УДК 532.516

В. Л. Сенницкий [1,2]
[1]Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева
СО РАН, [2]Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия

УСКОРЕННОЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация. *Поставлена и решена задача о совместном вращательном движении твердого цилиндрического тела и окружающей его вязкой жидкости при внешнем силовом воздействии. Обнаружены существенные особенности движения тела на малых и больших временах.*

V.L. Sennitskii[1,2]
[1]Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

ACCELERATED ROTARY MOTION OF A SOLID BODY AND A VISCOUS LIQUID

Abstract. *The problem is formulated and solved on the joint rotary motion of a solid cylindrical body and a surrounding it viscous liquid under an external force influence. Essential peculiarities of the motion of the body at small and at large times are revealed.*

1. Известно (см., например, [1, 2]), что жидким средам – расплавам, растворам – принадлежит важная роль в процессах создания высококачественных материалов. Ввиду этого, исследования динамики гидромеханических систем, и прежде всего – содержащих вязкую жидкость, неизменно сохраняют свою актуальность [3–5]. Данное научное направление развивается, в частности, посредством решения новых задач о совместном движении всех свободных частей гидромеханических систем. Такой подход приводит к задачам повышенной сложности, но является необходимым для получения достоверных результатов. Задачи об ускоренном вращательном движении (разгоне, торможении) гидромеханической системы, содержащей вязкую жидкость, представляют собой классические задачи гидромеханики; при этом их решения являются актуальными и имеют существенную прикладную значимость. Вместе с тем, такие задачи относительно мало изучены. В настоящей работе поставлена и решена новая задача о совместном ускоренном вращательном движении твердого кругового цилиндрического тела и вязкой жидкости. Ускоренное движение тела обусловливается внешними силами, действующими на тело на протяжении конечного промежутка времени, и силами, действующими на тело со стороны жидкости. Найдено точное решение задачи.

2. В вязкой несжимаемой не ограниченной извне жидкости находится абсолютно твердое тело Ξ – бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса A. В начальный момент времени t, при t = 0 тело Ξ и жидкость покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. В начальный и последующие моменты времени ось тела Ξ находится на оси Z. При $0 \le t \le T$ (T > 0 – постоянная) на тело Ξ оказывается внешнее силовое воздействие. Требуется определить движение тела Ξ и жидкости при t > 0.

Пусть R, θ – полярные координаты в плоскости Z = 0; ξ – часть тела Ξ длиной L, радиусом A, вписанная между плоскостями $Z = -L/2$ и $Z = L/2$; Ω – угловая скорость вращения тела Ξ вокруг оси Z; I – момент инерции тела ξ относительно оси Z; ρ, ν, $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_\theta$ – соответственно плотность, кинематический коэффициент вязкости и скорость жидкости ($V = V(R, t)$; $\mathbf{e}_\theta$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением возрастания угла θ); M_{ext} = M при $0 \le t \le T$, 0 при $t > T$ – момент внешних сил, действующий на тело ξ относительно оси Z (M > 0 – постоянная);

$$M_{liq} = 2\pi A^2 L\rho\nu \left(\frac{\partial V}{\partial R}\Big|_{R=A} - \Omega\right)$$

– момент сил со стороны жидкости, действующий на тело ξ относительно оси Z.

Уравнение движения тела ξ (тела Ξ), уравнение Навье – Стокса, граничные и начальные условия имеют вид

$$I\frac{d\Omega}{dt} = M_{ext} + M_{liq}, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2}\right); \tag{1}$$

$$V = A\,\Omega \quad \text{при } R = A, \qquad V \to 0 \quad \text{при } R \to \infty; \tag{2}$$

$$\Omega = 0, \; V = 0 \quad \text{при } t = 0. \tag{3}$$

3. Для решения задачи (1) –(3) будем использовать операционный метод. Переходя к изображениям, получим

$$Ip\Omega^* = M^*_{ext} + M^*_{liq}, \qquad \frac{p}{\nu}V^* = \frac{d^2V^*}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{dV^*}{dR} - \frac{V^*}{R^2}; \tag{4}$$

$$V^* = A\Omega^* \quad \text{при } R = A, \qquad V^* \to 0 \quad \text{при } R \to \infty. \tag{5}$$

Здесь

$$\Omega^* = \int_0^\infty e^{-pt}\,\Omega\,dt; \qquad V^* = \int_0^\infty e^{-pt}\,V\,dt.$$

Из (4), (5) следует

$$\Omega^* = \frac{M\left(1-e^{-pT}\right)}{2\pi A^2 L\rho\nu p\chi}\ ; \quad V^* = A\Omega^*\ \frac{K_1(qr)}{K_1(q)}\,, \tag{6}$$

где K_1 – функция Макдональда; $q = \sqrt{\frac{p}{\nu}}\ A$; $r = R/A$;

$\chi = 1 + \frac{Ip}{2\pi A^2 L\rho\nu} - \frac{dK_1(q)/dq}{K_{1(q)}}$.

Переходя к оригиналу, получим

$$V = \frac{\varkappa A}{2\pi i T}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{pt}\left(1-e^{-pT}\right)}{p\chi}\ \frac{K_1(qr)}{K_1(q)}\ dp\,. \tag{7}$$

Здесь интегрирование производится по прямой Real p = α > 0; i – мнимая единица; $\varkappa = MT/(2\pi A^2 L\rho\nu)$. Отметим, что функция $\chi = \chi(p)$ не имеет нулей на комплексной плоскости переменной p с разрезом вдоль оси Real p от p = 0 до p = ∞. По теореме Коши

$$\int_{aa'ba}\frac{e^{p(t-T)}}{p\chi}\ \frac{K_1(qr)}{K_1(q)}\ dp = 0 \quad \text{для } 0 \le t \le T\,; \tag{8}$$

$$\int_{aa'cdgha}\frac{e^{pt}}{p\chi}\ \frac{K_1(qr)}{K_1(q)}\ dp = 0\,; \tag{9}$$

$$\int_{aa'cefha}\frac{e^{pt}\left(1-e^{-pT}\right)}{p\chi}\ \frac{K_1(qr)}{K_1(q)}\ dp = 0 \quad \text{для } t > T\,, \tag{10}$$

где aa′ba, aa′cdgha, aa′cefha – контуры интегрирования (контур aa′ba образован отрезком aa′ прямой Real p = α и дугой α′ba окружности радиуса S_1 > α ; контур aa′cdgha образован отрезком aa′ прямой Real p = α , дугой α′c окружности радиуса S_1, отрезком cd прямой Imag p = δ > 0, дугой dg окружности радиуса δ < S_2 < α , отрезком gh прямой Imag p = − δ и дугой ha окружности радиуса S_1 ; контур aa′cefha образован отрезком aa′ прямой Real p = α , дугой a′c окружности радиуса S_1 , отрезком ce прямой Imag p = δ , дугой ef окружности радиуса δ, отрезком fh прямой Imag p = − δ и дугой ha окружности радиуса S_1 ; центры окружностей находятся в точке Real p = Imag p = 0). Из (2), (8) – (10) (при δ → 0, S_1 → ∞, S_2 → 0) следует

$$\Omega = \frac{\varkappa}{2T}\left(1 - \frac{8\lambda^2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma^2\tau}}{\sigma^3\eta_1}\,d\sigma\right) \quad \text{для } 0 \le t \le T\,; \tag{11}$$

$$\Omega = \frac{4\varkappa\lambda^2}{\pi^2 T}\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma^2\tau}\left(e^{\mu\sigma^2}-1\right)}{\sigma^3\eta_1}\,d\sigma \quad \text{для } t > T\,; \tag{12}$$

$$V = \frac{A\varkappa}{2Tr}\left(1 + \frac{4\lambda}{\pi}\, r\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma^2\tau}\,\eta_2}{\sigma^2\eta_1}\,d\sigma\right) \quad \text{для } 0 \le t \le T\,; \tag{13}$$

$$V = \frac{-2A\varkappa\lambda}{\pi T}\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma^2\tau}\left(e^{\mu\sigma^2}-1\right)\eta_2}{\sigma^2\eta_1}\,d\sigma \quad \text{для } t > T\,, \tag{14}$$

где $\lambda = 2\pi A^4 L\rho/I\,;\ \ \mu = \nu T/A^2;\ \ \tau = \nu t/A^2\,;$
$\eta_1 = [\lambda J_2(\sigma) - \sigma\, J_1(\sigma)]^2 + [\lambda N_2(\sigma) - \sigma N_1(\sigma)]^2\,;$
$\eta_2 = [\lambda N_2(\sigma) - \sigma\, N_1(\sigma)]J_1(\sigma r) - [\lambda J_2(\sigma) - \sigma J_1(\sigma)]N_1(\sigma r)$
(J_1, J_2 – функции Бесселя; N_1, N_2 – функции Неймана).

Формулами (11) – (14) определяется решение задачи (1) – (3).

4. Обратимся к вопросу об асимптотиках движения тела на малых и больших временах. Согласно (11)

$$\Omega = \left(\frac{4\varkappa\lambda^2}{\pi^2 T}\int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma\eta_1}\right)\tau + o(\tau) \quad \text{при } \tau \to 0\,. \tag{15}$$

По теореме Коши

$$\int_{haba'cefh} \frac{dp}{\chi} = 0\,, \tag{16}$$

где haba′cefh – контур интегрирования, образованный дугой haba′c окружности радиуса S_1, отрезком ce прямой Imag p = δ, дугой ef окружности радиуса δ, отрезком h прямой Imag p = – δ (центры окружностей находятся в точке Real p = Imag p = 0). Из (16) следует

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma\eta_1} = \frac{\pi^2}{4\lambda}\,. \tag{17}$$

Используя (15), (17), получим асимптотическую формулу

$$\Omega \sim \frac{M}{I}\,t \quad \text{при } t \to 0. \tag{18}$$

Согласно (12)

$$\Omega = \frac{4\varkappa\lambda^2}{\pi^2 T}\left[\int_0^{\tau^{-1/8}} \frac{e^{-\sigma^2\tau}\left(e^{\mu\sigma^2}-1\right)}{\sigma^3\eta_1}\, d\sigma + O\left(e^{-\tau^{3/4}}\right)\right] \quad \text{при } t \to \infty,$$

откуда следует асимптотическая формула

$$\Omega \sim \frac{MT}{8\pi L\rho\nu^2}\ t^{-2} \quad \text{при } t \to \infty\,. \tag{19}$$

Формулами (18), (19), в частности, устанавливается наличие двух существенных особенностей вращательного движения рассматриваемого твердого тела в вязкой жидкости: движение тела на малых временах не зависит от плотности и коэффициента вязкости жидкости, движение тела на больших временах не зависит от радиуса и момента инерции тела. Это свидетельствует о том, что асимптотики, определяемые формулами (18), (19), обладают универсальностью – асимптотика угловой скорости на малых временах одинакова для любой вязкой жидкости, асимптотика угловой скорости на больших временах одинакова для любого твердого кругового цилиндрического тела.

Изложенное в настоящей работе может быть использовано, в частности, при создании устройств, организации процессов, предполагающих наличие вращающихся твердых тел и жидких сред.

Список использованных источников

1. Петровский Г. Т., Воронков Г. Л. Оптическая технология в космосе. Л.: Машиностроение, 1984. 158 с.

2. Космическое материаловедение. Введение в научные основы космической технологии. Под ред. Б. Фойербахера, Г. Хамахера, Р. Наумана. М.: Мир, 1989. 480 с.

3. Сенницкий В. Л. Нестационарное вращение цилиндра в вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1980. № 3. С. 66–69.

4. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97. DOI 10.17377/sibjim.2017.20.210

5. Sennitskii V. L. Predominantly unidirectional rotation of a viscous liquid with a free boundary // Thermophysics and Aeromechanics. 2020. Vol. 27, No. 1. P. 157–160. DOI 10.1134/S0869864320010175 .