифференциальной форме*.

## 5. Диэлектрическая проницаемость среды

Найдем напряженность поля внутри диэлектрика, имеющего противоположные плоские грани, помещенного между двумя бесконечно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью свободных зарядов  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Было показано выше (рис. 5.2 на с. 37, рис. 5.3 на с. 38), что на противоположных гранях диэлектрика появляются заряды противоположных знаков и диэлектрик поляризуется. Возникшие поляризационные заряды диэлектрика являются связанными и имеют поверхностную плотность  $+\sigma'$  и  $-\sigma'$ . Эти заряженные поверхности образуют поле, напряженность  $\vec{E}'$  которого направлена противоположно внешнему полю  $\vec{E}_0$  (рис. 5.2, 5.3, б). Поэтому результирующее электростатическое поле внутри диэлектрика  $\vec{E}$  уменьшается. В результате с учетом выражения (5.2) получим:

$$E = E_0 - E' < E_0. \quad (5.18)$$

Поле, созданное бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , рассчитывается по теореме Гаусса (см. лекцию № 3, п. 10) по формуле

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (5.19)$$

Следовательно, результирующее электростатическое поле внутри диэлектрика с учетом формул (5.18) и (5.19) определяется выражением

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}. \quad (5.20)$$

В соответствии с формулами (5.11) и (5.5) поверхностную плотность связанных зарядов можно записать:

$$\sigma' = \epsilon_0 \alpha E_n, \quad (5.21)$$

где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  (внутри диэлектрика вблизи от его поверхности) на внешнюю нормаль.

Подставив выражение (5.21) в формулу (5.20), получим:

$$E = E_0 - \alpha E. \quad (5.22)$$

Отсюда напряженность поля в диэлектрике

$$E = \frac{E_0}{1 + \varkappa} = \frac{E_0}{\varepsilon}, \quad (5.23)$$

где  $\varepsilon = 1 + \varkappa$  называют *диэлектрической проницаемостью среды*.

Диэлектрическая проницаемость среды показывает, во сколько раз ослабляется поле в однородном диэлектрике. В отсутствие среды, т. е. в вакууме,  $\varkappa = 0$  и диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1$ .

Так как напряженность электрического поля связана с потенциалом через соотношение (2.25), то потенциал  $\varphi$  во всех точках однородного диэлектрика также уменьшится в  $\varepsilon$  раз:

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\varepsilon}, \quad (5.24)$$

где  $\varphi_0$  – потенциал поля в отсутствие диэлектрика.

С учетом выражений (5.21), (5.15) и (5.5) вектор электрического смещения

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \varkappa)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}. \quad (5.25)$$

Вектор  $\vec{D}$  зависит как от свободных, так и от связанных зарядов (как и вектор  $\vec{E}$ ). Это следует из соотношения (5.25). Однако в некоторых случаях вектор  $\vec{D}$  определяется только свободными зарядами. Для таких случаев использование вектора  $\vec{D}$  значительно упрощает анализ поля при наличии диэлектрика.

## 6. Условия на границе раздела двух изотропных диэлектриков

Выделим контур на границе раздела двух диэлектриков, плоскость которых перпендикулярна границам раздела, стороны контура  $DC$  и  $AB$  параллельны границам и находятся в различных средах (рис. 5.7). Будем стягивать контур к границе так, чтобы длина участков  $AD \rightarrow 0$  и  $BC \rightarrow 0$ .

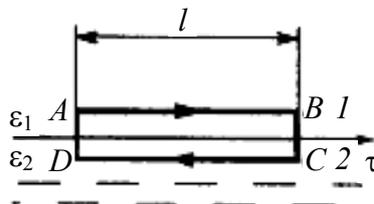


Рис. 5.7

Применим теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$  (выражение (2.4)) по замкнутому контуру  $L$  ( $ABCD$ ):

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{\tau 1} l - E_{\tau 2} l = 0. \quad (5.26)$$

Следовательно, с учетом выражения (5.25) получим:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (5.27)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  одинакова по обе стороны границы раздела, т. е. не претерпевает скачка. Тангенциальная составляющая вектора  $\vec{D}$  при этом испытывает скачок.

Найдем условия для нормальных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ . Воспользуемся теоремой Гаусса для вектора  $\vec{D}$  (5.16). На границе раздела двух диэлектриков построим цилиндр очень малой высоты (рис. 5.8), одно основание которого находится в первом диэлектрике, другое – во втором. Основания цилиндра  $S$  настолько малы, что в пределах каждого из них вектор  $\vec{D}$  одинаков.

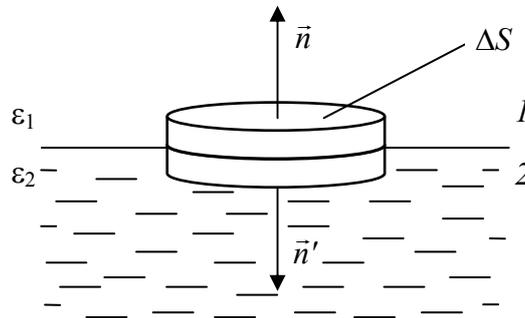


Рис. 5.8

Согласно теореме Гаусса поток вектора  $\vec{D}$  через цилиндр ничтожно малой высоты равен нулю (нет свободных зарядов):

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{2n} S - D_{1n} S = 0. \quad (5.28)$$

Следовательно,

$$D_{2n} = D_{1n}, \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (5.29)$$

В этом случае нормальные составляющие вектора  $\vec{D}$  скачка не испытывают, они оказываются одинаковыми по разные стороны границы раздела. Нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  при этом испытывает скачок.

Полученные условия для составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух диэлектриков означают, что линии данных векторов испытывают на этой границе излом, преломляются (рис. 5.9).

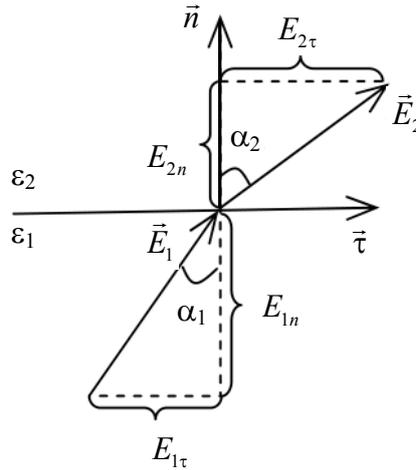


Рис. 5.9

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  связаны соотношением

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2\tau}/E_{2n}}{E_{1\tau}/E_{1n}}. \quad (5.30)$$

Учитывая соотношения (5.27), (5.29), получим закон преломления линий напряженности  $\vec{E}$ , а значит, и линий электрического смещения  $\vec{D}$ :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (5.31)$$

Из формулы (5.31) следует, что в диэлектрике с бóльшим значением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  линии  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  будут составлять больший угол с нормалью к границе раздела (на рис. 5.9  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ).

## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ И ПРОВОДНИКАХ

1. Сегнетоэлектрики. Диэлектрический гистерезис. Температура Кюри.
2. Электреты, пьезоэлектрики, пироэлектрики.
3. Проводники во внешнем электрическом поле. Электростатическая индукция. Распределение зарядов по поверхности заряженного проводника.
4. Напряженность и потенциал электростатического поля внутри и вблизи поверхности заряженного проводника.
5. Экранирование внешнего поля.

### **1. Сегнетоэлектрики. Диэлектрический гистерезис. Температура Кюри**

Сегнетоэлектриками называются полярные диэлектрики, которые в определенном интервале температур спонтанно (самопроизвольно) поляризованы, т. е. обладают поляризованностью при отсутствии внешнего электрического поля. Примерами сегнетоэлектриков являются сегнетова соль (двойная натрий-калиевая соль винной кислоты  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ), от которой и произошло название этого класса диэлектриков, титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ), дигидроортофосфат калия ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ), титанат свинца  $\text{PbTiO}_3$ , ниобат калия  $\text{KNbO}_3$  и др.

Сегнетоэлектрики отличаются от других диэлектриков рядом характерных особенностей.

1. У обычных диэлектриков диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  составляет несколько единиц, как исключение – у воды несколько десятков ( $\epsilon = 81$ ). В сегнетоэлектриках диэлектрическая проницаемость может достигать очень больших значений ( $\epsilon \sim 10^4$ ).

2. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  и диэлектрическая восприимчивость  $\chi$  сегнетоэлектриков зависят от напряженности  $E$  поля в веществе, тогда как в остальных диэлектриках  $\epsilon$  и  $\chi$  являются их характеристиками, не зависящими от  $E$ . Как следствие, в сегнетоэлек-

триках зависимость поляризованности  $P$  и электрического смещения  $D$  от напряженности  $E$  является нелинейной.

3. Для сегнетоэлектриков характерно явление *диэлектрического гистерезиса* (от греч. *hysteresis* – запаздывание). При изменениях поля значения поляризованности  $P$  (а следовательно, и смещения  $D$ ) отстают от напряженности поля  $E$ , в результате чего  $P$  и  $D$  определяются не только величиной  $E$  в данный момент, но и предшествующими значениями, т. е. зависят от предыстории диэлектрика. При циклических изменениях поля зависимость  $P$  от  $E$  изображается кривой (рис. 6.1), называемой *петлей гистерезиса*.

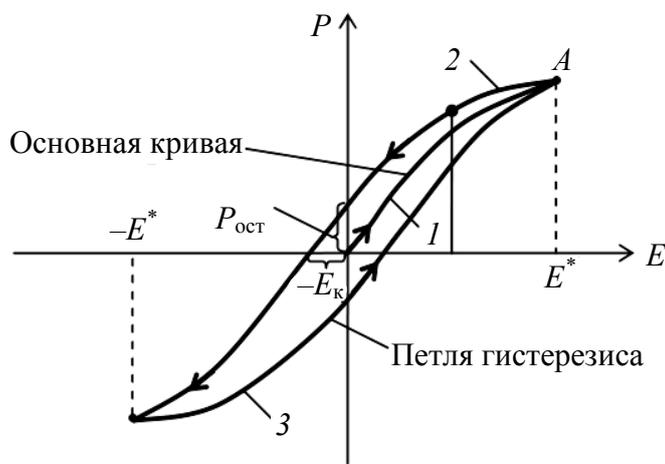


Рис. 6.1

При первоначальном увеличении напряженности поляризованность образца увеличивается по нелинейному закону вдоль линии 1, стремясь в точке A к насыщению (к постоянному значению). Кривая 1 называется *основной кривой поляризации сегнетоэлектрика*. Если затем уменьшать напряженность, то уменьшение поляризованности происходит вдоль линии 2. Когда напряженность  $E = 0$ , поляризованность  $P = P_0 \neq 0$ , т. е. сегнетоэлектрик остается поляризованным. Величину  $P_0$  называют *остаточной поляризованностью*. Чтобы убрать остаточную поляризованность, к образцу надо приложить поле с противоположным направлением напряженности  $E_k$ . Это значение напряженности называют *коэрцитивной силой* (от лат. *coercitio* – удерживание). Дальнейшее уменьшение значения напряженности приводит к возникновению поляризации противоположного направления, а последующее уменьшение модуля  $E$  вновь характеризуется «запаздыванием» в изменении значения  $P$  (кривая 3). В результате периодического

изменения электрического поля  $E$  (от  $-E^*$  до  $E^*$ ) кривые 2, 3 для поляризованности образуют замкнутую линию, которую и называют петлей гистерезиса.

4. Наличие *точки Кюри* – температуры, при которой сегнетоэлектрические свойства исчезают. Например, для титаната бария точка Кюри составляет  $120^\circ\text{C}$ , для ниобата лития –  $1210^\circ\text{C}$ . Сегнетова соль имеет две точки Кюри:  $-15^\circ\text{C}$  и  $+22,5^\circ\text{C}$ .

Экспериментальные и теоретические исследования показали, что поляризация сегнетоэлектриков является следствием взаимодействия всех молекул сегнетоэлектрика, в связи с чем диполи элементарных ячеек кристалла выстраиваются в определенном направлении под действием внутреннего электрического поля, созданного соседними молекулами сегнетоэлектрика. При этом образуются самопроизвольно поляризованные области – *домены*, в пределах которых все диполи ориентированы в одном направлении. Эта спонтанная (самопроизвольная) поляризация соответствует минимуму энергии домена.

При отсутствии внешнего поля дипольные моменты доменов расположены хаотически (рис. 6.2, а), и макроскопический образец сегнетоэлектрика неполяризован ( $P = 0$ ). Если такой сегнетоэлектрик поместить во все возрастающее по модулю внешнее электрическое поле  $E$ , то происходит переориентация доменов, отмечается преимущественное увеличение тех доменов, дипольные моменты которых ориентированы в направлении поля  $E$ , а также уменьшаются размеры доменов с противоположной ориентацией дипольных моментов, происходит изменение объемов и границ между доменами (рис. 6.2, б). В сильных полях наступает явление насыщения, и весь образец представляет собой один макродомен (рис. 6.2, в).

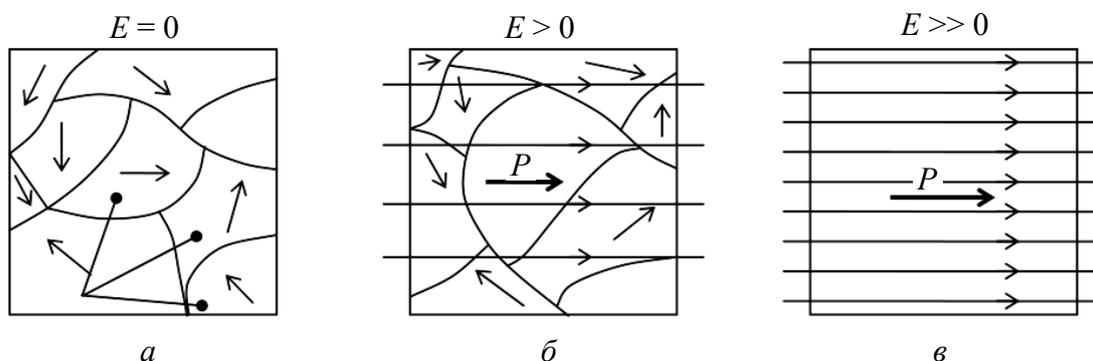


Рис. 6.2

Благодаря сильной зависимости диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  от напряженности  $E$  электрического поля сегнетоэлектрики используют в нелинейных конденсаторах (*варикондах*), которые нашли применение в системах автоматики, контроля и управления. Зависимость показателя преломления от поля обуславливает использование сегнетоэлектриков в качестве электрооптических материалов. Высокие нелинейные свойства позволяют применять вариконды для стабилизации тока и напряжения, умножения частоты, для автоматического бесконтактного дистанционного управления, преобразования синусоидального напряжения в импульсное, усиления электрической мощности и т. д.

## 2. Электреты, пьезоэлектрики, пьезоэлектрики

Среди диэлектриков есть вещества, называемые *электреты*, – диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электростатического поля (аналоги постоянных магнитов). Электреты применяют как источники постоянного электрического поля (электретные микрофоны и телефоны, вибродатчики, генераторы слабых переменных сигналов, электрометры), как чувствительные датчики в устройствах дозиметрии, барометрах, гигрометрах. Фотоэлектреты применяют в электрофотографии.

Некоторые диэлектрики поляризуются не только под действием электрического поля, но и под действием механической деформации (рис. 6.3). В результате на их поверхности появляются электрические заряды обоих знаков (рис. 6.3, б, в). Это явление называется *прямым пьезоэлектрическим эффектом*, а кристаллы называются *пьезоэлектриками*.

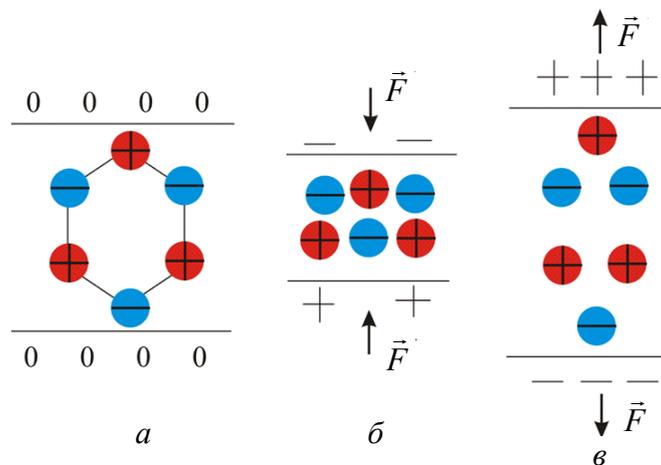


Рис. 6.3

Если на грани кристалла наложить металлические электроды (обкладки), то при деформации кристалла на обкладках возникнет разность потенциалов. Если замкнуть обкладки, то возникнет электрический ток.

К числу пьезоэлектриков относят кварц, турмалин, сегнетову соль, титанат бария и многие другие вещества.

Существует *обратный пьезоэлектрический эффект*. Он состоит в том, что во внешнем электрическом поле пьезоэлектрик будет деформироваться. Механизм обратного пьезоэлектрического эффекта аналогичен механизму прямого: под действием внешнего электрического поля кристаллические подрешетки положительных и отрицательных ионов деформируются различным образом, что и приводит к деформации кристалла. Обратный пьезоэлектрический эффект также имеет практическое применение: в частности, широко используются кварцевые излучатели ультразвука.

В электрических полях деформации наблюдаются абсолютно во всех веществах. Это явление называют *электрострикцией*.

Между обратным пьезоэлектрическим эффектом и электрострикцией есть существенные различия. Электрострикция имеет место для всех диэлектриков при помещении их в неоднородное электрическое поле. Обратный пьезоэлектрический эффект наблюдается только в кристаллах, да и то не во всех. Он существует и в однородном электрическом поле. Силы, возникающие при электрострикции, пропорциональны квадрату напряженности электрического поля. Вследствие этого они не меняются при изменении направления напряженности электрического поля на противоположное. Силы, возникающие при обратном пьезоэлектрическом эффекте, пропорциональны напряженности электрического поля. Они меняют свое направление на противоположное при изменении направления электрического поля.

*Пироэлектричество* – появление электрических зарядов на поверхности некоторых кристаллов при их нагревании или охлаждении. При нагревании один конец диэлектрика заряжается положительно, а при охлаждении он же – отрицательно. Появление зарядов связано с изменением существующей поляризации при изменении температуры кристаллов.

Все пироэлектрики являются пьезоэлектриками, но не наоборот.

Пироэлектрики используются при изготовлении детекторов ИК-излучения, болометров (датчиков инфракрасного излучения), электрооптических модуляторов.

### 3. Проводники во внешнем электрическом поле. Электростатическая индукция. Распределение зарядов по поверхности заряженного проводника

При отсутствии электростатического внешнего поля металлический проводник является электрически нейтральным – в любом элементе объема проводника отрицательный свободный заряд компенсируется положительным зарядом ионной решетки (рис. 6.4, *а*).

В проводнике, внесенном в электрическое поле, происходит следующее (рис. 6.4, *б*). Так как в проводнике присутствуют «свободные заряды» (например, в металлах ими являются валентные электроны атомов), то в нем появится кратковременный электрический ток: на свободные заряды проводника будут действовать электрические силы, которые приведут их в движение. Заряды проводника разделятся, на поверхности проводника возникнут нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды, и у проводника появится собственное электрическое поле.

Однако в природе действует закон *термодинамической необратимости*, согласно которому в замкнутой системе любой макроскопический процесс, любое видимое движение рано или поздно прекратится, и система должна прийти в состояние термодинамического равновесия.

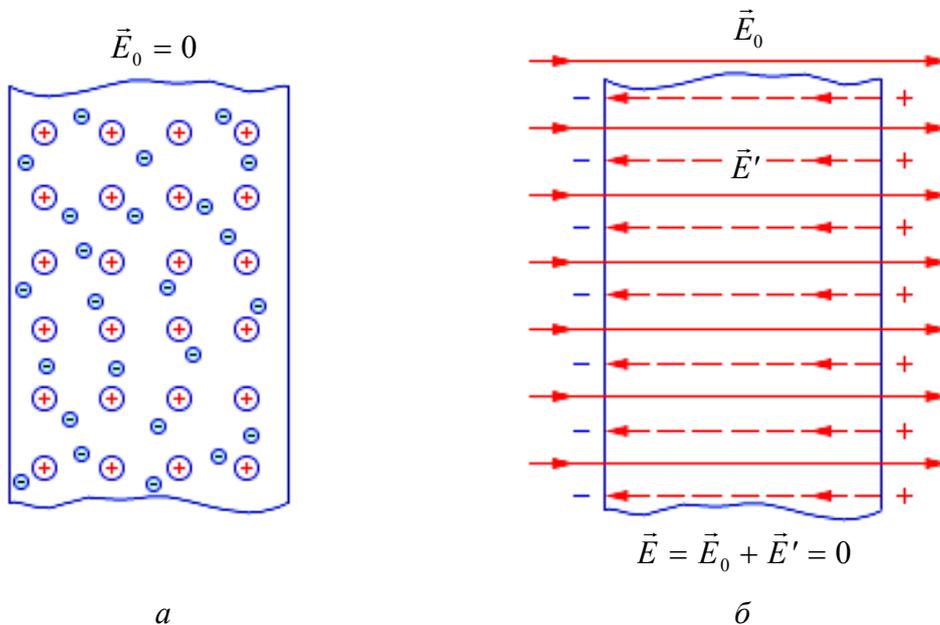


Рис. 6.4

Перераспределение зарядов в проводнике происходит до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов и положительных ионов  $\vec{E}'$  не компенсирует внешнее поле  $\vec{E}_0$  и в любой точке внутри проводника, находящегося в электростатическом поле, напряженность установившегося результирующего электрического поля  $E$  не будет равна нулю:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0. \quad (6.1)$$

В результате ток должен прекратиться, и через некоторое *время релаксации* ( $\sim 10^{-19}$  с) в проводнике наступит состояние равновесия зарядов.

Процесс перераспределения свободных зарядов, в результате чего на поверхности проводника возникают нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды, называют *электростатической индукцией*, а появившиеся на поверхности проводника заряды – *индукционными зарядами*.

Внутри проводника заряды, как и поле, должны отсутствовать. Если бы внутри проводника образовался объемный заряд, то он создал бы вокруг себя электрическое поле, тогда как поле внутри проводника (как было только что доказано) отсутствует. Следовательно, не должно быть и зарядов: из соотношения (5.17) следует, что

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

так как  $E = 0$ , то  $\rho = 0$ .

Внутри проводника имеются как положительные, так и отрицательные заряды, но они взаимно компенсируются, и в целом внутренние области проводника нейтральны.

Итак, весь заряд проводника в электростатическом поле скапливается на его поверхности. Избыточные заряды появляются лишь на поверхности проводника с некоторой плотностью  $\sigma$ , различной в разных точках его поверхности. Заметим, что избыточный поверхностный заряд находится в очень тонком поверхностном слое (его толщина около одного-двух межатомных расстояний).

Более того, можно даже сказать, каким образом заряд распределяется по поверхности: поверхностная плотность заряда  $\sigma$  «следует» за кривизной поверхности – в местах большей кривизны и плотность заряда будет больше. Особенно большая кривизна

характерна для остриев углов, кромок, «крутых» закруглений. В этих местах регистрируется и большая плотность заряда. А чем больше плотность заряда, тем больше напряженность поля вблизи них. Поэтому на остриях и «крутых» закруглениях образуется сильное электрическое поле. Если проводник находится в воздухе при атмосферном давлении, то вблизи острия напряженность поля может быть весьма большой и наблюдается местный пробой воздуха. Возникает *коронный разряд*, вследствие которого заряды с проводника стекают.

#### **4. Напряженность и потенциал электростатического поля внутри и вблизи поверхности заряженного проводника**

Силовые линии электростатического поля вне проводника в непосредственной близости к нему перпендикулярны его поверхности. Если бы это было не так, то имела бы составляющая напряженности  $\vec{E}_\tau$  поля вдоль поверхности проводника, и по поверхности протекал бы ток. При равновесии зарядов во всех точках внутри проводника не только напряженность поля, но и заряд равен нулю. Во всех точках на поверхности проводника  $\vec{E} = \vec{E}_n$  ( $\vec{E}_\tau = 0$ ). Потенциалы во всех точках внутри проводника одинаковы и равны потенциалу на поверхности проводника:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = 0 \rightarrow \varphi = \text{const.} \quad (6.2)$$

Таким образом, поверхность проводника, находящегося в электростатическом поле, эквипотенциальна  $\frac{d\varphi}{dl} = -E_\tau = 0$ , весь объем проводника также эквипотенциален.

Одинаковое во всех точках проводника значение потенциала называют *потенциалом проводника*.

Если проводнику сообщить некоторый заряд  $q$ , то нескомпенсированные заряды располагаются только на поверхности проводника, причем  $\sigma = D$  и

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (6.3)$$

## 5. Экранирование внешнего поля

Так как внутри проводника нет избыточных зарядов, то удаление вещества из некоторого объема внутри проводника (создание замкнутой полости) поля нигде не изменит, т. е. никак не отразится на равновесном расположении зарядов. Это значит, что избыточный заряд распределяется на проводнике с полостью так же, как и на сплошном проводнике, – по его наружной поверхности. Электрическое поле в полости, как и в сплошном проводнике, равно нулю (рис. 6.5).

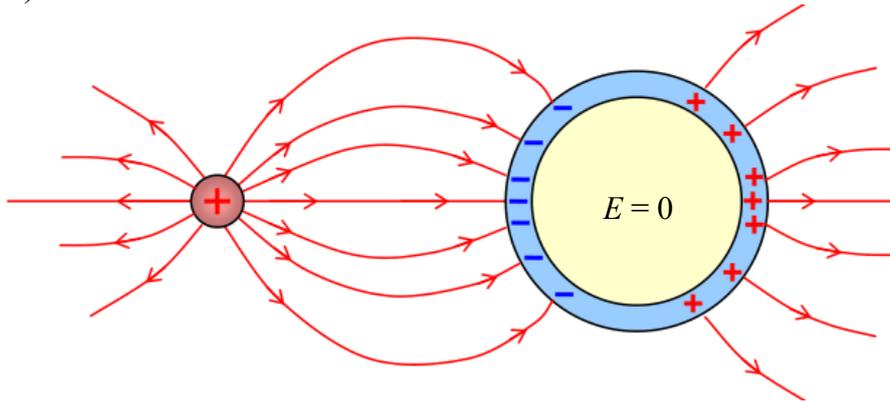


Рис. 6.5

Внешние заряды, в частности заряды на наружной поверхности проводника, не создают в полости внутри проводника никакого электрического поля. На этом основана *электростатическая защита* – экранирование тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей – чувствительные к электрическому полю приборы для исключения влияния поля помещают в металлические ящики (в проводящий экран), которые соединяют с землей. Практически сплошной проводник может быть заменен достаточно густой металлической сеткой.

Замкнутая проводящая незаземленная оболочка не экранирует внешнее от поля зарядов, находящихся внутри оболочки, пространство. Электрический заряд внутри замкнутой сферической проводящей оболочки создает на ее внутренней и внешней поверхностях равные по величине и противоположные по знаку индуцированные заряды (рис. 6.6, а).

Эффект экранировки имеется только в толще сферической оболочки ( $\vec{E} = 0$ ). Во внешнем пространстве поле создается электрическими зарядами, индуцированными на ее наружной поверхности.

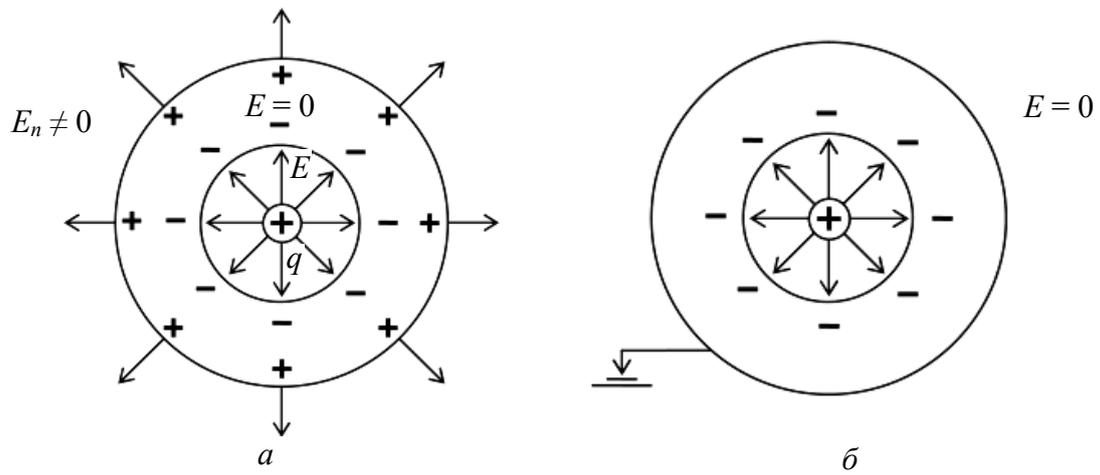


Рис. 6.6

Эффект экранировки внешнего от поля заряда, находящегося внутри проводящей сферической оболочки, пространства возникает, если убрать ее индуцированные заряды заземлением наружной поверхности оболочки (рис. 6.6, б).

## ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Электроемкость уединенного проводника и конденсатора.
2. Конденсаторы и их соединения.
3. Энергия уединенного проводника и конденсатора.
4. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии электростатического поля.

### 1. Электроемкость уединенного проводника и конденсатора

Рассмотрим какой-либо *уединенный проводник*, т. е. проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов. Если сообщить такому проводнику некоторый заряд  $q$ , то он распределится по его поверхности так, что напряженность поля внутри проводника будет равна нулю. Такое распределение является единственным. Различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике так, что отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине  $q$  будет одним и тем же. Следовательно, потенциал  $\varphi$  уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду  $q$ :

$$q = C\varphi \Rightarrow C = \frac{q}{\varphi}. \quad (7.1)$$

Коэффициент пропорциональности между потенциалом и зарядом называется *электроемкостью* (или просто *емкостью*) проводника. Она численно равна заряду, который нужно сообщить проводнику, чтобы повысить его потенциал на один вольт.

Емкость зависит от размеров, формы проводника и диэлектрических свойств среды, в которой он находится. Единицу измерения емкости в СИ называют фарадом:  $[\Phi] = \text{Кл/В}$ . Электроемкость в 1 Ф является очень большой величиной. Например, если будем считать Землю уединенным проводящим шаром ( $R = 6400 \text{ км}$ ), то тогда получим:  $C = 7,11 \cdot 10^{-4} \text{ Ф}$ . Поэтому на практике пользуются дольными единицами:  $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ;  $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$ ;  $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ .

Найдем для примера емкость уединенного проводника, имеющего форму шара радиусом  $R$ . Для этого мысленно зарядим проводник зарядом  $q$  и по формулам (2.19), (2.20) вычислим потенциал  $\varphi$  шара. Если шар расположен в вакууме, то напряженность электрического поля, создаваемого зарядом на шаре, определяется соотношением (2.26). В случае, если проводник окружает однородный изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , согласно формуле (5.23) напряженность поля уменьшится в  $\varepsilon$  раз:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2}. \quad (7.2)$$

Если  $r_1 = R$ ,  $r_2 \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_2 \rightarrow 0$  (рис. 7.1), то

$$\varphi_1 = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2} dr. \quad (7.3)$$

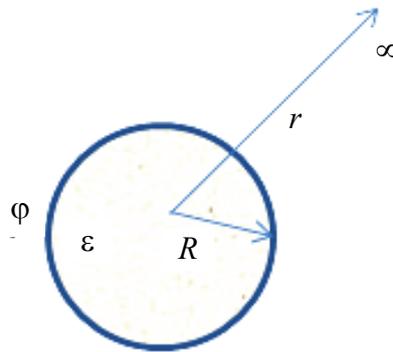


Рис. 7.1

Следовательно,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_R^\infty = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}. \quad (7.4)$$

Подставив выражение (7.4) в формулу (7.1), найдем емкость шара:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \quad (7.5)$$

Из соотношения (7.5) видно, что для того чтобы проводник обладал большой емкостью, он должен иметь большие размеры. Однако на практике необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах накапливать значительные по величине заряды,

т. е. обладающие большой емкостью. Емкость уединенного проводника можно существенно увеличить при приближении к нему других тел. Это обусловлено тем, что поле данного проводника вызывает перераспределение зарядов на окружающих телах так, что индуцированные заряды, противоположные знаку заряда на проводнике, оказываются ближе к нему. Поэтому потенциал проводника, являющийся алгебраической суммой потенциала собственных зарядов и зарядов, индуцированных на других телах, уменьшится при приближении к нему других тел. А значит, согласно формуле (7.1), его емкость увеличится. Это позволяет создавать устройства, которые обладают значительно большей емкостью, чем уединенный проводник. Данные устройства называют конденсаторами.

*Конденсатор* – это устройство, способное при небольшом отношении окружающих тел потенциале накапливать существенный заряд. Если два проводника имеют такую форму, что создаваемое ими электрическое поле сосредоточено в ограниченной области пространства, то образованная ими система носит название конденсатора, а сами проводники называют *обкладками конденсатора*.

Электрические заряды, находящиеся на обкладках заряженного конденсатора, всегда равны по величине и противоположны по знаку.

*Конденсатор* – система изолированных друг от друга двух проводников, пространство между которыми заполнено слоем диэлектрика, а один из проводников изолирован от земли.

Основной характеристикой конденсатора является его емкость.

Под *емкостью конденсатора* понимают отношение заряда конденсатора  $q$  к разности потенциалов (напряжению  $U$ ) между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (7.6)$$

где под зарядом конденсатора имеют в виду заряд, расположенный на положительно заряженной обкладке.

Емкость конденсатора также измеряют в фарадах. Она зависит от размеров и формы обкладок, от зазора между ними и от среды, заполняющей конденсатор.

## **2. Конденсаторы и их соединения**

В зависимости от формы обкладок различают плоские, сферические и цилиндрические конденсаторы.

Получим формулы для расчета емкости различных типов конденсаторов.

Плоский конденсатор (рис. 7.2) состоит из двух параллельных металлических пластин (площадь каждой  $S$ ), расположенных на близком расстоянии  $d$  одна от другой и несущих заряды  $q_1 > 0$  и  $q_2 < 0$  ( $|q_1| = |q_2|$ ). Пространство заполнено средой, диэлектрическая проницаемость которой  $\varepsilon$ . Зазор  $d$  между пластинами мал по сравнению с их размерами, т. е. краевым эффектом можно пренебречь.

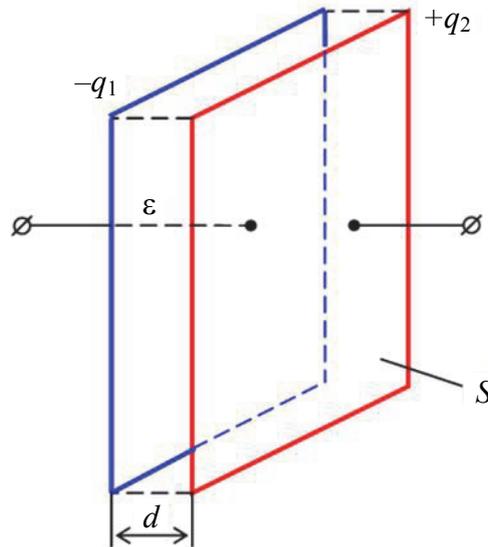


Рис. 7.2

Напряженность поля между обкладками:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 S}, \quad (7.7)$$

где  $\sigma = q / S$  – поверхностная плотность заряда на пластине.

Тогда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_0^d E dr = -\frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 S} \int_0^d dr = -\frac{qd}{\varepsilon \varepsilon_0 S}. \quad (7.8)$$

Учитывая формулу (7.6), получим формулу для расчета емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (7.9)$$

Помимо емкости каждый конденсатор характеризуется  $U_{\text{раб}}$  – максимально допустимым напряжением, выше которого происходит пробой между обкладками.

*Сферический конденсатор* (рис. 7.3) состоит из двух концентрических металлических сферических обкладок, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), а пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Заряды обкладок обозначим через  $+q$  и  $-q$ , а потенциалы обкладок – соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , и будем считать заряд равномерно распределенным по поверхности. Используя теорему Гаусса, легко показать, что электрическое поле существует только в пространстве между сферами, и напряженность этого поля определяется соотношением (7.2).

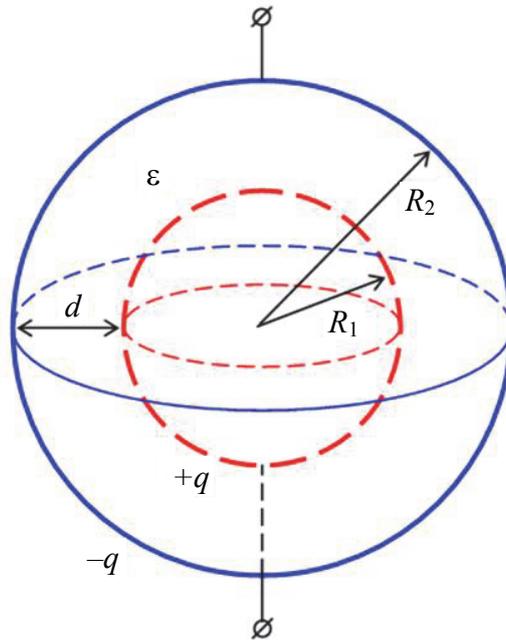


Рис. 7.3

Напряженность поля связана с разностью потенциалов соотношением

$$d\varphi = -E dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} dr. \quad (7.10)$$

Полное изменение потенциала при переходе с одной обкладки на другую получим интегрированием от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \quad (7.11)$$

Подставив выражение для разности потенциалов (7.11) в (7.6), получим формулу для расчета емкости сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (7.12)$$

Цилиндрический конденсатор (рис. 7.4) представляет собой два коаксиальных (т. е. имеющих одну ось симметрии) полых цилиндра с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) и общей длиной  $l$ .

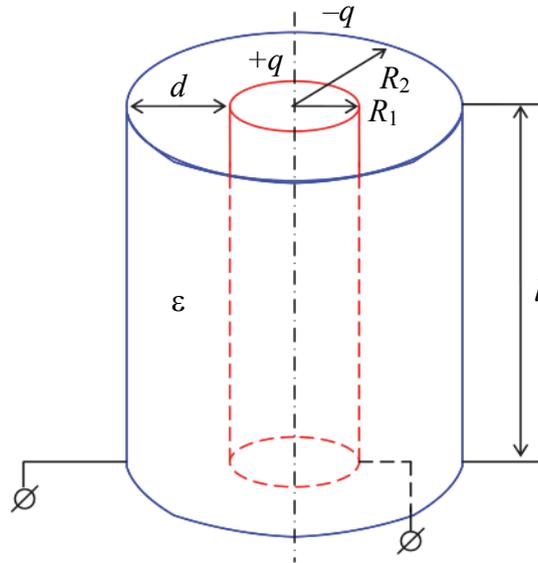


Рис. 7.4

Пусть на обкладках имеются заряды  $+q$  и  $-q$ , потенциалы которых соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Пренебрегая краевыми эффектами на торцах цилиндров, напряженность поля, создаваемую только зарядом на внутреннем цилиндре в точке на расстоянии  $r$  от оси цилиндра, находим по теореме Гаусса при помощи соотношения (3.12) по формуле

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{\epsilon r}, \quad (7.13)$$

где  $\tau = \frac{dq}{dl}$  – линейная плотность заряда.

Разность потенциалов между обкладками получим интегрированием от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (7.14)$$

Подставив выражение для разности потенциалов (7.14) в (7.6), получим формулу для расчета емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(R_2 / R_1)}. \quad (7.15)$$

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в батареи. При этом используют параллельное и последовательное соединения конденсаторов.

Рассмотрим параллельное соединение конденсаторов (рис. 7.5).

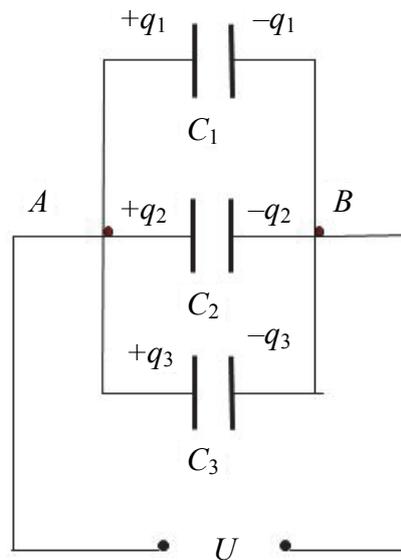


Рис. 7.5

При таком соединении разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова, а полный заряд батареи  $q$  равен сумме зарядов  $q_i$ , для каждого из которых, согласно формуле (7.6), справедливо равенство  $q_i = C_i U$ .

Результирующая емкость  $C$  для батареи из трех конденсаторов (рис. 7.5) определяется выражением

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + C_3. \quad (7.16)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей включенных в батарею конденсаторов:

$$C = \frac{q}{U} = \sum_i C_i. \quad (7.17)$$

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 7.6) заряды  $q$  на всех конденсаторах одинаковы, а полное напряжение на батарее  $U$  равно сумме напряжений  $U_i = q / C_i$  на отдельных конденсаторах:

$$U = \sum_i U_i = q \left( \sum_i \frac{1}{C_i} \right). \quad (7.18)$$

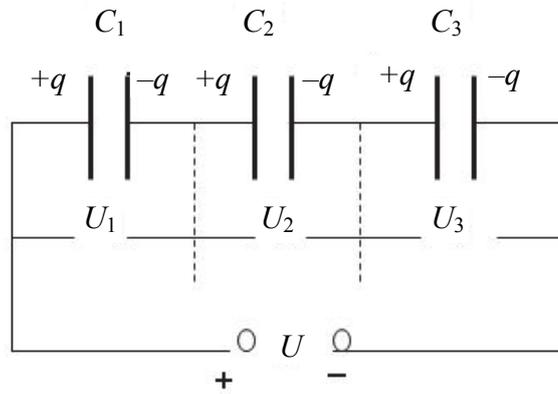


Рис. 7.6

В результате при последовательном соединении складываются обратные значения емкостей:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (7.19)$$

### 3. Энергия уединенного проводника и конденсатора

Пусть проводник имеет заряд  $q$  и потенциал  $\phi$ . Заряд на проводнике можно рассматривать как систему точечных зарядов, энергия взаимодействия которых определяется соотношением (4.5). Так как потенциал каждой точки проводника  $\phi_i$  равен потенциалу проводника  $\phi$ , то в выражении (4.5) потенциал можно вынести из-под знака суммы. Тогда оставшаяся сумма есть не что иное, как заряд  $q$ , находящийся на проводнике.

*Энергия уединенного проводника:*

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i = \frac{1}{2} \phi \sum_{i=1}^n q_i = \frac{q\phi}{2}. \quad (7.20)$$

Принимая во внимание формулу (7.1), можно написать три соотношения для энергии уединенного проводника:

$$W = \frac{q\phi}{2} = \frac{C\phi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (7.21)$$

Любое из этих соотношений дает энергию заряженного проводника.

Найдем энергию заряженного конденсатора. Пусть потенциал обкладки конденсатора, на которой находится заряд  $+q$ , равен  $\varphi_1$ , а потенциал обкладки, на которой находится заряд  $-q$ , равен  $\varphi_2$ . Потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются не только зарядом на соответствующей обкладке, но и зарядом на соседней обкладке. Для энергии каждой обкладки будет справедливо выражение (7.20). Тогда энергия конденсатора:

$$W = \frac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{qU}{2}, \quad (7.22)$$

где  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  – напряжение на обкладках конденсатора.

Воспользовавшись соотношением (7.6), получим следующие выражения для энергии конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (7.23)$$

Заметим, что эти формулы определяют полную энергию взаимодействия: не только энергию взаимодействия одной обкладки с другой, но и энергию взаимодействия зарядов внутри каждой обкладки.

#### **4. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии электростатического поля.**

Формула (7.23) определяет электрическую энергию  $W$  любой системы через заряды и потенциалы. Но оказывается, что энергию  $W$  можно также выразить через величину, характеризующую само электрическое поле, – его напряженность  $\vec{E}$ . Убедимся в этом на простейшем примере плоского конденсатора. Подставив в одну из формул для энергии конденсатора (7.23) выражение для емкости плоского конденсатора (7.9), получим:

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2d}. \quad (7.24)$$

В формуле (7.24) умножим и разделим на  $d$ :

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon S d U^2}{2 d^2}. \quad (7.25)$$

Из выражения (7.8) следует, что отношение напряжения на обкладках к расстоянию между обкладками равно напряженности поля в конденсаторе:

$$E = \frac{U}{d}. \quad (7.26)$$

С учетом того, что  $V = Sd$  – объем между обкладками (объем, занимаемый полем), *энергия конденсатора* (7.25) примет вид

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V. \quad (7.27)$$

Формула (7.27) связывает энергию конденсатора с напряженностью электрического поля внутри конденсатора. Поэтому ее можно трактовать как энергию электрического поля, создаваемого в конденсаторе. Логично поставить вопрос о том, что является носителем энергии – заряды или поле. Опыт показывает, что носителем энергии является само поле. Это нашло подтверждение в области переменных во времени полей. Именно там встречаются явления, которые можно истолковать на основе идеи о локализации энергии в поле. Переменные поля могут существовать независимо от возбудивших их электрических зарядов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн. Опыт показывает, что электромагнитные волны переносят энергию. Это заставляет признать, что носителем энергии является поле.

Из формулы (7.27) следует, что *объемная плотность энергии поля в конденсаторе*:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2 V}{2V} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2}, \quad (7.28)$$

где  $D$  – модуль вектора электрического смещения (5.15).

Учитывая выражение для вектора  $\vec{D}$  электрического смещения (5.15), формулу для объемной плотности энергии поля в конденсаторе (7.28) можно преобразовать как

$$\omega = \frac{\vec{E} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{D})}{2}. \quad (7.29)$$

Или с учетом соотношения (5.5), выражающего связь вектора поляризации  $\vec{P}$  с напряженностью электростатического поля  $\vec{E}$ ,

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{P}}{2}, \quad (7.30)$$

где первое слагаемое совпадает с *плотностью энергии поля в вакууме*, второе слагаемое представляет собой *энергию, затрачиваемую на поляризацию диэлектрика*.

## ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

1. Ток проводимости в металлах, его характеристики и условия существования.
2. Законы Ома в интегральной и дифференциальной формах. Электродвижущая сила. Источники тока.

### 1. Ток проводимости в металлах, его характеристики и условия существования

*Электрическим током* называется любое упорядоченное движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля свободные электрические заряды перемещаются: положительные – по полю, отрицательные – против поля, т. е. в проводнике возникает электрический ток, называемый *током проводимости*. Свободными носителями электрических зарядов в металлах являются электроны, в электролитах – положительные и отрицательные ионы, в газах – электроны и положительные ионы, в полупроводниках – электроны и дырки.

За направление электрического тока условились считать то направление, в котором двигаются положительные заряды. Поэтому направление тока в металлах противоположно истинному направлению движения носителей заряда – электронов, имеющих отрицательный заряд.

Для возникновения и существования электрического тока необходимо наличие:

а) свободных носителей заряда, способных перемещаться упорядоченно;

б) электрического поля, энергия которого должна каким-то образом восполняться.

*Количественной характеристикой* электрического тока является сила тока. *Сила тока* – это скалярная физическая величина  $I$ , определяемая электрическим зарядом  $dq$ , проходящим через поперечное сечение проводника  $S$  в единицу времени  $dt$ :

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (8.1)$$

Если сила тока и его направление не изменяются во времени, то ток называется *постоянным* или *стационарным*. Сила постоянного тока:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (8.2)$$

Единицей измерения силы тока в СИ является *ампер* (А). Это основная единица. Через нее определяется единица измерения заряда. *Кулон* – это заряд, переносимый за 1 с через поверхность при силе тока в 1 А.

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Для характеристики направления электрического тока в разных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности служит *вектор плотности тока*  $\vec{j}$ .

Модуль вектора плотности тока численно равен отношению силы тока  $dI$  через площадь  $dS_{\perp}$ , расположенную перпендикулярно направлению движения носителей, к величине этой площади:

$$|\vec{j}| = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (8.3)$$

За направление вектора  $\vec{j}$  принимают направление вектора скорости упорядоченного движения положительных носителей (или направление, противоположное направлению вектора скорости упорядоченного движения отрицательных носителей).

Для постоянного тока, текущего перпендикулярно сечению проводника,

$$j = \frac{I}{S}. \quad (8.4)$$

Плотность тока измеряется в СИ  $[j] = \text{А/м}^2$ .

Сила тока сквозь произвольную поверхность определяется как поток вектора плотности тока:

$$I = \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (8.5)$$

Выразим силу и плотность тока через среднюю скорость упорядоченного движения свободных носителей заряда в проводнике. Пусть за время  $dt$  через поперечное сечение проводника переносится заряд  $dq = ne\langle u \rangle S dt$ . Следовательно, сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{ne\langle u \rangle S dt}{dt} \Rightarrow I = ne\langle u \rangle S, \quad (8.6)$$

где  $n$  – концентрация свободных носителей заряда;  $e$  – элементарный заряд;  $\langle u \rangle$  – средняя скорость упорядоченного движения (скорость дрейфа) носителей заряда.

Плотность тока пропорциональна скорости дрейфа носителей заряда:

$$\vec{j} = ne\langle \vec{u} \rangle. \quad (8.7)$$

В общем случае

$$\vec{j} = q_+ n_+ \vec{u}_+ + q_- n_- \vec{u}_- = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-, \quad (8.8)$$

где  $\rho_+$ ,  $\rho_-$  – объемные плотности положительного и отрицательного зарядов.

Представим себе в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность (рис. 8.1). Для замкнутых поверхностей положительной нормалью считается внешняя нормаль, поэтому интеграл  $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  представляет собой силу тока, проходящего через поверхность  $S$ , т. е. заряд, выходящий за единицу времени наружу из объема  $V$ , охваченного поверхностью  $S$ .

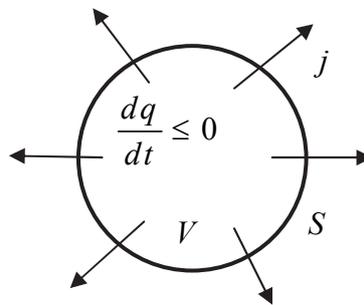


Рис. 8.1

Из закона сохранения заряда следует, что этот интеграл равен убыли заряда в единицу времени внутри объема  $V$ :

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (8.9)$$

Данное равенство (8.9) называется *уравнением неразрывности (непрерывности) для электрического тока*.

В случае *стационарного тока уравнение неразрывности*:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (8.10)$$

Преобразуем уравнение (8.9) с учетом выражения силы тока  $I$  для плотности зарядов  $\rho$  сквозь произвольный объем  $V$ :

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{d\rho}{dt} dV. \quad (8.11)$$

Применив теорему Остроградского – Гаусса для выражения (8.11):

$$\oint_S j_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

получим:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Rightarrow \int_V (\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = 0. \quad (8.12)$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (8.13)$$

Из выражения (8.13) получим *уравнение неразрывности для электрического тока*:

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (8.14)$$

*Уравнение неразрывности для электрического тока в дифференциальной форме*:

$$\nabla \vec{j} = - \frac{d\rho}{dt}. \quad (8.15)$$

Уравнения неразрывности для электрического тока (8.14), (8.15) показывают, что для возникновения и существования электрического тока необходимо наличие носителей заряда.

Для постоянного тока  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , в результате выражение (8.15) преобразуется:

$$\nabla \vec{j} = 0. \quad (8.16)$$

Уравнение (8.16) является *условием существования постоянного тока*.

Уравнение (8.16) означает, что в случае постоянного тока поле вектора  $\vec{j}$  не имеет источников: *линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются*, т. е. они замкнуты.

## 2. Законы Ома в интегральной и дифференциальной формах

Рассмотрим *однородный (пассивный) участок электрической цепи*. Участок электрической цепи, не содержащий источников электроэнергии, называется *однородным* (рис. 8.2).

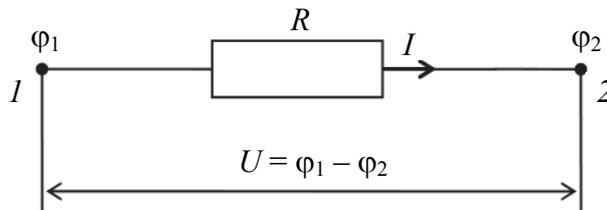


Рис. 8.2

Для такого участка (проводника) *закон Ома*, который установлен экспериментально, гласит: сила тока  $I$  в проводнике прямо пропорциональна напряжению  $U$  на его концах и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению  $R$  проводника (участка):

$$I = \frac{U}{R}. \quad (8.17)$$

Единица сопротивления – ом:  $[R] = \text{Ом} = \text{В/А}$ .

Выражение (8.17) является *законом Ома для однородного участка цепи в интегральной форме*.

Сопротивление зависит от материала проводника, а также от его формы и размеров. В простейшем случае однородного проводника:

$$R = \frac{\rho l}{S}, \quad (8.18)$$

где  $\rho$  – *удельное электрическое сопротивление*;  $l$  – длина проводника;  $S$  – площадь его поперечного сечения.

В СИ единица измерения  $\rho$ :  $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$ .

Удельное сопротивление зависит от материала проводника и его температуры. Опытным путем установлено, что для большинства металлов с повышением температуры удельное сопротивление увеличивается по линейному закону:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (8.19)$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  – удельные сопротивления при температурах  $t^\circ\text{C}$  и  $0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления.

Удельной электрической проводимостью (или удельной электропроводностью) материала проводника называется величина

$$\gamma = \frac{1}{\rho}. \quad (8.20)$$

Единица удельной электропроводности в СИ:  $[\gamma] = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ .

Установим связь между плотностью тока и напряженностью поля в проводнике. Рассмотрим небольшой отрезок трубки тока в однородной и изотропной проводящей среде (рис. 8.3,  $l$  – расстояние между точками 1 и 2, потенциалы которых соответственно равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ,  $S$  – средняя величина площади сечения трубки тока).

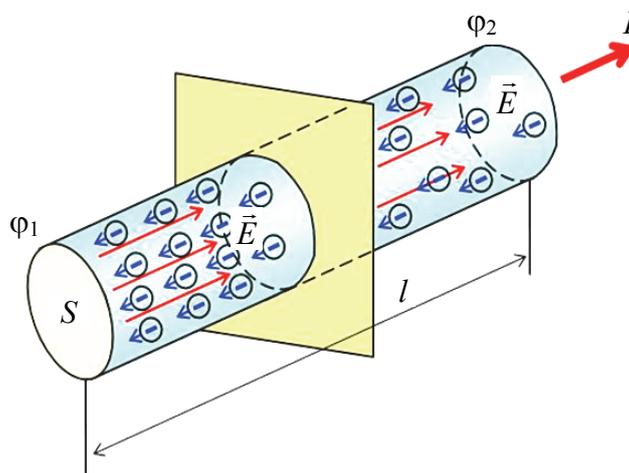


Рис. 8.3

Потенциал будет меняться вдоль проводника, так как в проводнике при наличии постоянного тока напряженность электрического поля  $E \neq 0$ . Если площадь сечения однородного проводника постоянна, то вдоль проводника напряженность электрического поля является постоянной величиной  $E = \text{const}$ . В этом случае разность потенциалов между концами проводника определяется с учетом выражений (2.20) и (2.26):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dr} = El, \quad (8.21)$$

где  $l$  – длина проводника.

Подставив формулы (8.4), (8.18), (8.21) в закон Ома (8.17), получим связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля в проводнике:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (8.22)$$

Выражение (8.22) является *законом Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме*.

Сравнив формулу (8.22) с уравнением (8.7), можем сказать, что средняя скорость упорядоченного движения (скорость дрейфа) носителей заряда пропорциональна напряженности поля, т. е.

$$\langle \vec{u} \rangle = a \vec{E}, \quad (8.23)$$

где  $a$  – подвижность носителей заряда.

Подставив выражение (8.23) в уравнение (8.7), получим:

$$\vec{j} = ena \vec{E} = \gamma \vec{E}. \quad (8.24)$$

Таким образом, удельная электропроводимость  $\gamma$  среды определяется концентрацией носителей заряда и их подвижностью, т. е.  $\gamma = ena$ .

Рассмотрим неоднородный (активный) участок электрической цепи. Участок электрической цепи называется *неоднородным*, если он содержит источник (или источники) электрической энергии (рис. 8.4). Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей тока приведет к тому, что потенциалы всех точек цепи выравняются, и поле внутри проводника исчезнет, а ток прекратится. Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, в цепи наряду с участками, где положительные носители тока двигаются в сторону уменьшения потенциала  $\phi$  под действием электрического поля, должны иметься участки, на которых перенос положительных носителей происходит в сторону возрастания  $\phi$ , т. е. против сил электрического поля (рис. 8.4).

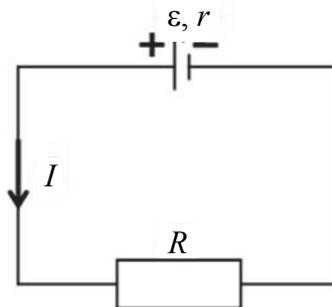


Рис. 8.4

Таким образом, необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов.

Устройство, способное создавать и поддерживать разность потенциалов, называют *источником электрической энергии* (или *генератором*). В источниках электроэнергии на носители зарядов действуют силы неэлектростатического происхождения, которые называются *сторонними силами*. Они могут быть обусловлены химическими процессами, вихревыми электрическими полями, диффузией носителей заряда в неоднородной среде и т. д.

Количественной характеристикой сторонних сил является напряженность  $\vec{E}_{\text{ст}}$ , которая определяется сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд. Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Физическая величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда в цепи или на ее участке, называется *электродвижущей силой* (ЭДС) источника электроэнергии:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q}. \quad (8.25)$$

Эта работа совершается за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока. Работа сторонних сил по перемещению заряда  $q_0$  на участке цепи:

$$A_{\text{ст}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} = q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}. \quad (8.26)$$

Отсюда ЭДС, действующая в замкнутой цепи, – это циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}. \quad (8.27)$$

Для поля сторонних сил циркуляция его напряженности по замкнутому контуру (рис. 8.4) не равна нулю. Поэтому поле сторонних сил не потенциально.

Рассмотрим участок цепи, полное сопротивление которого  $R_{12}$  и  $\varphi_1 > \varphi_2$  (рис. 8.5). Для любой точки данного участка напряженность результирующего поля  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}$ . Поэтому *закон Ома для неоднородного участка цепи* (или *обобщенный закон Ома*) в дифференциальной форме запишется в виде

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (8.28)$$

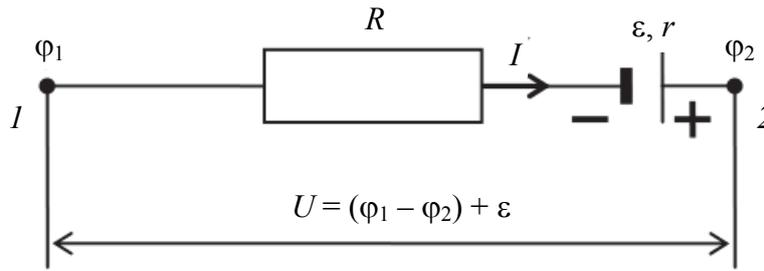


Рис. 8.5

В случае если на заряд кроме сторонних сил действуют силы электростатического поля, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{ст}} = q_{\text{пр}} (\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (8.29)$$

Тогда работа, совершаемая этой силой на участке цепи  $1 \rightarrow 2$ , определяется выражением

$$A_{12} = q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{эл}} \cdot d\vec{l} + q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} = q_{\text{пр}} (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}). \quad (8.30)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется *падением напряжения*, или просто *напряжением на данном участке цепи*:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q_{\text{пр}}} = (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}). \quad (8.31)$$

Так как  $U_{12} = IR_{12}$ , то

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (8.32)$$

С учетом выражения (8.32) закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме принимает вид

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{R + r}, \quad (8.33)$$

где  $R$  – сопротивление внешнего участка цепи;  $r$  – внутреннее сопротивление источника тока.

Заметим, что ЭДС  $\varepsilon$  в соотношении (8.33) берется с учетом знака. Если ЭДС способствует движению положительных носителей в выбранном направлении, то  $\varepsilon > 0$ , если же препятствуют, то  $\varepsilon < 0$ . Напри-

мер, на рис. 8.5 ЭДС создает ток в направлении, которое совпадает с выбранным направлением от 1 к 2, поэтому в формуле (8.33)  $\varepsilon > 0$ .

Если цепь замкнута, то в выражении (8.33)  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , и получаем выражение закона Ома для замкнутой цепи (рис. 8.4):

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{12}} = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (8.34)$$

Если  $R \ll r$ , то происходит короткое замыкание источника энергии. Сила тока короткого замыкания достигает максимального значения:

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{r} = I_{\text{к.з.}} \quad (8.35)$$

## ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК (окончание)

3. Правила Кирхгофа.
4. Мощность тока. Закон Джоуля – Ленца.
5. Вывод законов Ома и Джоуля – Ленца в классической электронной теории электропроводности металлов.
6. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов.

### 3. Правила Кирхгофа

Непосредственный расчет разветвленных цепей, содержащих несколько замкнутых контуров, каждый из которых может иметь несколько источников тока, довольно сложен. Расчет разветвленной цепи значительно упрощается, если использовать два *правила Кирхгофа*.

Первое из них относится к узлам цепи. *Узлом* называется точка разветвленной цепи, в которой сходится три и более проводника (рис. 9.1). Ток, текущий к узлу, берется со знаком «плюс», а от узла – со знаком «минус».

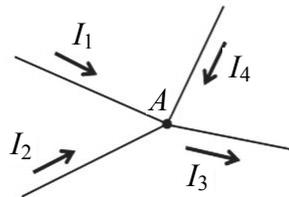


Рис. 9.1

*Первое правило Кирхгофа:* алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле разветвленной электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (9.1)$$

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда применительно к узлу разветвленной цепи. Уравнение (9.1) для узла A на рис. 9.1, записанное с применением первого правила Кирхгофа, имеет следующий вид:

$$I_1 + I_2 + I_4 - I_3 = 0. \quad (9.2)$$

Второе правило Кирхгофа относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру. Согласно этому правилу, алгебраическая сумма произведений сил тока в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k. \quad (9.3)$$

Второе правило Кирхгофа является обобщением закона Ома на разветвленные электрические цепи.

Применяя второе правило Кирхгофа, необходимо помнить *правило знаков для силы тока и ЭДС*: если направление тока, выбранное произвольно, совпадает с направлением обхода контура (выбор этого направления произволен), то сила тока  $I$  берется со знаком «плюс», в противоположном случае – со знаком «минус»; ЭДС считаются положительными, если они создают токи, совпадающие с направлением обхода контура (при обходе контура внутри источника мы идем от отрицательного полюса источника к положительному), в противоположном случае – отрицательными (рис. 9.2).

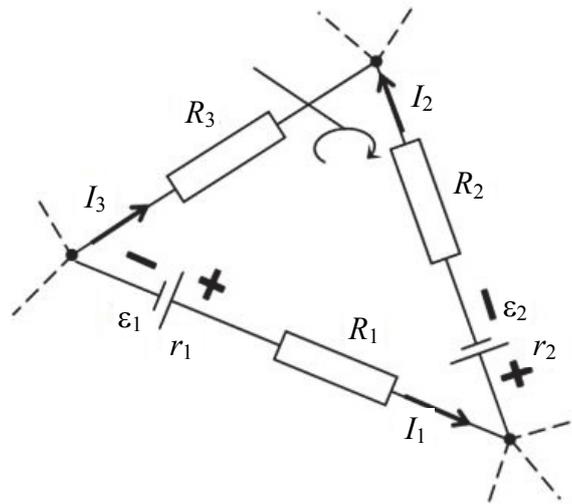


Рис. 9.2

Для контура, изображенного на рис. 9.2, согласно выбранному направлению обхода (по часовой стрелке) уравнение, записанное по второму правилу Кирхгофа (9.3), будет иметь следующий вид:

$$I_3 R_3 - I_2 (R_2 + r_2) - I_1 (R_1 + r_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \quad (9.4)$$

#### 4. Мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим произвольный однородный участок, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через сечения проводника переносится заряд  $dq = Idt$ . Работа сил электрического поля по переносу заряда  $dq$ :

$$\delta A = dqU = IUdt. \quad (9.5)$$

Отсюда, с учетом закона Ома, *мощность, выделяемая во внешней цепи*:

$$P_R = \frac{\delta A}{dt} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2 R. \quad (9.6)$$

Согласно закону сохранения энергии, эквивалентная работе (9.5) энергия должна выделяться в иной форме. Если проводник неподвижен и в нем не происходят химические превращения, то эта энергия должна выделяться в форме внутренней (тепловой) энергии, в результате чего проводник нагревается. По закону сохранения энергии количество теплоты  $\delta Q$ , которое выделяется в проводнике за время  $dt$ , равно работе  $\delta A$  (9.5):

$$\delta Q = IUdt = \frac{U^2}{R} dt = I^2 R dt. \quad (9.7)$$

Количество теплоты  $Q$ , которое выделится в проводнике за конечный промежуток времени  $t$ , определим интегрированием выражения (9.7):

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (9.8)$$

В случае постоянного тока  $I = \text{const}$ , поэтому

$$Q = I^2 R t. \quad (9.9)$$

Формулы (9.8) и (9.9) выражают *закон Джоуля – Ленца*.

Получим выражение этого закона в дифференциальной форме, характеризующей выделение теплоты в различных местах проводящей среды. Для этой цели выделим в проводнике элементарный объем в виде цилиндра длиной  $dl$  и площадью поперечного сечения  $dS$ , которое перпендикулярно плотности тока  $\vec{j}$ . Сила тока в этом цилиндре  $I = jdS$  и его сопротивление  $R = \rho dl/dS$ . Согласно закону Джоуля – Ленца, в этом объеме за время  $dt$  выделится количество теплоты:

$$\delta Q = I^2 R dt = (j ds)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt, \quad (9.10)$$

где  $dV = dS dl$  – объем цилиндра.

Разделив выражение (9.10) на  $dV dt$ , получим формулу, которая определяет количество теплоты, выделяемое в единице объема проводника за единицу времени, – *удельную тепловую мощность тока*:

$$w = \frac{\delta Q}{dS dt} = \rho j^2. \quad (9.11)$$

Учитывая в формуле (9.11) закон Ома и связь удельного сопротивления с удельной проводимостью (8.20), получим:

$$w = \gamma E^2. \quad (9.12)$$

Эта формула выражает *закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме*.

Если участок цепи содержит источник ЭДС, т. е. является неоднородным, то на носители тока будут действовать не только электрические силы, но и сторонние. В этом случае работа по переносу заряда  $dq$  на этом участке (см. формулу (8.30))

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) + dq\varepsilon. \quad (9.13)$$

Мощность, выделяемая на этом участке:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \varepsilon I. \quad (9.14)$$

Согласно выражению (9.14), мощность, выделяемая на неоднородном участке цепи, равна алгебраической сумме мощностей электрических и сторонних сил. Сумму этих мощностей, т. е. соотношение (9.14), называют *мощностью тока на рассматриваемом участке цепи*.

Применив (9.14) ко всей неразветвленной цепи (тогда  $\varphi_1 = \varphi_2$ ), получим, что мощность, выделяемая во всей цепи, равна мощности только сторонних сил:

$$P = \varepsilon I. \quad (9.15)$$

Таким образом, мощность производится только сторонними силами за счет энергии, запасенной в источнике тока. Роль же электрического поля сводится к тому, что оно перераспределяет эту мощность по различным участкам цепи.

## 5. Вывод законов Ома и Джоуля – Ленца в классической электронной теории электропроводности металлов

С точки зрения классической электронной теории высокая электропроводность металлов обусловлена наличием огромного числа носителей зарядов – электронов проводимости, слабо связанных с ионами кристаллической решетки и способных перемещаться по всему объему проводника. Систему электронов проводимости можно рассматривать как электронный газ, который по своим свойствам близок к идеальному одноатомному газу. Механизм прохождения тока по проводнику и его нагревание в рамках классических представлений рассматриваются следующим образом.

Свободный электрон ускоряется электрическим полем, которое имеется внутри проводника. По второму закону Ньютона все электроны приобретают одинаковое ускорение:

$$a = \frac{F_{эл}}{m} = \frac{eE}{m}, \quad (9.16)$$

где  $F_{эл} = eE$  – сила, действующая на электрон со стороны электрического поля;  $E$  – напряженность электрического поля внутри проводника.

В результате все электроны приобретают дополнительную скорость в одном и том же направлении, т. е. образуется упорядоченное движение электронов – электрический ток. Действительное движение электрона очень сложное, поскольку электроны находятся в хаотическом тепловом движении, на которое в электрическом поле накладывается упорядоченное движение. При своем движении электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки металла и передают им небольшую часть своей энергии, которая в среднем равна энергии, приобретенной ими за счет электрического поля.

Между двумя последовательными соударениями электрон двигается равноускоренно, поэтому его средняя скорость упорядоченного движения:

$$\langle u \rangle = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{a\langle t \rangle}{2} = \frac{eE}{2m} \langle t \rangle, \quad (9.17)$$

где  $u_{\max} = a\langle t \rangle$  – максимальная скорость упорядоченного движения, которую электрон приобретает к концу свободного пробега непосредственно перед соударением;  $\langle t \rangle$  – *среднее время свободного пробега*.

Если  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега (расстояние, проходимое электроном между двумя последовательными столкновениями) и  $\langle v \rangle$  – средняя скорость хаотического движения, то

$$\langle t \rangle = \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \quad (9.18)$$

где следует учесть, что средняя скорость хаотического движения во много раз превышает среднюю скорость упорядоченного движения ( $\langle v \rangle \sim 10^5$  м/с и  $\langle u \rangle \sim 10^{-4}$  м/с).

Подставим выражения (9.18) и (9.17) в формулу (8.8) для плотности тока и учтем, что заряд носителей тока – заряд электрона. В результате получим:

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle v \rangle} E. \quad (9.19)$$

Сравнив (9.19) с законом Ома в дифференциальной форме (8.22), найдем выражение для удельной электропроводности металлов:

$$\gamma = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle v \rangle}. \quad (9.20)$$

Таким образом, получены зависимость плотности тока от напряженности электрического поля и выражение удельной электропроводности металлов через характеристики движения электронов проводимости.

Из электронной теории электропроводности следует также закон Джоуля – Ленца (9.9). Рассмотрим превращение энергии, происходящее при соударениях электронов с ионами кристаллической решетки. В конце свободного пробега каждый электрон теряет скорость упорядоченного движения, приобретенную им под действием электрического поля за время свободного пробега:

$$u_{\max} = a\langle t \rangle = \frac{eE}{m} \frac{\lambda}{\langle v \rangle}. \quad (9.21)$$

Поэтому при каждом столкновении ионам проводника передается приобретенная между столкновениями кинетическая энергия:

$$K = \frac{mu_{\max}^2}{2} = \frac{e^2\lambda^2}{2m\langle v \rangle^2} E^2. \quad (9.22)$$

Число столкновений в единицу времени каждого электрона с ионами проводника равно  $\langle v \rangle/\lambda$ . Если  $n$  – концентрация электронов

проводимости, то в единицу времени происходит  $n\langle v \rangle / \lambda$  столкновений в единице объема проводника. При этом решетке передается энергия, которая идет на нагревание проводника. Количество теплоты, выделяемое в единице объема проводника за единицу времени, – *удельная тепловая мощность тока* – определяется с учетом равенств (9.20) и (9.22) следующим образом:

$$w = n \frac{\langle v \rangle}{\lambda} K = \frac{ne^2 \lambda}{2m \langle v \rangle} E^2 = \gamma E^2. \quad (9.23)$$

Таким образом, исходя из электронной теории электропроводности, получено выражение для закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме (9.12).

Классическая теория электропроводности весьма наглядна и дает правильную зависимость плотности тока и тепловой мощности тока от напряженности электрического поля в проводнике. Однако эксперимент для зависимости удельной проводимости  $\gamma$  от температуры приводит к закону  $\gamma \sim 1/T$ . Объяснить это формулой (9.20) нельзя, поскольку кинетическая теория газов дает  $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$ , допустить же зависимость  $\lambda \sim 1/\sqrt{T}$  невозможно в классической картине взаимодействия. Кроме того, по теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы следует ожидать от свободных электронов очень большого вклада в теплоемкость проводников, который на эксперименте не наблюдается.

Указанные расхождения теории с экспериментом устраняются в квантовой теории электропроводности.

## КОНТАКТНЫЕ И ЭМИССИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

1. Контактная разность потенциалов.
2. Термоэлектрические явления.
3. Эмиссионные явления в металлах.
4. Электрический ток в жидкостях. Законы Фарадея для электролиза.
5. Электрический ток в газах.

### 1. Контактная разность потенциалов

Электроны проводимости в металле находятся в хаотическом тепловом движении. Наиболее быстро движущиеся электроны, обладающие достаточной кинетической энергией, могут вылетать из металла в окружающее пространство. Это приводит к возникновению в том месте, которое покинул электрон, избыточного положительного заряда. Взаимодействие вылетевшего электрона с этим зарядом, а также силы отталкивания со стороны ранее вылетевших электронов заставляют электрон вернуться обратно. В результате металл оказывается окруженным тонким облаком электронов. Между электронным газом в металле и электронным облаком устанавливается динамическое равновесие.

Работа, которую необходимо совершить для удаления электрона из металла в вакуум, называют *работой выхода*.

Избыточный положительный заряд в металле и избыточный отрицательный заряд в окружающей среде находятся в очень тонком слое по обе стороны поверхности металла. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям в металле. Система этих зарядов представляет собой *двойной электрический слой*, подобный очень тонкому конденсатору. Электрон, вылетая за пределы металла, должен преодолеть задерживающее его электрическое поле двойного слоя. Найдем разность потенциалов между слоями:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{e}, \quad (10.1)$$

где  $A$  – работа выхода электрона из металла.

Эту разность потенциалов принято называть *поверхностным скачком потенциала* или *контактной разностью потенциалов* между металлом и окружающей средой.

Контактная разность потенциалов возникает также при соприкосновении металлов между собой. При соприкосновении двух металлических проводников электроны вследствие теплового движения переходят из одного проводника в другой. Если соприкасающиеся проводники различны или если их температуры в разных точках неодинаковы, то оба потока диффузии электронов неодинаковы и один из проводников заряжается положительно, а другой – отрицательно. Поэтому внутри проводников и во внешнем пространстве между проводниками появляется электрическое поле.

Разность потенциалов, возникающая между двумя контактирующими металлами, называется *внутренней контактной разностью потенциалов*. Разность потенциалов между двумя точками, находящимися в непосредственной близости от поверхностей первого и второго контактирующих металлов вне их, называется *внешней контактной разностью потенциалов*. Она характеризует электростатическое поле, создаваемое контактирующими металлами в окружающем их пространстве.

Экспериментально были установлены два закона (*законы Вольты*):

1) контактная разность потенциалов, возникающая при соединении двух проводников, изготовленных из различных металлов, зависит только от их химического состава и температуры;

2) разность потенциалов между концами цепи, состоящей из последовательно соединенных металлических проводников, находящихся при одинаковой температуре, не зависит от химического состава промежуточных проводников. Она равна разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

Внешняя контактная разность потенциалов обусловлена различием работы выхода электронов из контактирующих металлов:

$$U' = \varphi'_1 - \varphi'_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e}, \quad (10.2)$$

где знак минус показывает, что при  $A_1 > A_2$   $\varphi_1 < \varphi_2$ , т. е. первый металл заряжается отрицательно, а второй – положительно.

Причина появления внутренней контактной разности потенциалов между металлами связана с представлением об электронном газе в металлах как об идеальном газе. Давление такого газа в металле опреде-

ляется концентрацией электронов проводимости  $n$  и температурой  $T$ . Под действием перепада давлений электроны будут переходить из одного металла в другой. Это будет происходить до тех пор, пока электрическое поле, возникающее вследствие диффузионного перехода электронов, не компенсирует своим противодействием влияние перепада давления.

Внутренняя контактная разность потенциалов, которая возникает в результате диффузионного перехода электронов, выражается формулой

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}, \quad (10.3)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $n_1$  и  $n_2$  – концентрации электронов проводимости в металлах.

Соотношение (10.3) является математическим выражением первого закона Вольта, так как оно показывает, что разность потенциалов зависит только от температуры и химической природы (концентраций) контактирующих металлов. Из этого соотношения следует также второй закон Вольта.

## 2. Термоэлектрические явления

Между тепловыми и электрическими процессами в металлах имеется взаимосвязь, которая обуславливает явления, называемые *термоэлектрическими*. К их числу принадлежит явление *Зеебека*. Оно состоит в том, что если спаи  $a$  и  $b$  двух разнородных металлов, образующих замкнутую цепь (рис. 10.1), поддерживать при различных температурах, то в цепи течет ток. Изменение знака у разности температур спаев сопровождается изменением направления тока.

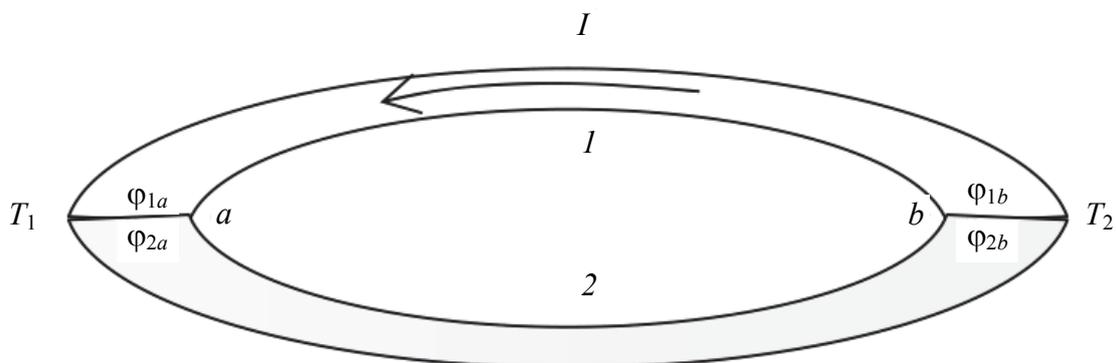


Рис. 10.1

Электрический ток является следствием появления в цепи *термо-электродвижущей силы*  $\varepsilon_T$  (сокращенно *термо-ЭДС*). Она обусловлена тем, что внутренняя контактная разность потенциалов (10.3) зависит от температуры. Поэтому скачок потенциала (внутренняя контактная разность потенциалов) при переходе из одного металла в другой неодинаков в спаях, находящихся при разных температурах, и сумма скачков потенциалов для всей цепи отлична от нуля.

Из закона Ома для замкнутой цепи следует, что возникающая термо-ЭДС равна сумме падений напряжений на каждом участке цепи:

$$\varepsilon_T = U_1 + U_2. \quad (10.4)$$

Таким образом, в рассматриваемой цепи действует электродвижущая сила, равная алгебраической сумме всех внутренних контактных разностей потенциалов. Принимая во внимание формулу (10.3), получим:

$$\varepsilon_T = \alpha(T_2 - T_1), \quad (10.5)$$

где постоянная величина  $\alpha$  характеризует свойства контакта двух металлов, ее называют *удельной термо-ЭДС* данной пары металлов.

Она определяется соотношением

$$\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad (10.6)$$

Явление Зеебека используется для измерения температур. Для данной цели применяют *термопары*, представляющие собой две спаянные между собой проволоки, изготовленные из различных металлов или сплавов (рис. 10.2), с известным значением коэффициента  $\alpha$  в формуле (10.5).

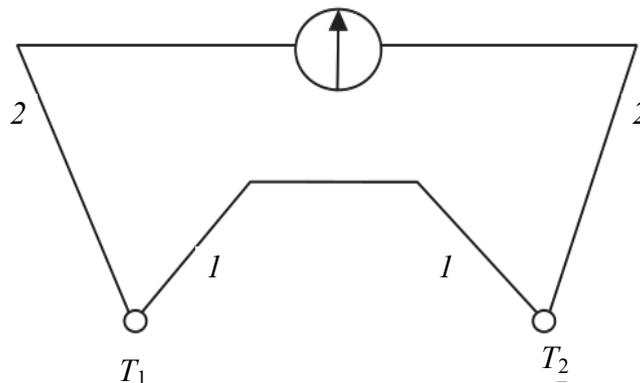


Рис. 10.2

Один спай термопары поддерживают при постоянной температуре  $T_1$ , другой помещают в среду, температуру  $T_2$  которой нужно измерить. О величине температуры можно судить по силе возникающего в цепи тока или появляющейся в цепи термо-ЭДС, которые измеряются гальванометром.

### 3. Эмиссионные явления в металлах

Если сообщить электронам проводимости в металлах энергию, необходимую для преодоления работы выхода, они получают возможность покинуть металл. В результате наблюдается явление испускания электронов, или *электронная эмиссия*. В зависимости от того, каким способом сообщают электронам энергию, различают разные типы электронной эмиссии. *Термоэлектронная эмиссия* возникает при нагревании тел, *фотоэлектронная эмиссия (внешний фотоэффект)* – под действием света, *вторичная электронная эмиссия* – при бомбардировке поверхности металлов пучком ускоренных электронов, *автоэлектронная эмиссия (холодная эмиссия)* – под действием сильного электрического поля.

Рассмотрим более подробно применение термоэлектронной эмиссии. Электроны, испускаемые нагретым телом, называют *термоэлектронами*, а само тело – *эмиттером*. При термоэлектронной эмиссии электроны вылетают за счет тепловой энергии. Число термоэлектронов зависит от свойств эмиттера и его температуры.

Явление термоэлектронной эмиссии лежит в основе работы электронных ламп, электронно-лучевых трубок и других приборов. Простейшей электронной лампой является *вакуумный диод*. Он представляет собой стеклянный (или металлический) баллон, в котором создан высокий вакуум. Внутри баллона размещены два электрода – *катод К* и *анод А*. Анод изготовлен из металлической пластины, катод – из тонкой металлической проволоки, свернутой в спираль. Катод изготавливают из тугоплавких металлов (вольфрам, молибден и др.) с возможно меньшей работой выхода электрона. Соединив выводы катода с источником тока, по нему пропускают электрический ток, который нагревает его до высокой температуры. Проволочную спираль, нагреваемую электрическим током, называют *нитью накала* лампы.

На рис. 10.3 показано условное схематическое изображение диода в электрических схемах. Диод обладает односторонней проводимостью. При подключении источника положительным полюсом к аноду и отрицательным к катоду электроны, испускаемые

нагретым катодом, двигаются под действием электрического поля к аноду – в цепи течет электрический ток, который называют *анодным током*.

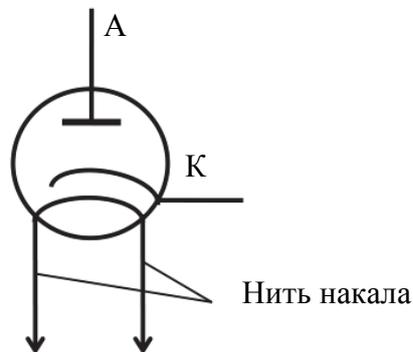


Рис. 10.3

Кривая зависимости силы анодного тока  $I_a$  от анодного напряжения  $U_a$  при постоянном токе накала катода называется *вольт-амперной характеристикой диода*.

На рис. 10.4 изображены три вольт-амперные характеристики диода, соответствующие разным температурам катода, начальные участки (0, 1, 2, 3) которых совпадают.

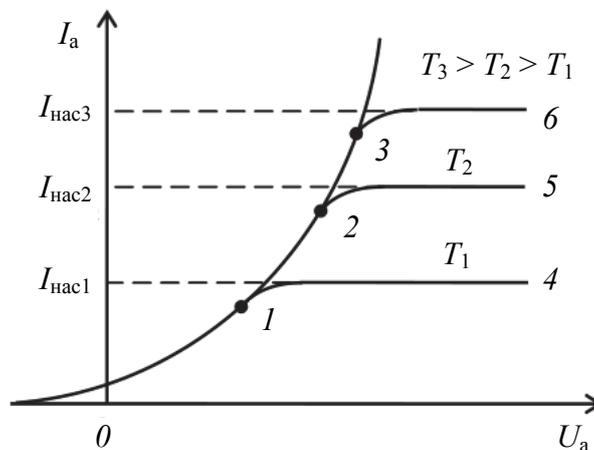


Рис. 10.4

Нелинейный вид зависимости  $I_a = I_a(U_a)$  объясняется тем, что вокруг катода образуется электронное облако, препятствующее движению к аноду электронов, вновь вылетающих из катода. С увеличением напряжения между электродами плотность электронного облака уменьшается, анода достигает большее количество электронов,

и сила тока растет. При достаточно большом значении  $U_a$  все электроны, покинувшие катод, попадают на анод, и сила тока  $I_a$  достигает максимально возможного значения при данной температуре катода. Это значение тока называется *током насыщения*  $I_{\text{нас}}$ . Сила тока насыщения определяется формулой  $I_{\text{нас}} = Ne$ , где  $N$  – число электронов, вылетающих в единицу времени с поверхности катода;  $e$  – заряд электрона.

Опытным путем установлено, что сила тока насыщения резко возрастает с повышением температуры катода. Плотность силы тока насыщения  $j_{\text{нас}}$  определяется уравнением, которое называется формулой *Ричардсона – Дешимана*:

$$j_{\text{нас}} = CT^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (10.7)$$

где  $C$  – постоянная, зависящая от материала катода и состояния его поверхности;  $T$  – температура катода;  $A$  – работа выхода электрона из металла;  $k$  – постоянная Больцмана.

Зависимость анодного тока  $I_a$  от анодного напряжения в области малых значений  $U_a$  описывается формулой *Богуславского – Ленгмюра* («закон трех вторых»):

$$I_a = BU_a^{3/2}, \quad (10.8)$$

где  $B$  – коэффициент, зависящий от формы электродов и их взаимного расположения.

#### **4. Электрический ток в жидкостях. Законы Фарадея для электролиза**

*Электролитами* принято называть проводящие среды, в которых протекание электрического тока сопровождается переносом и выделением на электродах вещества. Это явление получило название *электролиза*. Носителями свободных зарядов в электролитах являются положительно и отрицательно заряженные ионы. К электролитам относятся многие соединения металлов с металлоидами в расплавленном состоянии, водные растворы неорганических кислот, солей и оснований, расплавленные соли, кристаллы которых построены из ионов (например,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{NaNO}_3$ ), а также некоторые твердые вещества.

Электрический ток в электролитах представляет собой перемещение положительных ионов (*катионов*) к отрицательному электроду (*катоду*) и отрицательных ионов (*анионов*) к положительному электроду.

троду (*аноду*). Ионы обоих знаков появляются в водных растворах солей, кислот и щелочей в результате расщепления части нейтральных молекул. Это явление называется *электролитической диссоциацией*. Например, хлорид меди  $\text{CuCl}_2$  диссоциирует в водном растворе на ионы меди и хлора:



При подключении электродов к источнику тока ионы под действием электрического поля начинают упорядоченное движение: положительные ионы меди движутся к катоду, а отрицательно заряженные ионы хлора – к аноду (рис. 10.5).

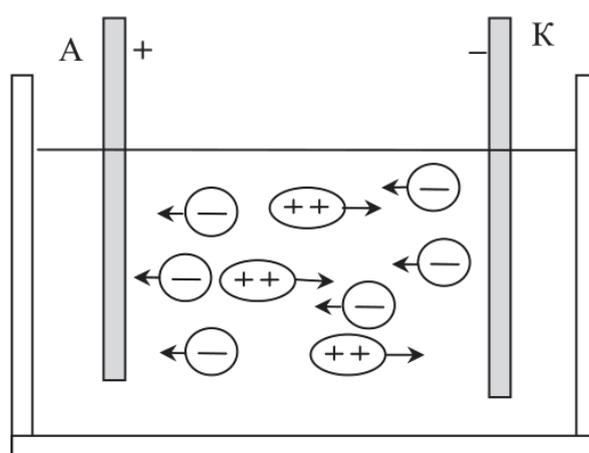


Рис. 10.5

Достигнув катода, ионы меди нейтрализуются избыточными электронами катода и превращаются в нейтральные атомы, оседающие на катоде. Ионы хлора, достигнув анода, отдают по одному электрону. После этого нейтральные атомы хлора соединяются попарно и образуют молекулы хлора  $\text{Cl}_2$ , который выделяется на аноде в виде пузырьков.

Основные законы электролиза были экспериментально установлены М. Фарадеем. Согласно *первому закону Фарадея*, масса  $m$  вещества, выделяющаяся на каком-либо из электродов, прямо пропорциональна заряду  $q$ , прошедшему через электролит:

$$m = Kq = Kit, \quad (10.9)$$

где  $I = q/t$  – сила тока, протекающего через электролит за время  $t$ .

Коэффициент  $K$  называется *электрохимическим эквивалентом вещества*. Он численно равен массе данного вещества, выделяемой

при электролизе единичным зарядом. Коэффициент  $K$  зависит от химической природы вещества.

Каждый ион содержит целое число элементарных зарядов  $e$ , поэтому заряд иона по абсолютной величине  $q_0 = Ze$ , где  $Z$  – целое число, равное валентности соответствующего химического элемента или соединения. Если на электроде выделилось  $N$  таких ионов, то их общий заряд  $NZe$ .

Масса выделившегося на электроде вещества равна массе всех ионов, пришедших к электроду:

$$m = m_0 N = m_0 \frac{q}{q_0} = \frac{m_0}{Ze} q, \quad (10.10)$$

где  $m_0$  – масса одного иона.

Сравнивая формулы (10.9) и (10.10), найдем выражение для электрохимического эквивалента вещества:

$$K = \frac{m_0}{Ze} = \frac{M}{ZeN_A}, \quad (10.11)$$

где  $m_0 = M/N_A$ ;  $M$  – молярная масса вещества;  $N_A$  – число Авогадро.

Представим выражение (10.11) в виде

$$K = \frac{1}{F} \frac{M}{Z}, \quad (10.12)$$

где постоянную  $F = eN_A$  называют *числом Фарадея*.

Формула (10.12) выражает *второй закон Фарадея*. Согласно этому закону, электрохимический эквивалент вещества  $K$  прямо пропорционален его химическому эквиваленту, равному отношению молярной массы вещества к его валентности.

Подставив выражение (10.12) в (10.9), получим формулу, объединяющую оба закона Фарадея:

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{Z} q. \quad (10.13)$$

Из формулы (10.13) следует физический смысл числа Фарадея. Оно равно заряду, который надо пропустить через электролит, чтобы на электроде выделилась масса, численно равная химическому эквиваленту вещества.

Явление электролиза находит широкое техническое применение: *очистка или рафинирование металлов; электрометаллургия; гальваностегия; гальванопластика.*

## 5. Электрический ток в газах

Газы в нормальных условиях являются диэлектриками. Они состоят из электрически нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных носителей тока. Проводниками тока газы становятся при их ионизации. *Ионизацией* называют процесс отделения электронов от молекул или атомов и присоединения их к другим нейтральным атомам или молекулам.

Прохождение электрического тока через газы называется *газовым разрядом*. Разряды, вызванные действием внешнего ионизатора, называются *несамостоятельными газовыми разрядами*. Ионизация может быть вызвана нагреванием тела (*термическая ионизация*), электромагнитным излучением (*фотоионизация*), бомбардировкой молекул (атомов) газа быстро движущимися электронами или ионами (*ударная ионизация*). Чтобы разряд был непрерывным, необходима постоянная работа ионизатора. В противном случае через некоторое время разряд затухает. Причиной затухания является *рекомбинация ионов* – воссоединение иона и электрона в нейтральную молекулу.

Рассмотрим газ, находящийся между плоскими параллельными электродами и подвергающийся непрерывному постоянному по интенсивности воздействию какого-либо ионизатора (например, рентгеновских лучей). Действие ионизатора приводит к ионизации молекул газа. За единицу времени он создает определенное количество ионов. Некоторые из них рекомбинируют, встречаясь с электронами. При подаче разности потенциалов между электродами ионы в газе приходят в движение, замыкая электрическую цепь.

Зависимость силы тока от приложенного к электродам напряжения показана на рис. 10.6.

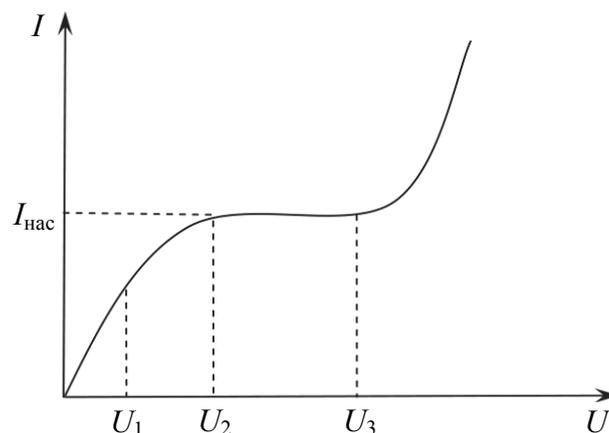


Рис. 10.6

При небольших напряжениях часть образовавшихся ионов достигает электродов, образуя электрический ток. По мере увеличения приложенного напряжения все больше ионов достигает электродов, и сила тока возрастает почти линейно (участок от нуля до  $U_1$ ). При напряжении  $U_2$  ток достигает насыщения и не изменяется в области напряжений от  $U_2$  до  $U_3$ . При этом все имеющиеся ионы достигают электродов, и дальнейший рост напряжения не приводит к увеличению числа свободных зарядов, участвующих в токе.

При  $U > U_3$  ток снова начинает возрастать за счет появления в газе новых носителей тока. Это явление обусловлено возникновением *ударной ионизации*. При больших значениях напряжения электроны, возникающие в газе под действием внешнего ионизатора, настолько сильно ускоряются электрическим полем, что, сталкиваясь с молекулами газа, ионизируют их. При этом образуются вторичные электроны и ионы. Вторичные электроны также ускоряются электрическим полем и, в свою очередь, ионизируют новые молекулы газа. Таким образом, число носителей тока в газе и его проводимость сильно возрастают. Сила тока в газовом разряде увеличивается в сотни и тысячи раз, а в самом газе появляются сильные световые и тепловые эффекты. Ионы, необходимые для поддержания высокой электропроводности, создаются самим разрядом в результате внутренних процессов, происходящих в газе. Если в этих условиях прекратить действие ионизатора, то газовый разряд будет продолжаться самопроизвольно.

Газовый разряд, который продолжается после прекращения действия внешнего ионизатора, называется *самостоятельным газовым разрядом*. Напряжение  $U_3$ , при котором возникает самостоятельный разряд, называется *напряжением пробоя газа*.

В зависимости от процессов образования ионов в газовом разряде различают несколько типов самостоятельных разрядов: тлеющий, искровой, коронный, дуговой.

*Тлеющий разряд* – один из видов стационарного самостоятельного электрического разряда. Формируется при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рис. 10.7). На электроды подается напряжение в несколько тысяч вольт. Если давление газа в трубке составляет примерно 40 мм рт. ст., возникает разряд.

На рис. 10.7 показаны основные области тлеющего разряда. Около катода располагается небольшая темная область – *астоново темное пространство 1*.

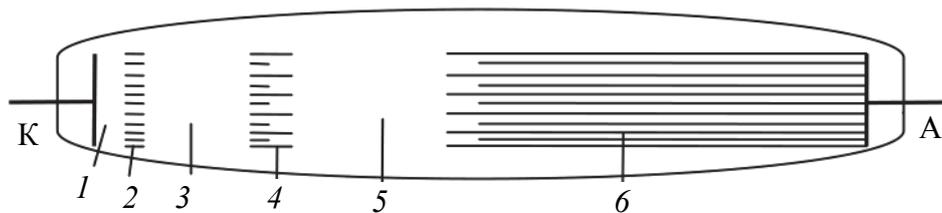


Рис. 10.7

Далее располагается тонкий светящийся слой, называемый *катодной светящейся пленкой 2*, затем – слабосветящийся слой, по контрасту кажущийся темным и называемый *Фарадеевым темным пространством 3*. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют *тлеющим свечением 4*. Все перечисленные выше слои образуют *катодную часть тлеющего разряда*. С тлеющим свечением граничит темный промежуток – *Фарадеево темное пространство 5*. Граница между двумя последними областями размыта. Вся остальная часть трубки, вплоть до анода, заполнена светящимся газом. Это часть разряда носит название *положительного столба 6*. При понижении давления катодная часть разряда и Фарадеево темное пространство расширяются, а положительный столб укорачивается. При определенном давлении положительный столб распадается на ряд чередующихся темных и светлых слоев – *страт*.

В настоящее время трубки с тлеющим разрядом находят практическое применение как источник света – газоразрядные лампы.

*Искровой разряд* возникает между двумя электродами при постепенном увеличении напряжения между ними до значения, при котором напряженность электрического поля между электродами достигает пробивного для данного газа значения. Примером искрового разряда является молния.

*Коронный разряд* возникает при сравнительно высоком давлении, близком к атмосферному, в сильно неоднородном электрическом поле. Для получения таких полей один из электродов (или оба) должен иметь очень большую кривизну.

*Дуговой разряд* можно получить от источника низкого напряжения. Для этого электроды сближают до соприкосновения. В месте соприкосновения они сильно раскаляются электрическим током, после чего их разводят. Между электродами вспыхивает ослепительное свечение, имеющее форму дуги. Данный разряд характеризуется большой силой тока (десятки и сотни ампер) и малым напряжением на разрядном промежутке между электродами (несколько десятков вольт).

Учебное издание

**Чаевский** Вадим Витальевич

## **ФИЗИКА**

**В 5-ти частях**

**Часть 3. Электростатика.  
Постоянный ток**

Тексты лекций

Редактор *О. П. Приходько*  
Компьютерная верстка *О. П. Приходько*  
Корректор *О. П. Приходько*

Издатель:

УО «Белорусский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/227 от 20.03.2014.

Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.